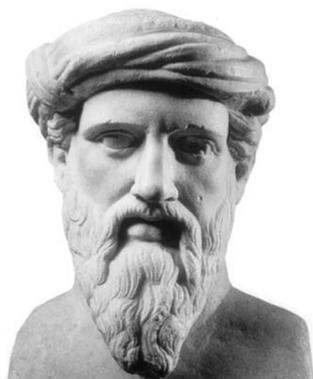


math-crumbs

claudio magno

<https://www.cm-physmath.net>

revisione
25 maggio 2024



Pitagora da Samo (~ 569 a. C. - ~ 475 a. C.)

INTRODUZIONE MATEMATICA

BUONA PER TUTTE LE TRASFORMAZIONI PERIODICHE ‘TIME-DEPENDENT’ ...

“Conterò poco, è vero”
diceva l’Uno ar Zero:
“ma tu che vali? Gnente: proprio gnente
sia nell’azione come ner pensiero
rimani un coso vôto e inconcrudente.
Io, invece, se me metto a capofila
de cinque zeri tale e quale a te,
lo sai quanto divento? Centomila.
È questione de numeri. A un dipresso
è quello che succede ar dittatore
Che cresce de potenza e de valore
più so’ li zeri che je vanno appresso”.

Trilussa (Carlo Alberto Salustri),
1871-1950

Uno Zibaldone di ‘piccole cose matematiche’ (*crumbs*, briciole, appunto) che, però, ho trovato utili in molteplici circostanze, argomenti ‘in calce’ da non dimenticare mai, che emergono quasi sempre qui e là, in modo inatteso, nella ‘grana grossa’ dei pilastri della ‘Grande Teoria’.

Questo math-notebook non sostituisce alcun testo (e ci mancherebbe!). È solo un mio vademecum – alquanto disorganico, in crescita lenta, intermittente, ma mai arrivato alla fine – di annotazioni e di collegamenti a fonti e approfondimenti ben più sostanziali. Lo si può considerare come un ‘coltellino a serramanico svizzero’ (per intenderci, quello rosso, lucido, con la croce bianca) da tirar fuori discretamente, quando serve ...

Infine, l’identificazione degli *elementi neutri* (i.e., di quali siano gli 0 e l’1) dell’*Algebra ... di Trilussa* estrapolata ai tempi storico-sociali correnti, è lasciata, come esercizio utile di approfondimento, alla\al gentile lettrice\lettore ... ma questo discorso ci porterebbe non solo fuori-tema ma molto, molto lontano ...

Il metodo del ‘completamento-del-quadrato’
Dalla forma additiva a quella moltiplicativa del polinomio generale di 2° grado

$$P_{(2)}(x) := ax^2 + bx + c,$$

Il primo coefficiente è $a \neq 0$, così che $P_{(2)}(x)$ resta, in ogni caso, di 2° grado.

• 1° procedimento

Raccogliere a dai termini del polinomio e proseguire scrivendo $b/a \equiv 2(b/(2a))$:

$$P_{(2)}(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right). \quad (1)$$

Aggiungere $0 \equiv (b/(2a))^2 - (b/(2a))^2$ tra le ultime parentesi dell’Idn. (1),

$$P_{(2)}(x) = a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2}_{=0} + \frac{c}{a} \right) \equiv a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right). \quad (2)$$

Nell’Idn. (2), i primi tre termini costituiscono un *trinomio quadratico perfetto*, i.e.,

$$P_{(2)}(x) = a \left(\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \equiv a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right), \quad (3)$$

ricordando, circa il 4° e il 5° termine, che *una linea di frazione equivale*, di per sé, *a una coppia di parentesi*. Ora, definire la differenza $b^2 - 4ac$ con il simbolo sintetico standard Δ (i.e., $\Delta := b^2 - 4ac$, il cosiddetto *discriminante* di $P_{(2)}(x)$ e $u := x + b/(2a)$). Allora, l’Idn. (3) si riscrive come

$$P_{(2)}(x) \equiv a \left(u^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \equiv a \left(u - \frac{\Delta^{1/2}}{2a} \right) \left(u + \frac{\Delta^{1/2}}{2a} \right) \quad (4)$$

dai *prodotti notevoli* elementari. Pertanto, ritornando all’Idn. (4), risulta

$$P_{(2)}(x) \equiv a \left(u - \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right) \left(u + \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right)$$

ovvero, dalla definizione precedente di u , si arriva a scrivere

$$\begin{aligned} P_{(2)}(x) &\equiv a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right) \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right) = \dots \\ &\dots = a \left(x - \left(\frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right) \right) \equiv a(x - x_-)(x - x_+). \end{aligned} \quad (5)$$

Le *parentesi interne* racchiudono le cosiddette *radici* di $P_{(2)}(x)$, i.e., quei *due unici* valori di x , costruiti con i coefficienti $\{a, b, c\}$ – x_- e x_+ – che *annullano* $P_{(2)}(x)$, i.e., che sono *soluzioni* dell’equazione $P_{(2)}(x) = 0$.

• 2° procedimento

Raccogliere $1/(4a)$ dai termini di $P_{(2)}(x)$ e proseguire scrivendo:

$$P_{(2)}(x) = \frac{1}{4a} (4a^2x^2 + 4abx + 4ac) \equiv \frac{1}{4a} ((2ax)^2 + 2(2ax)b + \underbrace{b^2 - b^2}_{=0} + 4ac), \quad (6)$$

dopo aver sommato $0 \equiv b^2 - b^2$. Nell’Idn. (6), si individua la somma

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 \equiv (2ax + b)^2, \quad (7)$$

che corrisponde all’espansione di un *quadrato* binomiale. Così, si riscrive l’Idn. (6) come

$$P_{(2)}(x) = \frac{1}{4a} ((2ax + b)^2 - \Delta).$$

Analogamente a quanto fatto prima, si definisca $v := 2ax + b$, verificando, tra l'altro, che $v \equiv 2au$. Quindi, come per il 1° procedimento, si ha, da un prodotto notevole elementare, che

$$\begin{aligned} P_{(2)}(x) &= \frac{1}{4a} (v^2 - \Delta) \equiv \frac{1}{4a} (v - \Delta^{1/2})(v + \Delta^{1/2}) \\ &= \frac{1}{4a} (2ax + b - (b^2 - 4ac)^{1/2})(2ax + b + (b^2 - 4ac)^{1/2}) = \dots \\ &\dots = a \left(x - \left(\frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right) \right) \equiv a (x - x_-)(x - x_+). \end{aligned} \quad (8)$$

cioè, ancora l'identità (5).

Applicazioni

$$\begin{aligned} 1. \quad x_- + x_+ &= -\frac{b}{a}, & 2. \quad x_- x_+ &= \frac{c}{a}, & 3. \quad x_+ - x_- &= \frac{\Delta^{1/2}}{a}, \\ 4. \quad \frac{x_+}{x_-} &= \frac{(b - \Delta^{1/2})^2}{4ac}, & 5. \quad \frac{x_-}{x_+} &= \frac{(b + \Delta^{1/2})^2}{4ac}, & 6. \quad \frac{x_+ - x_-}{x_+ + x_-} &= -\frac{\Delta^{1/2}}{b}, \\ 7. \quad \frac{(b - \Delta^{1/2})^2}{4ac} \frac{(b + \Delta^{1/2})^2}{4ac} &= 1 \left(= \frac{x_+}{x_-} \frac{x_-}{x_+} \right). \end{aligned}$$

Radici razionali di un polinomio a coefficienti interi primi tra loro

Si consideri il polinomio, ordinato vs. le potenze decrescenti della variabile continua x ,

$$x \mapsto A_{(N)}(x) := a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + a_2 x^{N-2} + \dots + a_{N-2} x^2 + a_{N-1} x + a_N, \quad (1)$$

dove, l'insieme $\{a_k\} \subset \mathbb{Z}$ dei coefficienti è costituito da numeri *primi tra loro* e i due coefficienti *estremi*, a_0 e a_N , sono entrambi *non-nulli*. Dunque., con $N \in \mathbb{Z}^+$, si ha

$$\begin{cases} \{a_k\} \equiv \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N\} \subset \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \text{MCD}\{a_k\} = 1, \\ a_0 a_N \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

È noto un *metodo per tentativi* che permette di trovare – *quando esistono* – le radici **razionali** di $A_{(N)}(x)$. Sotto le condizioni (2), esso è fondato sulla proposizione *necessaria* seguente:

Proposizione

Sia $p \in \mathbb{Z} \wedge q \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Se $p/q \in \mathbb{Q}$ è una radice del polinomio $A_{(N)}(x)$, l'intero p è, necessariamente, un divisore del termine noto a_N mentre l'intero q è, necessariamente, un divisore del coefficiente a_0 del monomio di grado massimo. ▲

Dimostrazione

- Se p/q è una radice di $A_{(N)}(x)$, allora, vale l'identità

$$a_0 (p/q)^N + a_1 (p/q)^{N-1} + a_2 (p/q)^{N-2} + \dots + a_{N-2} (p/q)^2 + a_{N-1} (p/q) + a_N \equiv 0$$

che, moltiplicandone i membri per q^N , si riscrive

$$a_0 p^N + a_1 p^{N-1} q + a_2 p^{N-2} q^2 + \dots + a_{N-2} p^2 q^{N-2} + a_{N-1} p q^{N-1} + a_N q^N \equiv 0, \quad (3)$$

Sottraendo il monomio $a_N q^N$ dai membri della (3) e raccogliendo p in quello a sinistra, risulta

$$p(a_0 p^{N-1} + a_1 p^{N-2} q + a_2 p^{N-3} q^2 + \dots + a_{N-2} p q^{N-2} + a_{N-1} q^{N-1}) \equiv -a_N q^N. \quad (3.1)$$

Poiché, evidentemente, il membro a sinistra nell'Eq. (3.1) è multiplo di p , tale deve essere anche il membro a destra. Inoltre, poiché p è primo vs. q e, quindi, anche con q^N , segue che a_N è multiplo di p .

- Analogamente, sottraendo il monomio p da entrambi i membri dell'Eq. (3) e raccogliendo q in quello a sinistra, si ottiene

$$q(a_1 p^{N-1} + a_2 p^{N-2} q + a_3 p^{N-3} q^2 + \dots + a_{N-1} p q^{N-2} + a_N q^{N-1}) \equiv -a_0 p^N. \quad (3.2)$$

Poiché, evidentemente, il membro a sinistra nell'Eq. (3.2) è multiplo di q , tale deve essere anche il membro a destra. Inoltre, poiché q è primo vs. p e, quindi, anche con p^N , segue che a_0 è multiplo di q . ■

Osservazione 1

Le proprietà trovate dei numeri interi p e q ($\neq 0$) sono *solo necessarie* affinché il numero razionale p/q sia una radice del polinomio $A_{(N)}(x)$. Esse, però, *non sono sufficienti* per concludere che il rapporto tra un divisore relativo qualsiasi di a_N e un divisore relativo qualsiasi di a_0 sia sicuramente una radice di $A_{(N)}(x)$. □

Il metodo di ricerca delle radici razionali *eventuali* di $A_{(N)}(x)$ consiste dei passi seguenti:

- si trovano tutti i divisori (interi) *relativi* sia di a_0 che di a_N ;
- si formano tutte le frazioni possibili tra tutti i divisori *relativi* di a_N (numeratori) e tutti i divisori *relativi* di a_0 (denominatori);
- si verifica **se**, tra i numeri razionali *relativi* così costruiti, si trovino radici di $A_{(N)}(x)$.

Esempio 1

Si determinino le radici razionali eventuali del polinomio

$$K_{(5)}(x) \equiv (1/3)x^5 + (1/6)x^4 - (11/6)x^3 + (7/6)x^2 - (13/6)x + 1.$$

Soluzione

Il problema equivale alla ricerca delle soluzioni razionali eventuali del polinomio a coefficienti *interi primi tra loro*

$$A_{(5)}(x) \equiv 6K_{(5)}(x) = 2x^5 + x^4 - 11x^3 + 7x^2 - 13x + 6.$$

Poiché i divisori interi relativi di 6 sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ mentre quelli di 2 sono $\pm 1, \pm 2$, le soluzioni razionali eventuali sono da ricercarsi, mediante verifica in $A_{(5)}(x)$, tra i numeri

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 1/2, \pm 3/2.$$

ottenuti dividendo i divisori relativi di 6 per quelli di 2, i.e., per ± 1 e per ± 2 . Si trova che

$$\begin{aligned} A_{(5)}(\pm 1) &\neq 0, & A_{(5)}(2) &= 0, & A_{(5)}(-2) &\neq 0, \\ A_{(5)}(3) &\neq 0, & A_{(5)}(-3) &= 0, & A_{(5)}(\pm 6) &\neq 0, \\ A_{(5)}(1/2) &= 0, & A_{(5)}(-1/2) &\neq 0, & A_{(5)}(\pm 3/2) &\neq 0. \end{aligned}$$

Pertanto, si può concludere che le radici *razionali* di $A_{(5)}(x)$ sono i numeri $x = -3, 1/2, 2$. Questo fornisce, con il *metodo di Ruffini*, la rappresentazione *fattorizzata* in \mathbb{R}

$$A_{(5)}(x) = 2(x+3)(x-1/2)(x-2)(x^2+1).$$

Tale rappresentazione di $A_{(5)}(x)$ è anche *massimale* (o *prima*) in \mathbb{R} . Infatti, $x^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ■

Ovviamente, se $a_0 = 1$, le possibili radici razionali di $A_{(N)}(x)$ possono trovarsi solo tra i divisori *interi relativi* di a_N . A tale proposito, si consideri il seguente

Esempio 2

Si trovino le radici razionali *eventuali* del polinomio

$$A_{(3)}(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4.$$

Soluzione

Se $A_{(3)}(x)$ ha radici razionali, queste non possono essere che numeri *interi* da ricercarsi tra i divisori interi di -4 , il termine noto, i.e., $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ora, poiché

$$A_{(3)}(\pm 1) \neq 0, \quad A_{(3)}(2) \neq 0, \quad A_{(3)}(-2) = 0, \quad A_{(3)}(\pm 4) \neq 0,$$

l'unica radice razionale di $A_{(3)}(x)$ è l'intero $x = -2$. Il *metodo di Ruffini* fornisce la *fattorizzazione parziale* razionale

$$A_{(3)}(x) = (x+2)(x^2-2).$$

■

Esempio 3

Il polinomio

$$A_{(3)}(x) = x^3 - 4x^2 + x - 3$$

non ha radici razionali (né intere né fratte) perché risulta sia $A_{(3)}(\pm 1) \neq 0$ sia $A_{(3)}(\pm 3) \neq 0$.

■

Il *metodo di ricerca delle radici razionali* di un polinomio richiede calcoli di verifica spesso lunghi, noiosi e, alla fine, ... inconclusivi. Talvolta, però, si riesce ad alleggerire il lavoro con un uso attento del cosiddetto

Criterio\Regola di Descartes (René, 1596-1650) - Formulazione ristretta

$$P_{(N)}(x) := c_0x^N + c_1x^{N-1} + c_2x^{N-2} + \dots + c_{N-2}x^2 + c_{N-1}x + c_N$$

sia un polinomio ordinato, a coefficienti c_n tutti *reali* ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) e a radici x_j tutte *reali* ($j = 1, 2, \dots, N$) e siano c_k e $c_{k+\delta}$, con $\delta \in \{1, 2, \dots, N-k\}$, coefficienti *contigui non-nulli*. Allora,

- se $c_k c_{k+\delta} < 0$ (*variazione* di segno tra c_k e $c_{k+\delta}$), $P_{(N)}(x)$ possiede una radice $x_j > 0$.

Ora, la *riflessione* $x \mapsto -x$ nel polinomio $P_{(N)}(x)$ determina il polinomio associato avente *radici opposte*, $P_{(N)}(-x)$, con coefficienti $\bar{c}_n \equiv (-1)^n c_n$. Pertanto,

- al prodotto $\bar{c}_k \bar{c}_{k+\delta} < 0$ (*variazione* di segno tra \bar{c}_k e $\bar{c}_{k+\delta}$ in $P_{(N)}(-x)$), corrisponde una radice $x_j < 0$ di $P_{(N)}(x)$. ▲

■

Esempio 4

Il controllo grafico con un CAS [e.g., **GeoGebra™** (*)], indica che il polinomio *ordinato*

$$P_{(4)}(x) = 3x^4 + 19x^3 + 31x^2 - 11x - 42$$

possiede radici tutte in \mathbb{R} , delle quali, *una* è *positiva* perché $P_{(4)}(x)$ presenta *una variazione* di segno nella sequenza dei suoi coefficienti. Il polinomio ordinato associato

$$P_{(4)}(-x) = 3x^4 - 19x^3 + 31x^2 + 11x - 42$$

presenta *tre variazioni* di segno nella sequenza dei suoi coefficienti, quindi, $P_{(4)}(x)$ possiede *tre* radici reali *negative*.

La ricerca preliminare delle possibili radici *razionali* di $P_{(4)}(x)$ va eseguita nel sottoinsieme

$$A = \{\pm 1/3, \pm 2/3, \pm 1, \pm 2, \pm 7/3, \pm 3, \pm 14/3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\}.$$

Essa richiede, a rigore, ben 24 verifiche! D'altra parte, poiché $P_{(4)}(1) = 0$ e $P_{(4)}(-1) = -16 \neq 0$, tentativi entrambi agevoli da eseguire, appare evidente, dal *Criterio di Descartes*, che le altre possibili radici razionali devono trovarsi nel sottoinsieme $A^- = \{-1/3, -2/3, -2, -7/3, -3, -14/3, -6, -7, -14, -21, -42\} \subset A$.

Questo riduce le verifiche necessarie rimanenti a 11 (magra consolazione!). Con una calcolatrice, si trovano le radici razionali $x = -3, -7/3, -2$, dalle quali, con il *metodo di Ruffini*, si ottiene la forma fattorizzata massimale

$$P_{(4)}(x) = 3(x+3)(x+7/3)(x+2)(x-1).$$

■

(*) https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation

Esempio 5

Un controllo grafico indica che il polinomio *ordinato*

$$P_{(5)}(x) = 3x^5 + 5x^4 - 48x - 80$$

possiede *tre* radici reali, delle quali, *solo una* è *positiva*, verificandosi *una sola variazione* di segno nella sequenza *completa* dei suoi coefficienti, $\{3, 5, 0, 0, -48, -80\}$.

Il polinomio ordinato associato, nella variabile indipendente *opposta*, $-x$,

$$P_{(5)}(-x) = -3x^5 + 5x^3 + 48x - 80.$$

mostra *due variazioni* nella sequenza *completa* dei suoi coefficienti, $\{-3, 5, 0, 0, 48, -80\}$, e, quindi, $P_{(5)}(x)$ possiede *due radici negative*. L'applicazione del *metodo di Ruffini* nella ricerca di radici razionali dà

$$P_{(5)}(x) = 3(x + 5/3)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4).$$

■

Osservazione 2

L'**Esempio 5** suggerisce una formulazione *generale* del *Criterio di Descartes*:

$$P_{(N)}(x) := c_0x^N + c_1x^{N-1} + c_2x^{N-2} + \dots + c_{N-2}x^2 + c_{N-1}x + c_N$$

sia un polinomio ordinato a coefficienti $c_n \in \mathbb{R}$ e a radici $x_j \in \mathbb{C}$. Allora,

- al prodotto $c_k c_{k+\delta} < 0$ (*variazione* di segno) tra due coefficienti *non-nulli consecutivi* qualsiasi di $P_{(N)}(x)$ può corrispondere una sua radice $x_j \in \mathbb{R}^+$.
- al prodotto $\bar{c}_k \bar{c}_{k+\delta} < 0$ (*variazione* di segno) tra due coefficienti *non-nulli consecutivi* qualsiasi di $P_{(N)}(-x)$ può corrispondere una radice $x_j \in \mathbb{R}^-$ di $P_{(N)}(x)$.

Esempio 6

Il polinomio di grado *pari* in \mathbb{R}

$$G_{(4)}(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x + 5$$

possiede un numero *pari*, 0, di radici *reali*. Si trova, infatti, che le quattro radici di $G_{(4)}(x)$ costituiscono due coppie di radici *complesse coniugate*. La fattorizzazione massimale in \mathbb{R} di $G_{(4)}(x)$ è data dalla forma *irriducibile* (ottenibile mediante raccoglimenti parziali e/o il metodo del '*completamento del quadrato binomiale*')

$$G_{(4)}(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 2x + 5).$$

Analogamente, il polinomio di grado *dispari* in \mathbb{R}

$$H_{(5)}(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 17x^2 - 18x - 9$$

possiede *sicuramente* un numero *dispari* di radici reali. Esse sono 3 (peraltro, *razionali intere* e, quindi, determinabili con il metodo di *ricerca per tentativi*). Le altre due radici risultano *complesse coniugate*.

Pertanto, la fattorizzazione massimale in \mathbb{R} di $H_{(5)}(x)$ si scrive

$$H_{(5)}(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

■

Gli Esempi 5 e 6 precedenti sono conseguenze dirette del

Teorema Fondamentale dell'Algebra

Ogni polinomio di grado N in \mathcal{C} (i.e., a coefficienti *generalmente complessi*) possiede N radici in \mathcal{C} (i.e., *complesse*). ▲

La formulazione *ristretta* a \mathbb{R} è esprimibile attraverso il seguente

Corollario

Ogni polinomio \mathbb{R} (di grado N) in \mathbb{R} (i.e., a coefficienti *generalmente reali*) possiede un numero di radici *reali* pari/dispari come N . Pertanto, se N è *pari*, $A_{(N)}(x)$ possiede un numero di *coppie* di radici *complesse coniugate* compreso tra 0 a $N/2$ mentre, se N è *dispari*, il numero di tali coppie è compreso tra 0 a $(N-1)/2$. ▲

□

Infine, può rivelarsi utile tener presente una proprietà generale di $A_{(N)}(x)$ in \mathcal{C} , relativa alla *simmetria* esistente tra le *disposizioni semplici* delle N radici x_n – da sommare *singolarmente*, a *coppie*, a *terne*, ... e come N -pla – e gli $N+1$ coefficienti a_k (il caso corrispondente a $N=2$ è quello elementare ben noto). Tale proprietà fu scoperta da VIÈTE (FRANÇOIS, 1540-1603):

$$\begin{aligned}
 a_1/a_0 &= -\sum_{n=1}^N x_n \equiv -(x_1 + x_2 + \dots + x_N); \\
 a_2/a_0 &= \sum_{n_2=2}^N x_{n_1} x_{n_2}, & \forall \{n_1, n_2\} \subset \mathbb{Z}^+ : n_1 < n_2 \leq N; \\
 a_3/a_0 &= -\sum_{n_3=3}^N x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3}, & \forall \{n_1, n_2, n_3\} \subset \mathbb{Z}^+ : n_1 < n_2 < n_3 \leq N; \\
 & \vdots \\
 a_k/a_0 &= (-1)^k \sum_{n_k=k}^N x_{n_1} x_{n_2} \dots x_{n_k}, & \forall \{n_1, n_2, \dots, n_k\} \subset \mathbb{Z}^+ : n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq N; \\
 & \vdots \\
 a_N/a_0 &= (-1)^N \prod_{k=1}^N x_k \equiv (-1)^N x_1 x_2 \dots x_N.
 \end{aligned}$$

È semplice verificare che la somma generica k -esima, i.e., corrispondente al rapporto a_k/a_0 , è

costituita da $\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)}{k!}$ addendi.

■

Il problema generale del calcolo delle radici di un polinomio

Il problema generale della determinazione delle radici di un polinomio univariato a coefficienti in \mathcal{C} è di interesse sia teorico che, soprattutto, applicativo. È quasi superfluo ricordare la casistica sterminata di problemi e modelli matematici, la cui analisi qualitativa e/o quantitativa richiede la conoscenza di quei particolari valori della variabile indipendente che rendono *nullo* il valore di un polinomio.

D'altra parte, il *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, pur asserendo l'*esistenza* di N radici in \mathcal{C} per ogni polinomio di grado N , *non ne indica*, però, alcun procedimento generale di calcolo.

Dal 17° secolo, appaiono definitivamente stabiliti algoritmi *generali*, algebrici o goniometrici, per la determinazione delle radici di polinomi in \mathcal{C} di 1°, 2°, 3° e 4° grado. Tali algoritmi sono costituiti da un numero *finito* di operazioni algebriche formali sui *coefficienti polinomiali*, sia *dirette* (addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza *intera positiva*) che *inverse* rispettive (sottrazione, divisione ed elevamento a potenza *razionale reciproca dell'intera positiva* (estrazione di radice)).

Invece, per quanto riguarda i polinomi di grado $N > 4$, non sono noti algoritmi *algebrici generali* di fattorizzazione *chiusa* di alcun tipo – semplicemente – perché *non possono esistere*. Infatti,

Teorema (di Abel-Ruffini)

Non è realizzabile alcun *procedimento generale* di determinazione delle radici di un polinomio di grado $N > 4$ in \mathcal{C} eseguendo un numero *finito* di operazioni algebriche formali ordinarie sui suoi coefficienti. ▲

□

RUFFINI (Paolo, 1765-1822), scoprendolo, tentò la prima dimostrazione del teorema nel 1799 ma la rese nota solo nel 1813. Essa, però, pur ricevendo scarsa attenzione per alcune lacune formali, conteneva un approccio innovativo per l'epoca perché introduceva l'applicazione di ciò che, nei termini attuali della *Teoria dei Gruppi di GALOIS* (Évariste, 1811-1832), viene definito *gruppo di permutazione*. Peraltro, LAGRANGE (Joseph Louis, 1736-1813) aveva scoperto che esiste una sottoclasse di polinomi di 5° grado fattorizzabile mediante un polinomio risolvente opportuno di 6° grado. Oggi, tale risultato è deducibile dalla *Teoria dei Gruppi di Galois*; precisamente, vale il seguente

Teorema

(e.g., v.: BAUMSLAG, B., - CHANDLER, B., *Group Theory*, SCHAUM'S SERIES, MCGRAW-HILL, P. 158-174)

Un polinomio può essere fattorizzato completamente per via algebrica *sse* il *gruppo di Galois* a cui appartiene è *risolvibile*. Tutti i polinomi di grado $N \leq 4$ sono *sempre* fattorizzabili per via algebrica formale mentre, i polinomi di grado $N > 4$, *non sempre* posseggono fattorizzazioni algebricamente *chiuse*, essendo i *gruppi simmetrici* polinomiali S_2 , S_3 e S_4 *risolvibili* mentre S_N , per $N \geq 5$, è *non-risolvibile*. ▲

□

Osservazione 3

L'insieme degli N coefficienti e delle N radici di un polinomio in forma *normale* (i.e., con $a_0 = 1$) di grado N su un campo *minimale* opportuno $\mathcal{F}_N \subset \mathcal{C}$ costituisce un gruppo *automorfo simmetrico* S_N di grado N .

Ufficialmente, il *Teorema di Abel-Ruffini* è attribuito ad ABEL (NIELS HENRIK, 1802-1829), che ne fornì una dimostrazione completa nel 1824. Il suo enunciato viene citato, talvolta, in modo un po' impreciso: esso *non* asserisce che le radici di un polinomio di grado $N \geq 5$ non sono determinabili perché non esistono: infatti, il *Teorema Fondamentale dell'Algebra* garantisce l'esistenza in \mathbb{C} proprio di *quelle* $N (\geq 5)$ radici. Pertanto, se alcune radici polinomiali non sono rappresentabili in forma algebrica *chiusa* (e.g., mediante radicali o funzioni gonio-circolari\iperboliche), esse, in ogni caso, sono *sempre* rappresentabili in forma *numerica*, con precisione *arbitraria*, e.g., usando metodi come quello di *Newton-Raphson* o di *Laguerre* ([†]).

Comunque, è ovvio che alcuni polinomi (o classi di polinomi) di grado $N \geq 5$ sono fattorizzabili *algebricamente*. Infatti, con un raccoglimento evidente, si trova che

$$x^5 - x^4 - x + 1 = (x^4 - 1)(x - 1) \equiv (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x - 1) = (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1)^2$$

mentre l'unica rappresentazione fattorizzata massimale possibile in \mathbb{R} del polinomio

$$x^5 - x + 1 \approx (x + 1.1673)(x^2 - 1.5298x + 0.7093)(x^2 + 0.3625x + 1.2078),$$

garantita *esistenzialmente* dal *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, risulta non per via algebrica formale 'esatta' ma *solo* per via *numerica*, necessariamente approssimata.

Dunque, poiché la ricerca delle radici in forma *numerica* risulta – *operativamente* – equivalente a quella delle radici in forma *algebrica chiusa*, il *Teorema di Abel-Ruffini* riguarda solo la forma, o *rappresentazione*, che le radici possono avere, *non* la loro esistenza *né* il loro numero.

■■■

([†]) Un accenno, con alcuni esempi, alla rappresentazione fattorizzata *chiusa*, mediante radicali, per la classe di polinomi in \mathbb{R} di 5° grado $x \mapsto P_{(5)}(x) \equiv x^5 + px + q$, con $\{p, q\} \subset \mathbb{Q}$ (quella studiata, per primo, da Lagrange), si trova, e.g., in:

ZWILLINGER, D., *STANDARD MATHEMATICAL TABLES and FORMULAE*, 30TH ED., P. 83-84, CRC Press (1996).

Tra le classi interessanti di polinomi fattorizzabili per via algebrica formale, va ricordata quella dei cosiddetti *polinomi reciproci*, per la quale, si rimanda a testi ed esercizi facilmente reperibili. (3)

In particolare, i *polinomi reciproci di 1° tipo* e di grado *pari* e la classe morfologicamente analoga dei *polinomi anti-reciproci*, pure di grado *pari*, sono presentati sinteticamente, qui di seguito, in modalità ‘problem-solving’.

Polinomi reciproci di 1° tipo e di grado pari

Un polinomio di grado **pari**, $2n$, ordinato vs. le potenze decrescenti della variabile $x \in \mathbb{R}$,

$$P_{(2n)}(x) := a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_n x^n + \dots + a_{2n-2} x^2 + a_{2n-1} x + a_{2n}, \quad (1)$$

dove, $\{a_0, a_1, \dots, a_{2n}\} \subset \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ e i coefficienti $\{a_{n-j}, a_{n+j}\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, in posizione *simmetrica* vs. il monomio *centrale*, $a_n x^n$, sono **uguali**, $\forall j$, si dice **reciproco di 1° tipo**.

Il metodo seguente, di ricerca delle radici *reali* $\neq 0$ di $P_{(2n)}(x)$, è applicabile ai gradi $2n \geq 4$:

1. si verifichi l'implicazione *biunivoca* $P_{(2n)}(x_0) = 0 \Leftrightarrow P_{(2n)}(1/x_0) = 0$;
2. definita la variabile *reciproca* di ordine 1,

$$u := x + 1/x, \quad (2)$$

si verifichi l'identità *iterativa*

$$x^k + 1/x^k \equiv (x^{k-1} + 1/x^{k-1})u - (x^{k-2} + 1/x^{k-2}); \quad (3)$$

3. si costruisca la forma razionale generale di $P_{(2n)}(x)$ espressa dal rapporto

$$\begin{aligned} P_{(2n)}(x)/x^n &\equiv a_0(x^n + 1/x^n) + a_1(x^{n-1} + 1/x^{n-1}) + \dots \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \downarrow \dots + a_{n-2}(x^2 + 1/x^2) + a_{n-1}(x + 1/x) + a_n \end{aligned} \quad (4)$$

di *ordine* $k = 2, 3, 4, \dots, n$;

4. mediante l'Idn. (3), si generino *consecutivamente* le espressioni delle variabili $x^k + 1/x^k$, in termini di u e di ordine k crescente, presenti nell'Eq. (4),

$$\begin{aligned} x^2 + 1/x^2 &\equiv u^2 - 2, & x^5 + 1/x^5 &\equiv u^5 - 5u^3 + 5u, \\ x^3 + 1/x^3 &\equiv u^3 - 3u, & x^6 + 1/x^6 &\equiv u^6 - 6u^4 + 9u^2 - 2, \\ x^4 + 1/x^4 &\equiv u^4 - 4u^2 + 2, & x^7 + 1/x^7 &\equiv u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u, \quad \text{etc.}; \end{aligned} \quad (5)$$

5. con le Idn. (5), e con le successive, $P_{(2n)}(x)/x^n$ muta nella forma generale, di grado n vs. la variabile u ,

$$P_{(2n)}(x)/x^n \mapsto \Phi_{(n)}(u),$$

quindi, si ricavano i primi quattro $\Phi_{(n)}$ -polinomi corrispondenti:

$$\begin{aligned} \Phi_{(2)}(u) &= a_0 u^2 + a_1 u - 2a_0 + a_2 \\ \Phi_{(3)}(u) &= a_0 u^3 + a_1 u^2 - (3a_0 - a_2)u - 2a_1 + a_3 \\ \Phi_{(4)}(u) &= a_0 u^4 + a_1 u^3 - (4a_0 - a_2)u^2 - (3a_1 - a_3)u + 2(a_0 - a_2) + a_4 \\ \Phi_{(5)}(u) &= a_0 u^5 + a_1 u^4 - (5a_0 - a_2)u^3 - (4a_1 - a_3)u^2 + (5a_0 - 3a_2 + a_4)u + 2(a_1 - a_3) + a_5 \end{aligned} \quad (6)$$

6. infine, ogni radice $u = u_k$ di $\Phi_{(n)}(u)$ fornisce una coppia di radici *reciproche* dell'Eq. (1), mediante l'inversione dell'Eq. (2),

$$x_{k,\pm} = \frac{u_k \pm (u_k^2 - 4)^{1/2}}{2}.$$

■

Polinomi anti-reciproci di grado pari

Un polinomio di grado **pari**, $2n$, ordinato vs. le potenze decrescenti della variabile $x \in \mathbb{R}$,

$$A_{(2n)}(x) := a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_n x^n + \dots + a_{2n-2} x^2 + a_{2n-1} x + a_{2n}, \quad (7)$$

dove, $\{a_0, a_1, \dots, a_{2n}\} \subset \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, e i coefficienti $\{a_{n-j}, a_{n+j}\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, in posizione *simmetrica* vs. il monomio *centrale* $a_n x^n$ sono di segno *semi-alterno*, i.e., $a_{n+j} = (-1)^j a_{n-j}$, $\forall j$, si dice **anti-reciproco**.

Il metodo seguente, di ricerca delle radici *reali* $\neq 0$ di $A_{(2n)}(x)$, è applicabile ai gradi $2n \geq 4$:

1. si verifichi l'implicazione *biunivoca* $A_{(2n)}(x_0) \equiv 0 \Leftrightarrow A_{(2n)}(-1/x_0) = 0$;
2. definita la variabile *anti-reciproca* di ordine 1,

$$v := x - 1/x \quad (8)$$

si verifichino le identità *ricorsive* seguenti:

$$x^k + 1/x^k \equiv (x^{k-1} - 1/x^{k-1})v + (x^{k-2} + 1/x^{k-2}), \quad (9.1)$$

di *ordine pari*, i.e., per $k = 2, 4, \dots, n-1$ o n , e

$$x^k - 1/x^k \equiv (x^{k-1} + 1/x^{k-1})v + (x^{k-2} - 1/x^{k-2}), \quad (9.2)$$

di *ordine dispari*, i.e., per $k = 3, 5, \dots, n-1$ o n .

3. si costruisca la forma razionale generale di $A_{(2n)}(x)$ espressa mediante il rapporto

$$\begin{aligned} A_{(2n)}(x)/x^n &\equiv a_0(x^n + (-1)^n/x^n) + a_1(x^{n-1} + (-1)^{n-1}/x^{n-1}) + \dots \\ &\quad \downarrow \dots + a_{n-3}(x^3 - 1/x^3) + a_{n-2}(x^2 + 1/x^2) + a_{n-1}(x - 1/x) + a_n; \end{aligned} \quad (10)$$

4. Mediante le identità (9.1) e (9.2), si generino *consecutivamente* le espressioni delle variabili $x^k + 1/x^k$ e $x^k - 1/x^k$ in termini di v e di ordine k crescente, presenti nell'Eq. (9),

$$\begin{aligned} x^2 + 1/x^2 &\equiv v^2 + 2, & x^5 - 1/x^5 &\equiv v^5 + 5v^3 + 5v, \\ x^3 - 1/x^3 &\equiv v^3 + 3v, & x^6 + 1/x^6 &\equiv v^6 + 6v^4 + 9v^2 + 2, \\ x^4 + 1/x^4 &\equiv v^4 + 4v^2 + 2, & x^7 - 1/x^7 &\equiv v^7 + 7v^5 + 14v^3 + 7v, \quad \text{etc.}; \end{aligned} \quad (11)$$

5. con le identità (11), e con le successive, $A_{(2n)}(x)/x^n$ muta nella forma generale, di grado n vs. la variabile v ,

$$A_{(2n)}(x)/x^n \mapsto \Psi_{(n)}(v),$$

quindi, si ricavano i primi quattro $\Psi_{(n)}$ -polinomi corrispondenti:

$$\begin{aligned}
\Psi_{(2)}(v) &= a_0 v^2 + a_1 v + 2a_0 + a_2, \\
\Psi_{(3)}(v) &= a_0 v^3 + a_1 v^2 + (3a_0 + a_2)v + 2a_1 + a_3, \\
\Psi_{(4)}(v) &= a_0 v^4 + a_1 v^3 + (4a_0 + a_2)v^2 + (3a_1 + a_3)v + 2(a_0 + a_2) + a_4, \\
\Psi_{(5)}(v) &= a_0 v^5 + a_1 v^4 + (5a_0 + a_2)v^3 + (4a_1 + a_3)v^2 + (5a_0 + 3a_2 + a_4)v + 2(a_1 + a_3) + a_5.
\end{aligned} \tag{12}$$

6. infine, ogni radice $v = v_k$ di $\Psi_{(n)}(v)$ fornisce una coppia di radici *anti-reciproche* dell'Eq. (7) mediante l'inversione dell'Eq. (8),

$$x_{k,\pm} = \frac{v_k \pm (v_k^2 + 4)^{1/2}}{2}.$$

Commento

Il procedimento di ricerca delle radici di polinomi *reciproci* o *anti-reciproci* in \mathcal{C} è, qui, *estendibile formalmente*. Tra l'altro, si ricordi che ogni radice complessa ($x_k \mapsto$) $z_k \equiv a_k + i b_k$ è sempre riscrivibile come $(a_k - i b_k)/(a^2 + b^2)$.

Esercizio 1

Si determinino le radici reali del polinomio

$$A_{(12)}(x) = 8x^{12} - 10x^9 - 19x^6 + 10x^3 + 8,$$

mediante l'Equazione generale (7), le trasformazioni (8), (9.1), (9.2) e le Eq.i (12).

Si *verifichi* che le radici (reali) ottenute costituiscono coppie *anti-reciproche*.

Quindi, si riscriva $A_{(12)}(x)$ nella forma *fattorizzata massimale* in \mathbb{R} . I possibili fattori quadratici trinomiali *irriducibili*, i.e., del tipo $x^2 + p_\nu x + q_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$, con $\Delta_\nu \equiv p_\nu^2 - 4q_\nu < 0$), restano in forma normale non-fattorizzabile.

[*Sugg.:* Conviene incominciare ponendo $t := x^3 \dots$]

■

([†]) Come riferimento, si veda, e.g.,
PICONE, M. - MIRANDA, C., *Esercizi di Analisi Matematica*, p. 17-19, § 37, TUMMINELLI ED. (1957).

Scomposizione additiva razionale di forme razionali

Per ‘forma razionale’, si intende, qui, un’espressione algebrica del tipo $N(x)/D(x)$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi *primi tra loro*, con coefficienti $\in \mathbb{R}$ ($N(x)$ può ridursi a una *costante*).

I. Se $\deg N(x) \geq \deg D(x)$,

allora, o nella forma *generale* o, quando sia appropriato, nella forma *di Ruffini*, è applicabile l’*algoritmo di divisione polinomiale*,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad (1)$$

dove, $Q(x)$ e $R(x)$ indicano, rispettivamente, il polinomio-*quoziente* e il polinomio-*resto* tali che valgano le condizioni simultanee

$$\begin{cases} \deg N(x) = \deg Q(x) + \deg D(x) \\ \deg R(x) < \deg D(x) \leq \deg N(x) \end{cases}. \quad (1.1)$$

La *forma di Ruffini* dell’algoritmo di divisione polinomiale è applicabile, com’è noto, quando $\deg D(x) = 1$. In tal caso, $\deg R(x) = 0$, i.e., $R(x) \equiv R_0$, una *costante*;

II. se $\deg N(x) < \deg D(x)$,

l’Eq. fondamentale (5) dà, formalmente: $Q(x) \equiv 0 \iff N(x) \equiv R(x)$.

Qui, la nozione di *fattorizzazione massimale* polinomiale in \mathbb{R} , specificamente, di $D(x)$, è essenziale.

Sia $\deg D(x) = n$, i.e., in rappresentazione *additiva*, omogenea vs. la somma degli indici (pedici + esponenti),

$$D(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n.$$

Allora, vale la rappresentazione *fattorizzata massimale* associata

$$D(x) = a_0 (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_h)^{m_h} \cdot \downarrow \\ \downarrow \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{\mu_2} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{\mu_k},$$

dove,

$x_1 \in \mathbb{R}$ è una radice di $D(x)$ di molteplicità $m_1 (\geq 1)$,

$x_2 \in \mathbb{R}$ è una radice di $D(x)$, di molteplicità $m_2 (\geq 1)$,

.....

$x_h \in \mathbb{R}$ è una radice di $D(x)$, di molteplicità $m_h (\geq 1)$,

il fattore quadratico $(x^2 + p_1 x + q_1)$, irriducibile in \mathbb{R} (i.e., $\Delta_1 \equiv p_1^2 - 4q_1 < 0$), è di molteplicità $\mu_1 (\geq 1)$,

il fattore quadratico $(x^2 + p_2 x + q_2)$, irriducibile in \mathbb{R} (i.e., $\Delta_2 \equiv p_2^2 - 4q_2 < 0$), è di molteplicità $\mu_2 (\geq 1)$,

.....

il fattore quadratico $(x^2 + p_k x + q_k)$, irriducibile in \mathbb{R} (i.e., $\Delta_k \equiv p_k^2 - 4q_k < 0$), è di molteplicità $\mu_k (\geq 1)$,

così che $m_1 + m_2 + \dots + m_h + 2(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k) = n$.

II.1 Si *costruisce*, pertanto, la scomposizione seguente in somma di frazioni:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\alpha_{11}}{x - x_1} + \frac{\alpha_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \downarrow \\ \downarrow + \frac{\alpha_{21}}{x - x_2} + \frac{\alpha_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_{2m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} + \dots + \downarrow$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow + \frac{\alpha_{h1}}{x - x_h} + \frac{\alpha_{h2}}{(x - x_h)^2} + \dots + \frac{\alpha_{hm_h}}{(x - x_h)^{m_h}} + \downarrow \\
& \downarrow + \frac{\beta_{11}x + \gamma_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{\beta_{12}x + \gamma_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{\beta_{1\mu_1}x + \gamma_{1\mu_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} + \downarrow \\
& \downarrow + \frac{\beta_{21}x + \gamma_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{\beta_{22}x + \gamma_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{\beta_{2\mu_2}x + \gamma_{2\mu_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{\mu_2}} + \downarrow \\
& \downarrow + \dots + \downarrow \\
& \downarrow + \frac{\beta_{k1}x + \gamma_{k1}}{x^2 + p_kx + q_k} + \frac{\beta_{k2}x + \gamma_{k2}}{(x^2 + p_kx + q_k)^2} + \dots + \frac{\beta_{k\mu_k}x + \gamma_{k\mu_k}}{(x^2 + p_kx + q_k)^{\mu_k}}. \quad (2)
\end{aligned}$$

I valori dei parametri $\alpha_{rs}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ sono calcolabili in due passi:

- si determina un'unica frazione parametrica con gli addendi nel membro *destro* dell'Eq. (2). Tale frazione ha, necessariamente, la forma

$$a_0 P(x; \alpha_{rs}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}) / D(x);$$

- si definisce l'identità

$$N(x) := a_0 P(x; \alpha_{rs}, \beta_{ij}, \gamma_{ij})$$

e se ne costruisce il sistema di $h + 2k$ equazioni lineari vs. le $h + 2k$ incognite α_{rs}, β_{ij} e γ_{ij} uguagliando, secondo il *Principio di Identità dei Polinomi*, i coefficienti raccolti delle potenze *identiche* di x presenti in $N(x)$ e in $a_0 P(x; \alpha_{rs}, \beta_{ij}, \gamma_{ij})$.

□

II.2 Il metodo dei residui

II.2.1 Caso di una radice *semplice* di $D(x)$

Sia $\xi \in \mathcal{C}$ una radice *semplice* di $D(x)$. Allora, oltre all'annullamento evidente $D(\xi) \equiv 0$, risulta $D(x) \equiv (x - \xi)Q(x)$. Il fattore $Q(x)$ è il *polinomio-quoziante* della divisione *esatta* $D(x)/(x - \xi)$. Poiché ξ è una radice *semplice* di $D(x)$, segue che $Q(\xi) \neq 0$.

Inoltre, la funzione-*polinomiale* $D: x \mapsto D(x)$ è *intera* in senso complesso, i.e., è *analitica* in tutto \mathcal{C} . Pertanto, considerata la frazione

$$\frac{(x - \xi)N(x)}{D(x)} \equiv \frac{N(x)}{Q(x)}$$

(si ricordi che, qui, $\deg N(x) < \deg D(x)$) e tenendo conto della rappresentazione in somma di fratti nel 2° membro dell'Eq. (2), $\exists!$ il limite (uniforme), per $x \rightarrow \xi$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{(x - \xi)N(x)}{D(x)} &\equiv \left(\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x - \xi}{D(x) - 0} \right) N(\xi) \equiv \left(\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x - \xi}{D(x) - D(\xi)} \right) N(\xi) \\
&= \frac{N(\xi)}{dD(x)/dx|_{x=\xi}} = \alpha_\xi \equiv \frac{N(\xi)}{Q(\xi)}. \quad (3)
\end{aligned}$$

L'uguaglianza (3) è spesso molto conveniente per la determinazione della costante incognita α_ξ . Essa, però, richiede che ξ ($\in \mathcal{C}$) sia una radice *semplice* di $D(x)$.

II.2.2 Caso generale di radici *multiple* di $D(x)$

sia $\xi \in \mathcal{C}$ una radice *multipla* qualsiasi di $D(x)$ e μ_p ($= 1, 2, \dots, r \leq n$) la sua molteplicità. Allora, tenendo presente che $N(x)$ e $D(x)$ sono primi tra loro, che $\deg N(x) < \deg D(x)$ e sfruttando sia la forma additiva *normale* che la forma fattorizzata di $D(x)$, si scrive

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j x^{m-j}}{\sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}} \equiv \frac{\sum_{j=0}^m B_j x^{m-j}}{\prod_{p=1}^r (x - \xi_p)^{\mu_p}},$$

dove, $B_j := b_j/a_0$ e $\sum_{p=1}^r \mu_p = n$. La rappresentazione dell'espansione in frazioni parziali della forma razionale (3.2) è data dalla somma doppia

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{p=1}^r \sum_{k=1}^{\mu_p} \frac{\alpha_{pk}}{(x - \xi_p)^k}$$

e i coefficienti α_{pk} sono esprimibili (per induzione) come

$$\alpha_{pk} = \frac{1}{(\mu_p - k)!} \left(\frac{d^{\mu_p - k}}{dx^{\mu_p - k}} \left((x - \xi_p)^{\mu_p} \frac{N(x)}{D(x)} \right) \right) \Bigg|_{x=\xi_p}. \quad (3.2)$$

I valori dei coefficienti particolari α_{p1} ($p = 1, 2, \dots, r$) sono detti, dall'Analisi in \mathcal{C} , *residui* del rapporto $N(x)/D(x)$ ai *poli* ξ_p . È immediato verificare che $\alpha_{p1} \equiv \alpha_{\xi_p}$ nel caso che le radici di $D(x)$ siano tutte *semplici* (cf/c Eq. (3.1)):

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{p=1}^{r \equiv n} \frac{\alpha_{p1}}{x - \xi_p},$$

per la quale, si ottengono ($p = 1, 2, \dots, r \equiv n$)

$$\alpha_{p1} \equiv \left((x - \xi_p) \frac{N(x)}{D(x)} \right) \Bigg|_{x=\xi_p}. \quad (3.2.1)$$

Le Eq.i (3.2) e (3.2.1) sono utilissime (con l'aiuto di un buon CAS ...) nella semplificazione dell'inversione della *Trasformata di Laplace* di una forma razionale del tipo $N(s)/D(s)$ (nel dominio delle frequenze cicliche $x \mapsto s \equiv \omega$).

□

II.3 La scomposizione HERMITIANA

Equivalente all'Eq. (2), la scomposizione *Hermitiana* (Hermite, Charles, 1822-1901),

$$\frac{N(x)}{D(x)} = A(x) + \frac{d}{dx} \left(\frac{H(x)}{G(x)} \right), \quad (4)$$

mostra una struttura molto compatta. In essa, gli elementi generatori sono:

- $A(x) := \frac{\alpha_1}{x-x_1} + \frac{\alpha_2}{x-x_2} + \dots + \frac{\alpha_h}{x-x_h} + \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{\beta_2 x + \gamma_2}{x^2 + p_2 x + q_2} + \dots + \frac{\beta_k x + \gamma_k}{x^2 + p_k x + q_k},$
- $G(x) := (x-x_1)^{m_1-1} (x-x_2)^{m_2-1} \dots (x-x_h)^{m_h-1} \downarrow$
 $\quad \quad \quad \downarrow (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1-1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{\mu_2-1} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{\mu_k-1},$

$$\text{con } \deg G(x) = \sum_{j=1}^h (m_j - 1) + 2 \sum_{r=1}^k (\mu_r - 1) \equiv n - h - 2k + 1 \quad (\{m_j, \mu_r\} \subset \mathbb{Z}^+),$$

- $H(x)$ è un polinomio di grado, *al più*, $\deg G(x) - 1 \equiv n - h - 2k$ a coefficienti *incogniti*. Quindi, tenendo conto che $n = \deg D(x)$, i coefficienti η_j di $H(x)$ *non-nulli* sono in numero, *al più*, $n - h - 2k$.

Eseguita la derivazione nell'Eq. (4), si eliminano i denominatori e si uguagliano i coefficienti delle potenze *identiche* di x presenti nei due i membri (*Principio di Identità dei Polinomi*). La soluzione del sistema lineare ottenuto, i.e., il *vettore* dei valori trovati delle incognite α_r , β_s , γ_s e η_j consente di esplicitare la scomposizione (4). ■

Allineamento di tre punti su una retta

La rappresentazione della retta passante per i due punti, $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\equiv m), \quad (1)$$

è costruita sulla struttura del *coefficiente angolare* m . Formalmente, $(x_1; y_1)$ rappresenta il punto di **riferimento iniziale** o **pivot**, quello *rispetto al quale* si misurano la variazione di $(x_2; y_2)$ e quella di un *qualsiasi* altro punto $(x; y)$ sulla retta.

Riscrivendo l'Eq. (1) nella forma equivalente del *T-rapporto* (\therefore Talete), t , rappresentazione cartesiana del *Teorema di Talete* applicato alle rette *incidenti* ortogonalmente X e Y del sistema di riferimento cartesiano,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} := t, \quad (2)$$

si esprime la *condizione di allineamento* di un punto $(x; y)$ **qualsiasi** con due punti assegnati, $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, dei quali, $(x_1; y_1)$ viene scelto come punto di **riferimento** (punto iniziale). Infatti, dall'Eq. (2), si scrivono le relazioni di proporzionalità

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \end{cases}, \quad (3)$$

dalle quali, seguono le uguaglianze

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}. \quad (3.1)$$

Dunque, il punto $(x; y)$ è **univocamente** determinato sulla retta passante per i punti, $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ una volta che sia stato assegnato il valore del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Ora, sia $\|\mathbf{r}\| \equiv r := ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{1/2}$. Sempre per il *Teorema di Talete*, il Sistema (3) di equazioni corrisponde all'equazione sintetica

$$r = r_1 + t(r_2 - r_1), \quad (4)$$

con $r_1 := (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$ e $r_2 := (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}$ distanze (norme) dall'origine del sistema di riferimento.

L'Eq. (4) è l'equivalente scalare dell'equazione vettoriale *t-parametrica* della retta in \mathbb{R}^n

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (5)$$

□

Il problema dell'allineamento di tre punti *distinti* su una retta, i.e., quello dell'appartenenza di un punto alla retta definita dagli altri due, può essere affrontato in modo equivalente ricordando che per tre punti distinti non allineati passa *una e una sola* circonferenza e, quindi, che per tre punti distinti allineati non ne passa alcuna. Infatti, in tale circostanza, le coordinate di tre punti distinti allineati assegnati, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ e $(x_3; y_3)$, non possono soddisfare l'equazione di una circonferenza generica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ *simultaneamente*. In altri termini, il sistema lineare che deve

esprimere le tre condizioni di appartenenza *geometrica*,

$$\begin{cases} x_1 a + y_1 b + c = -x_1^2 - y_1^2 \\ x_2 a + y_2 b + c = -x_2^2 - y_2^2 \\ x_3 a + y_3 b + c = -x_3^2 - y_3^2 \end{cases}, \quad (6)$$

ha il determinante della matrice dei coefficienti a , b e c **nullo**,

$$\det \mathbf{A} \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

i.e., il sistema (6) *non ha* soluzione.

Imponendo la condizione (7) e sviluppando $\det \mathbf{A}$ rispetto alla sua terza colonna, si ha

$$\begin{aligned} 0 \equiv \det \mathbf{A} &= 1 \cdot (x_2 y_3 - x_3 y_2) - 1 \cdot (x_1 y_3 - x_3 y_1) + 1 \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &\equiv x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + \underbrace{x_1 y_1 - x_1 y_1}_{\equiv 0} \end{aligned}$$

avendo sommato il termine *nullo* costruito come *auto-differenza* del prodotto tra le coordinate miste del punto *scelto* come pivot, i.e., $(x_1; y_1)$,

$$= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \equiv \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Dall'Eq. (8), segue immediatamente l'uguaglianza

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1},$$

i.e., l'Eq. (2) (o l'Eq. (1)) quando si identifichi $(x_3; y_3) \equiv (x; y)$.

Infine, se, da un lato, le Eq. (7) e (8) rappresentano la condizione di allineamento di tre punti distinti, dall'altro, la sostituzione $(x_3; y_3) \equiv (x; y)$ in esse genera l'equazione della retta passante per due punti $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ assegnati, in due rappresentazioni *determinantali* equivalenti,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

■■■

Equazioni delle rette tangenti comuni a due circonferenze distinte

Dalle equazioni *note* di due circonferenze *distinte*,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 &= 0\end{aligned}$$

si determinano, rispettivamente, le coordinate $(x_1; y_1) \equiv C_1$ e $(x_2; y_2) \equiv C_2$ dei centri e le misure r_1 e r_2 dei raggi. Con verifiche grafiche elementari (v. p. 19), è facile rendersi conto che, nel piano reale $X \times Y$, le determinazioni delle rette tangenti comuni alle due circonferenze (distinte) sono o 2 o 4, con la possibilità di 2 rette *coincidenti* nel caso di circonferenze *tangenti*.

Sia $y = mx + q$ l'equazione esplicita della retta tangente *generica*, i.e., per la quale, m e q sono parametri *incogniti*. Dalla formula della distanza di un punto (l'uno o l'altro centro) da una retta di tangenza comune, si costruisce il sistema

$$\begin{cases} \frac{|mx_1 + q - y_1|}{(m^2 + 1)^{1/2}} = r_1 \\ \frac{|mx_2 + q - y_2|}{(m^2 + 1)^{1/2}} = r_2 \end{cases},$$

ovvero, vs. m e q *incogniti*,

$$\begin{cases} |x_1m + q - y_1| = r_1(m^2 + 1)^{1/2} & (1) \\ |x_2m + q - y_2| = r_2(m^2 + 1)^{1/2} & (2) \end{cases}$$

Quindi, si dividano membro-a-membro le Eq. (1) e (2) e si eliminino i denominatori, determinando l'equazione modulare sintetica

$$r_2|x_1m + q - y_1| = r_1|x_2m + q - y_2|, \quad (3)$$

L'Eq. (3) equivale alla coppia di equazioni *alternative*

$$r_2(x_1m + q - y_1) = \pm r_1(x_2m + q - y_2), \quad (4)$$

i.e., dopo qualche semplificazione, alle m, q -equazioni *lineari parametriche* distinte

$$(r_1x_2 - r_2x_1)m = (r_2 - r_1)q - r_2y_1 + r_1y_2, \quad (5)$$

$$(r_1x_2 + r_2x_1)m = -(r_1 + r_2)q + r_1y_2 + r_2y_1. \quad (6)$$

1. Sia $r_1 \equiv r_2 = r$.

Le Eq. (5) e (6) si riducono alle forme

$$(x_2 - x_1)m = y_2 - y_1,$$

$$(x_1 + x_2)m = -2q + y_1 + y_2,$$

i.e.,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (7)$$

e, rispettivamente,

$$m = -\frac{2q - y_2 - y_1}{x_2 + x_1} . \quad (8)$$

Elevando al quadrato le Eq. (1) e (2), sostituendo le espressioni (7) nell'Eq. (1) e (8) nell'Eq. (2), si ricavano i valori di q : q_α e q_β (associati specificamente al coefficiente angolare (7) (rette parallele!)) e q_γ e q_δ , da sostituire nell'Eq. (8) per determinare i coefficienti angolari m_γ e m_δ ;

2. sia $r_1 \neq r_2$.

Si procede in modo analogo al caso precedente, esplicitando il parametro *incognito* m dalle Eq. (5) e (6), ordinatamente:

$$m = \frac{(r_2 - r_1)q - r_2 y_1 + r_1 y_2}{r_1 x_2 - r_2 x_1} , \quad (9)$$

$$m = -\frac{(r_1 + r_2)q - r_1 y_2 - r_2 y_1}{r_1 x_2 + r_2 x_1} . \quad (10)$$

Ora, sostituendo l'espressione (9) di m nell'Eq. (1) e *quadrando* l'uguaglianza ottenuta, si trovano q_α e q_β , che, introdotti nell'Eq. (9), forniscono i coefficienti angolari m_α e m_β .

In modo identico, sostituendo l'espressione (10) di m nell'Eq. (2) e *quadrando* l'uguaglianza ottenuta, si determinano q_γ e q_δ e, i quali, introdotti a loro volta nell'Eq. (10), forniscono i coefficienti angolari m_γ e m_δ .

■

Le equazioni generali della retta e del piano in rappresentazione NORMALE

- I. Siano $H \equiv (x_0; y_0) \neq (0; 0)$ e $P \equiv (x; y)$, un punto *fissato* e un punto *variabile* di una retta σ . Inoltre, sia il vettore $(H - O) \perp \sigma$ uscente dall'origine O del sistema di riferimento e sia φ l'ampiezza dell'angolo *polare* che esso forma *anti-orariamente* vs. la semiretta φ . Al variare di P su σ , l'equazione cartesiana di σ è deducibile dal prodotto scalare *nullo*

$$(P - H) \cdot (H - O) \equiv 0,$$

i.e., esplicitando mediante le coordinate,

$$\begin{aligned} 0 &= ((x - x_0)\hat{x} + (y - y_0)\hat{y}) \cdot (x_0\hat{x} + y_0\hat{y}) \\ &= (x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0. \end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene

$$x_0x + y_0y - (x_0^2 + y_0^2) = 0. \quad (1)$$

Se si moltiplicano i membri dell'Eq. (1) per una costante *arbitraria* $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si determina la forma generale *implicita* solita

$$ax + by + c = 0,$$

dove, $a := \eta x_0$, $b := \eta y_0$, $c := -\eta(x_0^2 + y_0^2)$. Vale l'*ortogonalità* evidente nel punto $(a; b)$:

$$(a; b) \equiv (a\hat{x} + b\hat{y}) \perp \sigma.$$

Ora, poiché $x_0^2 + y_0^2 \equiv \|H - O\|^2 := \nu^2 \neq 0$, l'Eq. (1) è riscrivibile come

$$\frac{x_0}{\|H - O\|} x + \frac{y_0}{\|H - O\|} y - \|H - O\| = 0,$$

i.e., con identificazioni ovvie,

$$(\cos \varphi)x + (\sin \varphi)y - |\nu| = 0. \quad (2)$$

L'Eq. (2) è la rappresentazione *normale* della retta σ ; i parametri $\cos \varphi$ e $\cos \psi := \sin \varphi$, con $\psi := \pi/2 - \varphi$, ne sono i *coseni direttori* vs. il sistema di riferimento $X \times Y$. ■

- II. Siano $H \equiv (x_0; y_0; z_0) \neq (0; 0; 0)$ e $P \equiv (x; y; z)$ un punto *fissato* e un punto *variabile* di un piano Σ . Inoltre, sia il vettore $(H - O) \perp \Sigma$ uscente dall'origine O del sistema cartesiano di riferimento $X \times Y \times Z$.

Al variare di P su Σ , l'equazione cartesiana di Σ è deducibile dal prodotto scalare *nullo*

$$(P - H) \cdot (H - O) \equiv 0,$$

i.e., esplicitando mediante le coordinate,

$$\begin{aligned} 0 &= ((x - x_0)\hat{x} + (y - y_0)\hat{y} + (z - z_0)\hat{z}) \cdot (x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}) \\ &= (x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0 + (z - z_0)z_0. \end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene

$$x_0x + y_0y + z_0z - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0. \quad (3)$$

Se si moltiplicano i membri dell'Eq. (3) per una costante *arbitraria* $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si determina la forma generale *implicita* solita

$$ax + by + cz + k = 0,$$

dove $a := \mu x_0$, $b := \mu y_0$, $c := \mu z_0$, $k := -\mu(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$.

Ora, poiché $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \equiv \|H - O\|^2 := \lambda^2 \neq 0$, l'Eq. (3) è riscrivibile come

$$\frac{x_0}{\|H - O\|}x + \frac{y_0}{\|H - O\|}y + \frac{z_0}{\|H - O\|}z - \|H - O\| = 0,$$

i.e., con identificazioni evidenti dei *coseni direttori* nello spazio 3-dim,

$$(\cos \alpha_x)x + (\cos \alpha_y)y + (\cos \alpha_z)z - |\lambda| = 0. \quad (4)$$

L'Eq. (4) costituisce la rappresentazione *normale* del piano Σ .

■■■

Bisettrici

A. Equazione della retta bisettrice di un angolo piano convesso

La ricerca delle equazioni delle *due* rette **bisettrici** degli angoli *supplementari* determinati dalle rette di equazioni rispettive assegnate $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, conduce alle uguaglianze implicite note

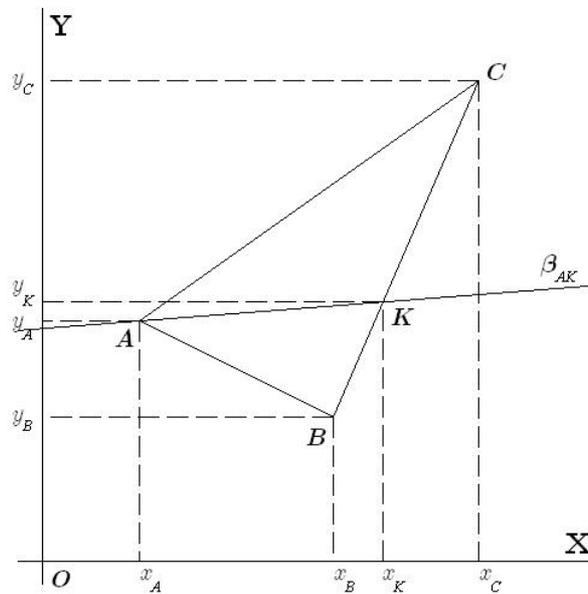
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{(a_1^2 + b_1^2)^{1/2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{(a_2^2 + b_2^2)^{1/2}}, \quad (1)$$

corrispondenti, raccolti i termini vs. le variabili x e y , a rette bisettrici mutuamente *ortogonali*.

Se è richiesta l'equazione della retta bisettrice $\beta_{1,2}$ di un angolo piano **convesso** $\sphericalangle(r_1, r_2)$, determinato dalle rette r_1 e r_2 (e.g., deve essere chiaro, graficamente, se $\sphericalangle(r_1, r_2)$ indica un angolo *interno* di un poligono o il suo *supplementare esterno*), l'ambiguità presente nell'Eq. (1) può essere risolta nel modo seguente:

si consideri una coppia di segmenti consecutivi, della quale, siano note le coordinate $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ e $(x_C; y_C)$, rispettivamente, del vertice comune, A , e degli altri due estremi, B e C , si può seguire un procedimento basato sul *Teorema della bisettrice* e sul *Teorema di Talete* (dal quale, il primo è dedotto).

Volendo determinare, e.g., l'equazione della bisettrice β_{AK} del triangolo ABC (v. figura),



si osserva che, il *Teorema della bisettrice* e la conoscenza delle coordinate dei vertici, forniscono prontamente il valore $\rho \in \mathbb{R}^+$ del rapporto tra le misure dei segmenti KB e CK ,

$$\rho = \frac{\overline{KB}}{\overline{CK}} \equiv \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \left(\frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

D'altra parte, applicando il *Teorema di Talete* alle coppie di rette mutuamente sghembe $\{r_{BC}, X\}$ e $\{r_{BC}, Y\}$ e, poi, da queste, transitivamente, alla coppia $\{X, Y\}$ stessa degli assi del riferimento

cartesiano, è anche evidente (*bi-sezione di un segmento secondo un rapporto ρ assegnato tra le lunghezze delle sue due parti*) che, relativamente al lato BC , risulta

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{CK}} \equiv \rho = \frac{x_K - x_B}{x_C - x_K} = \frac{y_K - y_B}{y_C - y_K}. \quad (3)$$

Si noti che sia i punti B , K e C , sia le loro coordinate rispettive vanno presi **ordinatamente**, i.e., nello **stesso verso** vettoriale ($B \rightarrow C \simeq C \rightarrow B$) sulla retta r_{BC} .

Le coordinate *incognite* di $K \equiv \beta_{AK} \cap r_{BC}$ si calcolano dalle uguaglianze (3), ottenendo

$$(x_K; y_K) \equiv \left(\frac{\rho x_C + x_B}{\rho + 1}; \frac{\rho y_C + y_B}{\rho + 1} \right). \quad (4)$$

Infine, mediante i valori x_K e y_K , si scrivono l'equazione di β_{AK} e la lunghezza del segmento-bisettrice AK , interno al triangolo ABC :

$$\beta_{AK}: \frac{y - y_A}{x - x_A} \equiv m_{AK} \equiv \frac{y_K - y_A}{x_K - x_A} = \frac{\rho(y_C - y_A) + y_B - y_A}{\rho(x_C - x_A) + x_B - x_A}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{AK} &= ((x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2)^{1/2} \\ &= \frac{((\rho(x_A - x_C) + x_A - x_B)^2 + (\rho(y_A - y_C) + y_A - y_B)^2)^{1/2}}{\rho + 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

L'equazione della retta associata $\beta_{AK}^\perp (\perp \beta_{AK})$, bisettrice dell'angolo *supplementare* dell'angolo $\hat{C}AB$ (v. Eq. (1)), è generabile direttamente dall'Eq. (5),

$$\beta_{AK}^\perp: \frac{y - y_A}{x - x_A} = -\frac{1}{m_{AK}}. \quad (7)$$

□

B. Equazioni delle rette bisettrici in forma esplicita tra due rette sghembe assegnate

Con le sostituzioni convenzionali, valide per $b_\nu \neq 0$, $\nu = 1, 2$,

$$\begin{cases} m_\nu := -a_\nu/b_\nu \\ q_\nu := -c_\nu/b_\nu \end{cases}, \quad (8)$$

le Eq.i (1) assumono le forme alternative, un po' più maneggevoli,

$$\frac{y - m_1 x - q_1}{(1 + m_1^2)^{1/2}} = \pm \frac{y - m_2 x - q_2}{(1 + m_2^2)^{1/2}} \quad (9)$$

e, quindi, la coppia di rette *distinte*

$$(1 + m_2^2)^{1/2}(y - m_1 x + q_1) = \pm (1 + m_1^2)^{1/2}(y - m_2 x - q_2).$$

Il completamento dei calcoli dà,

$$y = \frac{m_1(1 + m_2^2)^{1/2} \pm m_2(1 + m_1^2)^{1/2}}{(1 + m_2^2)^{1/2} \pm (1 + m_1^2)^{1/2}} x + \frac{q_1(1 + m_2^2)^{1/2} \pm q_2(1 + m_1^2)^{1/2}}{(1 + m_2^2)^{1/2} \pm (1 + m_1^2)^{1/2}}; \quad (10)$$

la condizione di *ortogonalità* tra queste,

$$\frac{m_1(1+m_2^2)^{1/2} + m_2(1+m_1^2)^{1/2}}{(1+m_2^2)^{1/2} + (1+m_1^2)^{1/2}} \frac{m_1(1+m_2^2)^{1/2} - m_2(1+m_1^2)^{1/2}}{(1+m_2^2)^{1/2} - (1+m_1^2)^{1/2}} \equiv -1, \quad (11)$$

è verificabile elementarmente. □

C. Un problema correlato di allineamento

Siano ξ_0, ξ_1 e ξ_2 tre coordinate generiche, allineate *arbitrariamente* su una retta. Delle tre, sia ξ_0 la coordinata scelta come *riferimento* (\sim origine) vs. le altre due. Inoltre, sia *definito* il rapporto $\rho \in \mathbb{R}$ nelle due forme equivalenti

$$\rho := \frac{\xi_2 - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \equiv \frac{\xi_0 - \xi_2}{\xi_0 - \xi_1}. \quad (8)$$

Dall'Eq. (8), ξ_1 e ξ_2 sono esplicitabili formalmente e univocamente, risultando

$$\xi_1 = (1/\rho)\xi_2 + (1-1/\rho)\xi_0, \quad (9)$$

$$\xi_2 = \rho\xi_1 + (1-\rho)\xi_0. \quad (10)$$

Analogamente, siano $\bar{\xi}_1$ e $\bar{\xi}_2$ due altre coordinate sulla *stessa* retta, tali che valga lo *stesso* rapporto ρ definito, vs. la *stessa* coordinata di riferimento ξ_0 precedente, da

$$\rho := \frac{\bar{\xi}_2 - \xi_0}{\xi_0 - \bar{\xi}_1} \equiv \frac{\xi_0 - \bar{\xi}_2}{\bar{\xi}_1 - \xi_0}. \quad (11)$$

Allora, a sua volta, l'Eq. (11) fornisce le rappresentazioni formali esplicite e univoche

$$\bar{\xi}_1 = -(1/\rho)\bar{\xi}_2 + (1+1/\rho)\xi_0, \quad (12)$$

$$\bar{\xi}_2 = -\rho\bar{\xi}_1 + (1+\rho)\xi_0. \quad (13)$$

Proposizione

Le coordinate $\bar{\xi}_1$ e $\bar{\xi}_2$ sono *simmetriche*, vs. ξ_0 , a ξ_1 e a ξ_2 , ordinatamente.

La verifica è immediata. Infatti, si ha

$$\xi_1 + \bar{\xi}_1 \equiv \xi_2 + \bar{\xi}_2 = \xi_0, \quad (14)$$

che rappresenta la *contrazione* di $\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2$ e $\bar{\xi}_2$ alla coordinata di riferimento ξ_0 .

Si osservi che le Eq. (8), (9) e (10) si riducono, rispettivamente, alle Eq. (11), (12) e (13) mediante la *riflessione* $\rho \rightleftharpoons -\rho$. ▲ ■■■

Esponenziamenti razionali (radicali) in \mathbb{R}

Sia $\beta \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}_0^+$. Il significato *iterativo* naturale della scrittura β^k è ben noto:

$$\beta^k := \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta}_{k \text{ volte}}.$$

Tale definizione si estende prontamente al caso in cui è $\beta \neq 0 \wedge k \mapsto -k$ ($\in \mathbb{Z}^-$). Si ha

$$\beta^{-k} \equiv (\beta^k)^{-1} = \frac{1}{\beta^k} \equiv \frac{1}{\underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta}_{k \text{ fattori}}} \equiv \underbrace{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\beta}}_{k \text{ fattori}} = (\beta^{-1})^k.$$

Pertanto, è sufficiente considerare solo il caso in cui è $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Ora, si può dare un significato alla scrittura, con esponente $1/k \in \mathbb{Q}^+$,

$$\beta^{1/k},$$

cercando di *mantenere valide il più possibile* le varie proprietà elementari delle potenze? Se la risposta è affermativa, allora, assegnata, e.g., la quantità $\beta^{1/5}$, segue, e.g., che

$$\beta^{1/5} \cdot \beta^{1/5} \cdot \beta^{1/5} \cdot \beta^{1/5} \cdot \beta^{1/5} \equiv \beta^{1/5+1/5+1/5+1/5+1/5} = \beta^1 \equiv \beta,$$

i.e., che $\beta^{1/5} \in \mathbb{R}$ è quel numero – che si richiede sia

unico, per necessità di *chiusura* e di *invertibilità operativa* in \mathbb{R} –

tale che, moltiplicato per sé stesso 5 volte, dia β come risultato.

Inoltre, estendendo lo schema precedente di potenza con esponente in \mathbb{Q}^+ , si può assumere che sia

$$\beta^{5/3} = \beta^{1/3+1/3+1/3+1/3+1/3} \equiv \beta^{1/3} \cdot \beta^{1/3} \cdot \beta^{1/3} \cdot \beta^{1/3} \cdot \beta^{1/3} = (\beta^{1/3})^5.$$

Poi, richiedendo che la proprietà *commutativa* vs. il *prodotto* valga per *qualsiasi* fattorizzazione dell'esponente, sembra corretto concludere che le identità

$$\beta^{5/3} \equiv \beta^{5 \cdot (1/3)} \equiv \beta^{(1/3) \cdot 5}$$

legittimino l'estrapolazione della proprietà di *potenza-di-potenza*

$$\beta^{5/3} \equiv (\beta^{1/3})^5 \equiv (\beta^5)^{1/3}.$$

□

Terminologia: Il *numeratore* 5 nell'esponente (razionale) della potenza $\beta^{5/3}$ costituisce l'**indice iterativo** mentre il *denominatore* 3 è detto **indice radicale**.

□

Però, da un controllo attento di casi realizzabili, ci si rende conto immediatamente che lo schema proposto per l'estensione da \mathbb{Z} a \mathbb{Q} dell'insieme numerico di appartenenza dell'esponente in una potenza risulta non solo semplicistico ma anche seriamente *inconsistente*.

Infatti, se $\beta \in \mathbb{R}^-$, la congettura precedente implica l'*esistenza* e l'*unicità*, $\exists!$, di β tale che

$$\exists! \beta^{1/4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta^{1/4} \cdot \beta^{1/4} \cdot \beta^{1/4} \cdot \beta^{1/4} \equiv \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Infatti, *quale che sia* il segno di $\beta^{1/4}$, il prodotto di $\beta^{1/4}$ per sé stesso un numero *pari* di volte deve fornire $\beta > 0$ come risultato, *contro l'ipotesi* che sia $\beta \in \mathbb{R}^-$.

Inversamente, se si vuole conservare il *carattere iterativo* primitivo di potenza, sia pure in senso generalizzato, allora, si è costretti ad ammettere che $\beta^{1/4}$ non è negativo né positivo *ma di tutt'altra natura*, in altre parole, che $\beta^{1/4} \notin \mathbb{R}$.

Allo stesso modo, se $\beta \in \mathbb{R}^- \wedge \beta^{1/8} \notin \mathbb{R}$, anche la catena relazionale

$$0 > \beta^5 \equiv \beta^{40/8} \equiv (\beta^{40})^{1/8} \equiv (\beta^{1/8})^{40}$$

risulta *inconsistente*. Infatti, poiché è $\beta^5 < 0$, è *assurdo* che sia, al tempo stesso, $(\beta^{1/8})^{40} > 0$, trattandosi, questo, di una potenza *pari* del numero $\beta^{1/8} \notin \mathbb{R}$.

Quindi, appare evidente che il problema dell'ampliamento da \mathbb{Z} a \mathbb{Q} dell'insieme numerico di appartenenza dell'esponente di una base $\beta \in \mathbb{R}$ e il *mantenimento simultaneo* delle stesse proprietà generali delle potenze *interne* richiedono un approccio completamente differente e, inevitabilmente, più *sofisticato* e *stringente*.

Un'impostazione completamente risolutiva utilizza il concetto operativo di **Valore Assoluto**. □

Tenendo sempre ben presenti gli esempi critici discussi sopra e la necessità *cruciale* di cautela e di controllo – passo per passo – della coerenza interna dell'operazione di elevamento-a-potenza con esponente $\in \mathbb{Q}$, si definisca l'*Operatore Radicale* (o di *Esponenziamento Razionale*) in \mathbb{R} ,

$$\sqrt[k]{\dots} := (\dots)^{1/k}, \quad (1)$$

dove, si assume, *momentaneamente*, $k \in \mathbb{Z}^+$. Come qualsiasi altro operatore funzionale (e.g., \ln , \tan , etc.), esso *non possiede* segno intrinseco. Pertanto, si introduce l'

Assioma

L'espressione matematica, di natura qualsiasi, in *rappresentazione radicale di indice k* , chiamata, brevemente, *radicale k -esimo*,

$$\sqrt[k]{\Omega} \equiv \Omega^{1/k}, \quad (2)$$

è definita in \mathbb{R} sse è verificata l'**una o** (\vee , esclusivo) l'**altra** coppia di condizioni simultanee

$$\bullet \quad k = 2n + 1 \in \mathbb{Z}^+ \wedge \Omega \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$\bullet \quad k = 2n \in \mathbb{Z}^+ \wedge \Omega \in \mathbb{R}^+. \quad (3.2)$$

Per definizione, il valore di $\sqrt[k]{\Omega} \equiv \Omega^{1/k} \in \mathbb{R}$, costante o variabile, è **unico** e il suo segno è *lo stesso* dell'operando Ω , detto *radicando* (o *argomento* del radicale k -esimo). **▲** □

Il problema più generale dell'operazione di *elevamento-a-potenza* – o *esponenziamento* – che ammetta anche esponenti $\notin \mathbb{Z}$ *preservando le proprietà aritmetiche elementari delle potenze*, porta, nel caso dei *radicali* (propri) in \mathbb{R} (i.e., delle potenze con esponenti $\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$), alle prescrizioni operative *assiomatiche sufficienti* seguenti:

$$1. \quad \text{se } \exists! \sqrt[k]{\Omega} \in \mathbb{R} \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[k]{\Omega}} \equiv \Omega^{-1/k}; \quad (4)$$

$$2. \quad \text{se } \exists! \sqrt[k]{MN} \in \mathbb{R} \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\sqrt[k]{MN} = \begin{cases} \sqrt[k]{M} \sqrt[k]{N} \equiv M^{1/k} N^{1/k} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{dispari}, \\ \sqrt[k]{|M|} \sqrt[k]{|N|} \equiv |M|^{1/k} |N|^{1/k} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{pari}; \end{cases} \quad (5)$$

$$3. \quad \text{se } \exists! \sqrt[pq]{M^q N^p} \in \mathbb{R} \wedge \forall \{p, q\} \subset \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\sqrt[pq]{M^q N^p} = \begin{cases} \sqrt[p]{M} \sqrt[q]{N} \equiv M^{1/p} N^{1/q} & , \text{ se } p \wedge q \text{ sono } \mathbf{dispari}, \\ \sqrt[p]{|M|} \sqrt[q]{|N|} \equiv |M|^{1/p} |N|^{1/q} & , \text{ se } p \vee q \text{ è } \mathbf{pari}. \end{cases} \quad (6)$$

La combinazione dell'identità (2) con le regole operative 1, 2 e 3, assunte come *fondamentali*, genera necessariamente la regola operativa

$$4. \quad \text{se } \exists! \sqrt[k]{\Omega^n} \in \mathbb{R} \wedge \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\sqrt[k]{\Omega^n} = \begin{cases} (\sqrt[k]{\Omega})^n \equiv \Omega^{n/k} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{dispari}, \\ (\sqrt[k]{|\Omega|})^n \equiv |\Omega|^{n/k} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{pari}. \end{cases} \quad (7)$$

La regola operativa 4 costituisce un'estensione della definizione operatoriale (1). Regole operative ulteriori risultano essere, coerentemente,

$$5. \quad \text{se } \exists! \sqrt[kn]{\Omega^k} \in \mathbb{R} \wedge \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\sqrt[kn]{\Omega^k} \equiv \sqrt[n]{\sqrt[k]{\Omega^k}} = \begin{cases} \sqrt[n]{\Omega} \equiv \Omega^{1/n} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{dispari}, \\ \sqrt[n]{|\Omega|} \equiv |\Omega|^{1/n} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{pari}. \end{cases} \quad (8)$$

$$6. \quad \text{se } \exists! M \sqrt[k]{N} \in \mathbb{R} \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$M \sqrt[k]{N} \equiv M N^{1/k} = \begin{cases} \sqrt[k]{M^k N} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{dispari}, \\ \pm \sqrt[k]{M^k N} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{pari} \wedge M \geq 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$7. \quad \text{se } \exists! \sqrt[k]{M/N} \in \mathbb{R} \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\sqrt[k]{M/N} = \begin{cases} \sqrt[k]{M} / \sqrt[k]{N} \equiv M^{1/k} N^{-1/k} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{dispari}, \\ \sqrt[k]{|M|} / \sqrt[k]{|N|} \equiv |M|^{1/k} |N|^{-1/k} & , \text{ se } k \text{ è } \mathbf{pari}; \end{cases} \quad (10)$$

$$8. \quad \text{se } \exists! \sqrt[pq]{M^q/N^p} \in \mathbb{R} \wedge \forall \{p, q\} \subset \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\sqrt[pq]{M^q/N^p} = \begin{cases} \sqrt[p]{M} / \sqrt[q]{N} \equiv M^{1/p} N^{-1/q} & , \text{ se } p \wedge q \text{ sono } \mathbf{dispari}, \\ \sqrt[p]{|M|} / \sqrt[q]{|N|} \equiv |M|^{1/p} |N|^{-1/q} & , \text{ se } p \vee q \text{ è } \mathbf{pari}. \end{cases} \quad (11)$$

Pertanto, la distinzione tuttora persistente, tra radicali *aritmetici* (o *assoluti*) e *algebrici* in \mathbb{R} risulta del tutto artificiosa e superflua rispetto a un impiego *appropriato* dell'operatore Valore Assoluto, $|\dots|$, più coerente con l'impianto generale dell'Analisi Matematica, su cui è basata la struttura di *tutti* i programmi di calcolo.

*I radicali in \mathbb{R} sono definiti **assiomaticamente** e **univocamente** dall'identità (2), dalle coppie di condizioni simultanee (3.1) o (3.2) e dalle regole operative sufficienti 1, ..., 8.*

□

Si noti che la scrittura $\sqrt[n]{Z}$ è *inconsistente* in \mathbb{C} poiché essa *non individua* alcuno degli n valori ζ_j , generalmente *distinti*, tali che $\zeta_j^n \equiv Z$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pertanto, considerata l'equazione algebrica di 2° grado, con $\{z, a, b, c\} \subset \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = 0, \quad (11)$$

con il simbolo $\Delta^{1/2}$ nella formula risolvante $z := (-b \pm \Delta^{1/2})/(2a)$, va inteso, per il *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, **l'uno** o ($\underline{\vee}$, esclusivo!) **l'altro** dei numeri complessi *opposti*, il quadrato di *ciascuno* dei quali vale Δ . Come caso particolare, quando $\Delta < 0$, si definisce, *per convenzione*, $\Delta^{1/2} := i|\Delta|^{1/2}$, benché la scelta opposta $\Delta^{1/2} := -i|\Delta|^{1/2}$ sia ugualmente accettabile, fornendo le *stesse* radici dell'Eq. (11).

Osservazione 4

L'operazione di *estrazione di radice* appare, a chi scrive, un reperto scolastico francamente datato e di significato intuitivo e pedagogico inadeguato quando ci si proponga di affrontare rigorosamente il problema dell'*ampliamento a \mathbb{Q} dell'insieme numerico di appartenenza degli esponenti*, cercando di evitare *ab initio*, in un'ottica consapevolmente rivolta all'Analisi, *pregiudizi fuorvianti e persistenti*.

Il processo radicale classico, ricondotto alla forma dell'*esponenziamento razionale in \mathbb{R}* , richiede la sola distinzione operativa di *parità vs. disparità* del **denominatore** dell'esponente razionale.

□

La generalizzazione assiomatica in \mathbb{R} dell'operazione di *esponenziamento*, o di *elevamento-a-potenza*, fondata sulla *appartenenza numerica* dell'esponente, sembra essere l'approccio *preferibile e più diretto* per il superamento dello schema riduttivo di *iterazione moltiplicativa naturale*. Essa spiana la strada all'estensione del concetto profondo di *potenza in \mathbb{R}^+ con esponente $\in \mathbb{R}$* , definibile dalla *contiguità* di due \mathcal{D} -successioni (\therefore DEDEKIND, J. W. R., 1831-1916) opportune di numeri *reali* (razionali o irrazionali!) e, pertanto, contestualizzata nella *continuità uniforme* di \mathbb{R} (l'esempio estremo è costituito dalla forma esponenziale *variabile* $(f(x))^{g(x)}$, nella quale, può essere, *al più*, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^+$ e $g(x) \in \mathbb{R}$).

□

Un richiamo sintetico ai risultati dell'*esponenziamento generale in \mathbb{C}* è presentato nel math-notebook: *Logaritmi in \mathbb{R} e in \mathbb{C} \setminus Funzioni Integrali Logaritmiche Speciali*, p. 5.

■■■

Forme Radicali Doppie in \mathbb{R}

Estendendo l'espressione *radicale doppia numerica* $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$ al regime di variabilità continua, le *Forme Radicali Doppie*

$$\sigma_{\pm}(x) := \sqrt{f(x) \pm \sqrt{g(x)}} \quad (1)$$

risultano scomponibili, sotto condizioni di esistenza in \mathbb{R} specifiche ([†]), nelle rappresentazioni additive equivalenti rispettive – peraltro, *non sempre* semplificatrici –

$$\sqrt{f(x) \pm \sqrt{g(x)}} \equiv \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{f(x) + \sqrt{(f(x))^2 - g(x)}} \pm \sqrt{f(x) - \sqrt{(f(x))^2 - g(x)}} \right). \quad (1.1)$$

La verifica delle identità (1.1) si esegue confrontando i quadrati delle espressioni nei due membri, relativamente al dominio \mathcal{D}_+ ($\subseteq \mathbb{R}$), per σ_+ , e al dominio \mathcal{D}_- ($\subseteq \mathbb{R}$), per σ_- . Chiaramente, la convenienza delle identità (1.1) dipende unicamente dall'essere $(f(x))^2 - g(x)$ riducibile, o no, a un *quadrato formale perfetto*.

Pertanto, il problema principale è ricondotto alla determinazione dei domini \mathcal{D}_{\pm} . La discussione algebrica solita è sufficiente allo scopo.

1. Affinché si abbia $\sigma_+(x) \equiv \sqrt{f(x) + \sqrt{g(x)}} \in \mathbb{R}_0^+$,

è richiesto che sia

$$f(x) + \sqrt{g(x)} \geq 0, \quad (2)$$

per la cui soluzione, deve valere la *disgiunzione inclusiva* dei due sistemi di disequazioni razionali

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -f(x) > 0 \\ g(x) \geq (-f(x))^2 \end{cases},$$

i.e., semplificando, l'*unione logica* dei sistemi complementari risolvibili

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ (f(x))^2 - g(x) \leq 0 \end{cases}. \quad (3)$$

L'insieme-unione delle soluzioni dei sistemi di condizioni (3) costituisce il dominio \mathcal{D}_+ di σ_+ .

Si osservi, però, che la scomposizione additiva (1.1) di σ_+ è ammissibile in \mathbb{R} *solo e soltanto* per quei valori di x per i quali, insieme con le condizioni imposte dal primo dei sistemi (3), si abbia, *simultaneamente*, $(f(x))^2 - g(x) \geq 0$. Questa disuguaglianza *falsifica* il secondo dei sistemi (3).

Quindi, se il sistema delle condizioni di scomponibilità,

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ (f(x))^2 - g(x) \geq 0 \end{cases}, \quad (4)$$

possiede soluzioni in \mathbb{R} , queste formano, in generale, un *sotto-insieme* di \mathcal{D}_+ ; in altre parole, la determinazione di \mathcal{D}_+ (dall'unione dei sistemi (3)) *non garantisce* la scomponibilità additiva (1.1).

2. Affinché si abbia $\sigma_-(x) \equiv \sqrt{f(x) - \sqrt{g(x)}} \in \mathbb{R}_0^+$,

è richiesto che sia

$$f(x) - \sqrt{g(x)} \geq 0. \quad (5)$$

La soluzione della disequazione (5) corrisponde a quella del sistema razionale risolvibile

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ (f(x))^2 - g(x) \geq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

che fornisce, in \mathbb{R} , il dominio \mathcal{D}_- di σ_- , *coincidente* con l'insieme di scomponibilità di σ_+ .

Dunque, la scomposizione additiva (1.1) di σ_- è *sempre* eseguibile ovunque in \mathcal{D}_- sotto le *stesse* condizioni imposte a σ_+ . Poiché i sistemi (4) e (6) risultano *identici*, le condizioni da essi espresse sono *generali, necessarie e sufficienti* per la scomponibilità additiva in $\mathcal{D}_\pm (\subseteq \mathbb{R})$ di *qualsiasi* forma radicale doppia.

Come ultima osservazione, l'identità (1.1) può rivelarsi utile, in certe circostanze, se viene letta *associativamente*, i.e., da destra verso sinistra.

(†) E.g., i numeri $\sqrt{1/2 \pm \sqrt{\pi/3}}$, entrambi $\in \mathbb{R}_0^+$, *non sono* scomponibili secondo le identità (1.1).

Esercizio 2

Si verifichino i *domini* e le *scomponibilità* rispettive in \mathbb{R} delle funzioni radicali seguenti:

a. $x \mapsto \sqrt{5 - (3/2)x + (1/2)\sqrt{-27x^2 - 108x + 84}} \equiv (1/2)(\sqrt{3(2 - 3x)} + \sqrt{3x + 14})$,
ovunque in $\mathcal{D}_+ = [-14/3, 2/3]$;

b. $x \mapsto \sqrt{2x - 1 - \sqrt{3x^2 - 5x}} \equiv (\sqrt{2}/2)(\sqrt{2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} - \sqrt{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 1}})$,
ovunque in $\mathcal{D}_- = [5/3, +\infty)$. Tale scomposizione *non è* conveniente perché non elimina la presenza di radicali doppi;

c. $x \mapsto \sqrt{(\cos x)^2 + \sqrt{\cos 2x}} \equiv (\sqrt{2}/2)(1 + \sqrt{\cos(2x)})$,
ovunque in $\mathcal{D}_+ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi]$;

d. $x \mapsto \sqrt{(\cosh x)^2 - \sqrt{\cosh 2x}} \equiv (\sqrt{2}/2)(\sqrt{\cosh(2x)} - 1)$,
ovunque in $\mathcal{D}_- = \mathbb{R}$.

■■■

Metodi risolutivi per alcuni tipi di Equazioni Goniometrico-circolari

Introduzione

Diversamente dalle equazioni algebriche, per le quali, dopo la loro riduzione a forma implicita, $A(x) = 0$, il teorema fondamentale *del Resto* e la *Teoria di Ruffini-Abel* fissano il principio operativo di ricerca delle soluzioni (o *radici* della forma $A(x)$), circa le equazioni *trascendenti*, e.g., quelle *goniometriche*, non sono noti metodi risolutivi altrettanto semplici e maneggevoli. A questo, fanno eccezione (parzialmente) alcune classi di equazioni, le quali si caratterizzano per una *macro-struttura algebrica* facilmente riconoscibile; altrimenti, la risoluzione ‘esatta’ è affidata a manipolazioni ‘creative’ specifiche, dall’intuito (guidato ... dall’*esperienza*) alla ‘visione ispirata’ di simmetrie elusive. Poi, non resta che rassegnarsi al ‘trapano’ del Calcolo Numerico.

Va ricordato che, in generale, per *qualsiasi* equazione, razionale o trascendente, ridotta a forma *implicita*, della quale si conosca un metodo *formale* di risoluzione, si perviene alla determinazione delle radici mediante un’operazione *biiettiva* – propria dell’Analisi Matematica – su una funzione *monotona* in un dominio opportuno: l’**inversione**.

Qui di seguito, sono presentati alcuni esempi frequenti, tratti dalla classe sufficientemente ampia di *equazioni goniometriche* rappresentate, in \mathbb{R} , dalla forma *composta implicita*

$$\Phi(\gamma_1(\lambda_1(x)), \gamma_2(\lambda_2(x)), \dots, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots) = 0 \quad (1)$$

(l’estensione al campo \mathbb{C} è immediata), dove, le γ_j sono funzioni *goniometriche* e le λ_j funzioni *lineari* di x (i.e., $\lambda_j(x) \equiv a_j x + b_j$) mentre le ϕ_m e la Φ sono funzioni *qualsiasi* da \mathbb{R} in \mathbb{R} . □

1 – Equazioni goniometrico-circolari elementari e quasi elementari

Le *Equazioni Goniometriche Elementari* rientrano tra i sei tipi riportati nella Tabella 1 seguente, nella quale, sono indicati anche gli insiemi *numerabili* di soluzioni rispettive ($k \in \mathbb{Z}$):

Equazione	Soluzioni
$\cos \lambda(x) \pm \phi(x) = 0$ $\sec \lambda(x) \pm \phi(x) = 0$	$\lambda(x) = \mp \cos^{-1} \phi(x) + 2k\pi$ $\lambda(x) = \mp \sec^{-1} \phi(x) + 2k\pi$
$\sin \lambda(x) \pm \phi(x) = 0$ $\csc \lambda(x) \pm \phi(x) = 0$	$\lambda(x) = \mp \sin^{-1} \phi(x) + 2k\pi$ $\lambda(x) = \mp \csc^{-1} \phi(x) + 2k\pi$
$\tan \lambda(x) \pm \phi(x) = 0$ $\cot \lambda(x) \pm \phi(x) = 0$	$\lambda(x) = \mp \tan^{-1} \phi(x) + k\pi$ $\lambda(x) = \mp \cot^{-1} \phi(x) + k\pi$

Tabella 1

Si osservi che ϕ può essere una funzione *costante* (caso *elementare*) o *goniometrica* di argomento $\mu(x)$ *lineare* (caso *quasi-elementare*). Di questa seconda tipologia, alcuni esempi tra i più comuni e semplici sono riportati nella Tabella 2:

Equazione	Soluzioni immediate (o forme risolventi)
$\cos \lambda(x) \pm \cos \mu(x) = 0$ $\sec \lambda(x) \pm \sec \mu(x) = 0$	$\lambda(x) = \mp \mu(x) + 2k\pi$ $\lambda(x) = \mp \mu(x) + 2k\pi$
$\sin \lambda(x) \pm \sin \mu(x) = 0$ $\csc \lambda(x) \pm \csc \mu(x) = 0$	$\lambda(x) = \mp \mu(x) + 2k\pi$ $\lambda(x) = \mp \mu(x) + 2k\pi$
$\tan \lambda(x) \pm \tan \mu(x) = 0$ $\cot \lambda(x) \pm \cot \mu(x) = 0$	$\lambda(x) = \mp \mu(x) + k\pi$ $\lambda(x) = \mp \mu(x) + k\pi$
$\cos \lambda(x) \pm \sin \mu(x) = 0$	$\cos \lambda(x) \pm \cos(\pi/2 - \mu(x)) = 0$ $\sin \mu(x) \pm \sin(\pi/2 - \lambda(x)) = 0$
$\tan \lambda(x) \pm \cot \mu(x) = 0$	$\tan \lambda(x) \pm \tan(\pi/2 - \mu(x)) = 0$ $\cot \mu(x) \pm \cot(\pi/2 - \lambda(x)) = 0$
$\sec \lambda(x) \pm \csc \mu(x) = 0$	$\sec \lambda(x) \pm \sec(\pi/2 - \mu(x)) = 0$ $\csc \mu(x) \pm \csc(\pi/2 - \lambda(x)) = 0$
$(\gamma(\lambda(x)))^2 - (\gamma(\mu(x)))^2 = 0$	$\gamma(\lambda(x)) = \pm \gamma(\mu(x))$
$(\gamma(\lambda(x)))^2 - (\gamma_c(\mu(x)))^2 = 0$	$\gamma(\lambda(x)) = \pm \gamma(\pi/2 - \mu(x))$

Tabella 2

Indicata con γ_c , la *co-funzione* della funzione goniometrica γ , è evidente che $\gamma \equiv (\gamma_c)_c$.

Esempio 7

L'equazione (cf/c Tabella 2, 6^a riga)

$$\csc(3x + \pi/18) - \sec(5x) = 0$$

deve assumere una forma *risolubile*, i.e., in cui è presente *una sola* funzione goniometrica di argomento *lineare*, e.g.,

$$\sec(5x) = \sec(\pi/2 - (3x + \pi/18)).$$

A sua volta, questa uguaglianza goniometrica equivale alle famiglie numerabili periodiche di uguaglianze algebriche

$$\begin{aligned} 5x &= \pi/2 - (3x + \pi/18) + 2k\pi \\ 5x &= -(\pi/2 - (3x + \pi/18)) + 2k\pi \end{aligned}$$

Quindi, rispetto anche all'*insieme* principale di monotonia della funzione \sec , $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, discontinuo nel punto $x = \pi/2$ di asintoto verticale, le due famiglie *numerabili* di soluzioni periodiche sono

$$\begin{aligned} x &= \pi/18 + k\pi/4 \equiv (9k + 2)\pi/36 \\ x &= (\pi - 2\pi/9) + k\pi = 7\pi/9 + k\pi \equiv (9k + 7)\pi/9 \end{aligned}$$

■

2 – Equazioni goniometrico-circolari a *macro-struttura* algebrica

Il riconoscimento della presenza di una *struttura algebrica* in un'equazione goniometrica (e, più in generale, *trascendente*) può suggerire *riduzioni algebriche* mediante parametrizzazioni opportune delle funzioni goniometriche γ_j implicate (e.g., $z := \cos(\alpha x)$, $t := \tan(x/\beta)$, etc.). Tipicamente, il procedimento conduce alla determinazione delle radici di un *polinomio* nella variabile parametrica intermedia (z, t , etc.) e si conclude con l'*inversione delle soluzioni parametriche* trovate vs. la variabile indipendente interna x , nell'intervallo *principale* di monotonìa della funzione γ_j .

A ogni soluzione così ottenuta, **deve** essere sommato il termine *modulare* pertinente di *traslazione periodica* ($x = (1/\alpha)\cos^{-1}z + 2k\pi/\alpha$, $x = \beta\tan^{-1}t + \beta k\pi$, etc., con $k \in \mathbb{Z}$); in altri termini, ogni soluzione ottenuta 'per inversione' rappresenta, più propriamente, un *insieme numerabile* di valori, ordinati *mod* ($\lambda k\pi$) mediante il parametro *muto* k , con $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

2.1 – Equazioni riducibili a forma razionale vs. una sola funzione goniometrico-circolare

Esempio 8

Poiché, nell'equazione

$$(\sin x)^2 + 3(\cos x)^2 + \sin x - 2 = 0, \quad (2)$$

la variabile $\sin x$ compare anche a grado *dispari*, dopo aver sostituito $(\cos x)^2 \equiv 1 - (\sin x)^2$, conviene porre, per evitare l'introduzione di radicali,

$$z := \sin x, \quad (3)$$

ottenendo il polinomio intermedio risolvente

$$2z^2 - z - 1 = 0. \quad (4)$$

Invertendo, mediante l'Eq. (3), le soluzioni $z = 1, -1/2$ dell'Eq. (4), riferite all'intervallo principale di monotonìa della funzione \sin , $[-\pi/2, \pi/2]$, si ottengono le (*tre famiglie numerabili* di) soluzioni periodiche

$$\begin{aligned} x &= \pi/2 + 2k\pi \equiv (4k + 1)\pi/2, \\ x &= -\pi/6 + 2k\pi \equiv -(12k + 1)\pi/6, \\ x &= -5\pi/6 + 2k\pi \equiv -(12k + 5)\pi/6, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

■

2.2 – Equazioni goniometrico-circolari omogenee nelle variabili $\cos x$ e $\sin x$

Tali equazioni posseggono la forma implicita generale, *completa* ($n + 1$ addendi) o *incompleta*,

$$\begin{aligned} a_0(\cos x)^n + a_1(\cos x)^{n-1}\sin x + a_2(\cos x)^{n-2}(\sin x)^2 + \dots \\ \dots + a_{n-1}(\cos x)(\sin x)^{n-1} + a_n(\sin x)^n = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

dove $n \in \mathbb{Z}^+$ è il *grado di omogeneità*. Il metodo risolutivo classico è quello di dividere i membri dell'Eq. (5) o per $(\cos x)^n \neq 0$ (i.e., imponendo che sia $x \neq (2k + 1)\pi/2$) o per $(\sin x)^n \neq 0$ (i.e., imponendo che sia $x \neq k\pi$). L'espressione nel membro sinistro dell'equazione si trasforma in un polinomio di grado n nella variabile $t := \tan x$ o, rispettivamente, $\xi := \cot x$. Quindi, l'inversione delle radici (reali), t_j o ξ_m , fornisce altrettante famiglie *numerabili* di soluzioni periodiche.

Infine, secondo che si sia diviso per $(\cos x)^n \neq 0$ o per $(\sin x)^n \neq 0$, si deve **sempre** verificare se $x = (2k + 1)\pi/2$ o, rispettivamente, $x = k\pi$, siano, comunque, soluzioni dell'Eq. (5). La mancata osservanza di questa precauzione può portare alla *perdita* delle soluzioni cosiddette *singolari*!

Inoltre, se è assente una delle due potenze maggiori, $(\cos x)^n$ o $(\sin x)^n$, è **obbligatorio** dividere per tale potenza mancante al fine di **conservare** il grado n nel polinomio risolvete nella variabile t ($\equiv \tan x$) o, rispettivamente, ξ ($\equiv \cot x$) e, quindi, di **non perdere soluzioni** legittime.

Esempio 9

L'equazione

$$(\sin x)^3 \cos x + (\sin x)^2 (\cos x)^2 + 3 \sin x \cdot (\cos x)^3 + 3 (\cos x)^4 = 0 \quad (6)$$

è omogenea di 4° grado e *incompleta*. Poiché manca il monomio proporzionale a $(\sin x)^4$, si devono dividere i membri per $(\sin x)^4 \neq 0$, ottenendo l'equazione polinomiale (incompleta) di 4° grado

$$3\xi^4 + 3\xi^3 + \xi^2 + \xi \equiv \xi(\xi + 1)(3\xi^2 + 1) = 0 \quad (6.1)$$

nella variabile intermedia $\xi := \cot x$. È evidente che l'equazione (6.1) possiede due sole soluzioni reali, $\xi = -1, 0$. Pertanto, le due famiglie *numerabili* di soluzioni *reali* periodiche dell'Eq. (6), riferite all'intervallo principale di monotonìa della funzione \cot , i.e., $(0, \pi)$, sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} x &= 3\pi/4 + k\pi \equiv (4k + 3)\pi/4, \\ x &= \pi/2 + k\pi \equiv (2k + 1)\pi/2. \end{aligned}$$

■

2.3 – Equazioni goniometrico-circolari para-omogenee di grado pari nelle variabili $\cos x$ e $\sin x$

Si consideri un'equazione goniometrica in forma implicita, costituita **soltanto** da monomi del tipo $a_h (\cos x)^{2j} (\sin x)^{2l}$, con $\{h, j, l\} \subset \mathbb{Z}_0^+$. Determinato $n := \max\{2j + 2l\}$, anche n è *pari*.

Per ridurre l'equazione alla forma omogenea (5), è sufficiente moltiplicare *ciascun* monomio di grado $2j + 2l < n$ per $1 \equiv ((\cos x)^2 + (\sin x)^2)^m$, con m appropriato tale che $2j + 2l + 2m = n$.

Esempio 10

L'equazione para-omogenea

$$2(\cos x)^4 + 2(\sin x)^4 - (\sin x)^2 - 1/2 = 0 \quad (7)$$

muta nella forma omogenea (5) di grado 4 sostituendo, *ai due ultimi addendi*, le identità

$$(\sin x)^2 \equiv (\sin x)^2 ((\cos x)^2 + (\sin x)^2), \quad 1/2 \equiv (1/2) ((\cos x)^2 + (\sin x)^2)^2.$$

Semplificando, si ottiene

$$3(\cos x)^4 - 4(\cos x)^2 (\sin x)^2 + (\sin x)^4 = 0.$$

Poi, dividendo, e.g., per $(\cos x)^4 \neq 0$ e definendo $t := \tan x$, si arriva alla forma bi-quadratica risolvete

$$t^4 - 4t^2 + 3 = 0. \quad (7.1)$$

Le quattro soluzioni dell'Eq. (7.1), tutte reali, forniscono, per inversione nell'intervallo principale di monotonìa della funzione \tan , i.e., $(-\pi/2, \pi/2)$, le quattro famiglie periodiche numerabili (reali) di soluzioni dell'Eq. (7),

$$\begin{aligned} x &= \pm \pi/4 + k\pi \equiv \pm (4k + 1)\pi/4, \\ x &= \pm \pi/3 + k\pi \equiv \pm (3k + 1)\pi/3. \end{aligned}$$

■

3 – Le formule parametriche nelle variabili $\tan(x/2)$ e $\cot(x/2)$

Sono disponibili formule parametriche classiche, di utilità notevole, che trasformano le espressioni di tutte le funzioni goniometriche in termini di un singolo parametro razionalizzante, evitando le complicazioni generate dalla presenza di forme radicali. Vale la pena di sottolineare che il ricorso a tali formule si estende da metodi di soluzione di equazioni goniometriche e di parametrizzazione razionale finalizzata, e.g., a certi tipi classici di integrali goniometrici.

Il parametro razionalizzante convenzionale è

$$\tau := \tan(x/2). \quad (8)$$

La sostituzione (8), però, appare chiaramente *condizionata*, implicando, in \mathbb{R} , le esclusioni $x \neq (2k+1)\pi$. Pertanto, sarà **sempre** necessario controllare direttamente se questi valori *singolari* di τ siano tali anche per l'espressione esplicita in x originaria.

Ciò premesso, si scrive

$$\cos x \equiv \cos(2(x/2)) \equiv \frac{(\cos(x/2))^2 - (\sin(x/2))^2}{1} \equiv \frac{(\cos(x/2))^2 - (\sin(x/2))^2}{(\cos(x/2))^2 + (\sin(x/2))^2}, \quad (9.1)$$

da cui, dividendo il numeratore e il denominatore *ausiliario* per $(\cos(x/2))^2 \neq 0$ e usando la sostituzione (8), risulta

$$\cos x = \frac{1 - (\tan(x/2))^2}{1 + (\tan(x/2))^2} \equiv \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}. \quad (9.2)$$

Analogamente, si trova che

$$\sin x \equiv \sin(2(x/2)) \equiv \frac{2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)}{(\cos(x/2))^2 + (\sin(x/2))^2} = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + (\tan(x/2))^2} \equiv \frac{2\tau}{1 + \tau^2}. \quad (9.3)$$

Le formule (9.2) e (9.3) consentono di ricavare prontamente le espressioni parametriche delle altre funzioni:

$$\tan x \equiv \frac{2\tau}{1 - \tau^2}, \quad (10.1)$$

con il vincolo duplice $x \neq (2k+1)\pi \vee (2k+1)\pi/2$ (multipli *dispari* e *semi-dispari* di π rad);

$$\cot x \equiv \frac{1 - \tau^2}{2\tau}, \quad (10.2)$$

con il vincolo sintetico $x \neq k\pi$, *inclusivo* di $x \neq (2k+1)\pi$;

$$\sec x \equiv \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad (10.3)$$

con il vincolo duplice $x \neq (2k+1)\pi \vee (2k+1)\pi/2$;

$$\csc x \equiv \frac{1 + \tau^2}{2\tau}, \quad (10.4)$$

con il vincolo sintetico $x \neq k\pi$, *inclusivo* di $x \neq (2k+1)\pi$.

La relazione inversa dell'Eq. (8) è immediata:

$$x = 2 \tan^{-1} \tau + 2k\pi; \quad (10.5)$$

quindi, dall'Eq. (10.5), si deduce l'elemento differenziale

$$dx = \frac{2}{1 + \tau^2} d\tau. \quad (10.6)$$

Per comodità, i risultati precedenti sono sintetizzati nella tabella seguente:

Forma parametrica	Condizione di realtà	Variabile inversa Elemento differenziale
$\tau := \tan(x/2)$	$x \neq (2k+1)\pi$	$x = \tan^{-1}\tau + 2k\pi$ $dx = \frac{2}{1+\tau^2} d\tau$
$\cos x \equiv \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$	$x \neq (2k+1)\pi$	
$\sin x \equiv \frac{2\tau}{1+\tau^2}$	$x \neq (2k+1)\pi$	
$\tan x \equiv \frac{2\tau}{1-\tau^2}$	$x \neq (2k+1)\pi \vee (2k+1)\pi/2$	
$\cot x \equiv \frac{1-\tau^2}{2\tau}$	$x \neq k\pi$	
$\sec x \equiv \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}$	$x \neq (2k+1)\pi \vee (2k+1)\pi/2$	
$\csc x \equiv \frac{1+\tau^2}{2\tau}$	$x \neq k\pi$	

Tabella 3

□

Alternativamente, si può definire

$$\chi := \cot(x/2). \quad (11)$$

Quindi, si dividono i numeratori e i denominatori nelle Eq. (9.1) e (9.3) per $(\sin(x/2))^2 \neq 0$ e si determinano le corrispondenti delle Eq. (10.1), ..., (10.6) e le condizioni di realtà pertinenti:

Forma parametrica	Condizione di realtà	Variabile inversa Elemento differenziale
$\chi := \cot(x/2)$	$x \neq 2k\pi$	$x = 2\cot^{-1}\chi + 2k\pi$ $dx = -\frac{2}{1+\chi^2} d\chi$
$\cos x \equiv \frac{\chi^2-1}{\chi^2+1}$	$x \neq 2k\pi$	
$\sin x \equiv \frac{2\chi}{\chi^2+1}$	$x \neq 2k\pi$	
$\tan x \equiv \frac{2\chi}{\chi^2-1}$	$x \neq 2k\pi \vee (2k+1)\pi/2$	
$\cot x \equiv \frac{\chi^2-1}{2\chi}$	$x \neq k\pi$	
$\sec x \equiv \frac{\chi^2+1}{\chi^2-1}$	$x \neq 2k\pi \vee (2k+1)\pi/2$	
$\csc x \equiv \frac{\chi^2+1}{2\chi}$	$x \neq k\pi$	

Tabella 4

■

4 – L'equazione goniometrico-circolare generale lineare nelle variabili $\cos x$ e $\sin x$

Un'equazione di importanza applicativa notevole, per la frequenza con cui la si incontra sia nella risoluzione goniometrica di problemi geometrici sia in ambiti più avanzati, e.g., quello relativo all'impiego delle *Serie di Fourier* e di *Fourier-Bessel*, è

$$p \cos x + q \sin x + r = 0, \quad (11)$$

con $\{p, q, r\} \subset \mathbb{R}$. In essa, per evitare i casi immediati *omogeneo* (i.e., $r = 0$) ed *elementare* (i.e., $p = 0 \vee q = 0$), si assumerà, definitivamente, che valga la condizione $pqr \neq 0$.

I metodi possibili per la risoluzione dell'Eq. (11) sono almeno due:

- il *primo* – forse, l'*unico* che dà qualche ... speranza nei casi meno agevoli di equazioni polinomiali, *non-lineari* vs. variabili goniometriche di qualsiasi tipo – fa ricorso direttamente alle *formule parametriche* (8), ..., (10.5) precedenti (*metodo di risoluzione parametrica*);
- il *secondo*, ricavato manipolando qualche trasformazione goniometrica elementare – in verità, però, mai incontrato esplicitamente da chi scrive, prevedibilmente perché scontato – fornisce una formula risolvente generale compatta in termini di funzione \tan^{-1} . Sarà indicato come il *metodo di risoluzione diretta*.

4.1 – Il metodo di risoluzione parametrica

Esercizio 3

L'equazione

$$(2 - \sqrt{3})\cos x + \sin x - 1 = 0$$

diventa, con le identità (9.1) e (9.2) e con semplificazioni ovvie,

$$(3 - \sqrt{3})t^2 - 2t + \sqrt{3} - 1 = 0.$$

Quindi, dalle soluzioni parametriche $t = \sqrt{3}/3, 1$ ($\equiv \tan(x/2)$), si ottengono le due famiglie numerabili di soluzioni periodiche mediante l'Eq. (10.5), riferite all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ della variabile $x/2$ ($\equiv \tan^{-1}t$),

$$\begin{aligned} x &= (6k + 1)\pi/3 \\ x &= (4k + 1)\pi/2 \end{aligned}$$

■

Comunque, va tenuto presente che il *metodo di risoluzione parametrica* limita i valori ammissibili delle espressioni goniometriche trasformate. Pertanto, ancora, affinché non vadano perse soluzioni *singolari* – del tutto legittime! – dell'Eq. (11), è **sempre** necessaria una verifica *esplicita* se esistano tali soluzioni tra le *contro-immagini di frontiera* del parametro $t = t(x)$.

Esercizio 4

Si verifichi che l'equazione

$$\cos x - \sin x + 1 = 0$$

possiede la famiglia numerabile di soluzioni periodiche

$$x = (2k + 1)\pi,$$

non ottenibile dalla sua trasformata parametrica razionale.

■

4.2 – Il metodo di risoluzione diretta

La determinazione di un'espressione risolvente generale, che esprima in forma *chiusa* le soluzioni in \mathbb{R} – se esistono – dell'Eq. (11), fornisce l'occasione per lo sviluppo preliminare di un paio di identità *inverse* interessanti – peraltro note – relative alla

somma e differenza di ampiezze in termini di \tan^{-1} e \cot^{-1}

Siano $\tan \alpha := u$ e $\tan \beta := v$, con $\alpha \wedge \beta \wedge \alpha \pm \beta \neq (2k+1)\pi/2$.

Quindi, da

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \equiv \frac{u \pm v}{1 \mp uv},$$

segue che

$$\alpha \pm \beta \equiv \tan^{-1} u \pm \tan^{-1} v = \tan^{-1} \frac{u \pm v}{1 \mp uv} \quad (12)$$

Analogamente, siano $\cot \alpha := u$ e $\cot \beta := v$, con $\alpha \wedge \beta \wedge \alpha \pm \beta \neq k\pi$.

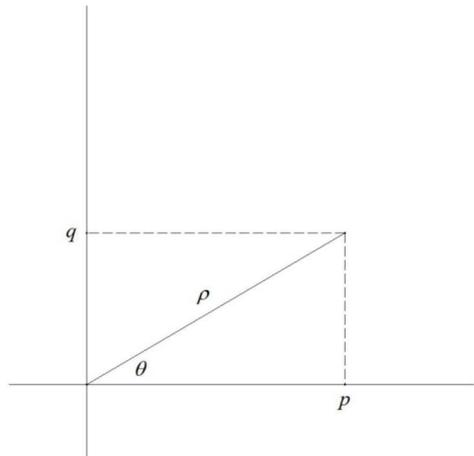
Quindi, da

$$\cot(\alpha \pm \beta) \equiv \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \equiv \frac{uv \mp 1}{v \pm u},$$

segue che

$$\alpha \pm \beta \equiv \cot^{-1} u \pm \cot^{-1} v = \cot^{-1} \frac{uv \mp 1}{v \pm u}. \quad (13)$$

■



Ora, considerando i coefficienti dell'Eq. (11), si costruisca la rappresentazione cartesiana del punto $(p; q)$, di anomalia polare θ e di coordinata radiale $\rho \equiv (p^2 + q^2)^{1/2}$.

Chiaramente, valgono le identità (v. figura),

$$\begin{aligned} p &\equiv \rho \cos \theta \quad (\geq 0), \\ q &\equiv \rho \sin \theta \quad (\geq 0). \end{aligned}$$

Se si dividono queste identità tra loro, membro a membro, e si inverte il risultato goniometrico ottenuto, si ha

$$\theta = \tan^{-1}(q/p) + \bar{k}\pi \quad (14)$$

con $\bar{k} \in \mathbb{Z}$. Pertanto, l'Eq. (11) diventa

$$\rho(\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) + r = 0,$$

i.e., mediante le formule goniometriche di somma\ differenza di ampiezze d' arco,

$$\cos(\theta - x) \equiv \cos(x - \theta) = -r/\rho. \quad (15)$$

Invertendo l'Eq. (15) e sostituendo a θ la sua espressione (14), si arriva alla coppia di insiemi numerabili di soluzioni periodiche seguenti (si ricordi che la funzione \tan^{-1} è *dispari*):

$$\begin{aligned} x &= (\cos^{-1}(-r/\rho) + 2k\pi) + (\tan^{-1}(q/p) + \bar{k}\pi) \\ &\equiv \left(\tan^{-1} \frac{\pm(1 - r^2/\rho^2)^{1/2}}{-r/\rho} + 2k\pi \right) + (\tan^{-1}(q/p) + \bar{k}\pi) \end{aligned}$$

$$\equiv \mp \tan^{-1} \frac{(\rho^2 - r^2)^{1/2}}{r} + \tan^{-1}(q/p) + 2k\pi, \quad (16.1)$$

dove, $2k\pi$ è la periodicità (minore) appropriata per *entrambi* i valori degli addendi \tan^{-1} ,

$$\begin{aligned} x &= (-\cos^{-1}(-r/\rho) + 2k\pi) + (\tan^{-1}(q/p) + \bar{k}\pi) \\ &\equiv \left(-\tan^{-1} \frac{\pm(1-r^2/\rho^2)^{1/2}}{-r/\rho} + 2k\pi \right) + (\tan^{-1}(q/p) + \bar{k}\pi) \\ &\equiv \pm \tan^{-1} \frac{(\rho^2 - r^2)^{1/2}}{r} + \tan^{-1}(q/p) + 2k\pi. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Le soluzioni (16.1) *duplicano* le (16.2). Quindi, sommando, nell'una o nell'altra, i valori delle funzioni \tan^{-1} mediante l'identità (12) e semplificando i denominatori (soggetti al vincolo iniziale $pqr \neq 0$), si determina, in generale, la *coppia* di famiglie numerabili di soluzioni periodiche

$$x = \tan^{-1} \frac{qr \pm p(p^2 + q^2 - r^2)^{1/2}}{pr \mp q(p^2 + q^2 - r^2)^{1/2}} + 2k\pi. \quad (17)$$

La forma chiusa (17) delle soluzioni dell'Eq. (11) rende evidenti le *condizioni di realtà*, i.e., di *risolvibilità in \mathbb{R}* , dell'Eq. (11) stessa:

$$p^2 + q^2 \equiv \rho^2 \geq r^2. \quad (18)$$

Il *caso-limite* dell'uguaglianza

$$p^2 + q^2 = r^2 \quad (18.1)$$

riduce a *una sola* le famiglie numerabili di soluzioni dell'Eq. (11). Infatti, confluendo le Eq. (16.1) e (16.2) nell'Eq. (14) (a meno della periodicità), risulta

$$x = \tan^{-1}(q/p) + 2k\pi. \quad (19)$$

Inoltre, il verificarsi dell'una o dell'altra delle eventualità

$$pr \mp q(p^2 + q^2 - r^2)^{1/2} = 0, \quad (20)$$

equivalenti alle coincidenze $q \equiv \pm r$, corrisponde all'esistenza *ulteriore* dell'insieme numerabile di soluzioni periodiche *singolari* $x = (4k+1)\pi/2$.

Infine, la memorizzazione corretta dell'espressione (17) richiede *accuratezza formale* riguardo alla posizione dei parametri nell'Eq. (11): precisamente, p è il coefficiente di $\cos x$ mentre q è quello di $\sin x$, **non viceversa!**

Esercizio 5

Mediante la forma compatta (17), si verifichi che l'equazione

$$2\cos x - \sqrt{5}\sin x + \sqrt{5} = 0$$

possiede le due famiglie numerabili di soluzioni periodiche

$$\begin{aligned} x &= -\tan^{-1}(\sqrt{5}/20) + 2k\pi, & \text{soluzioni regolari,} \\ x &= (4k+1)\pi/2, & \text{soluzioni singolari.} \end{aligned}$$

Con un controllo *numerico*, si verifichi che l'Eq. (17) fornisce le **stesse** soluzioni del *metodo parametrico*.

Esercizio 6

L'equazione

$$3 \sin x - 2\sqrt{7} \cos x - \sqrt{37} = 0$$

possiede un'unica famiglia di soluzioni periodiche,

$$x = -\tan^{-1}(3\sqrt{7}/14) + 2k\pi.$$

Esercizio 7

Mediante la forma chiusa (17), si verifichi che l'equazione

$$2\sqrt{3} \sin x - \cos x - 3\sqrt{2} = 0$$

non ha soluzioni in \mathbb{R} .

Identità goniometriche circolari da **ampiezze** e **semi-ampiezze** angolari

Ricordando l'identità fondamentale $\cot \psi := 1/\tan \psi$, valgono le identità e le combinazioni reciproche seguenti:

$$\sec \alpha + \tan \alpha = \tan(\alpha/2 + \pi/4) = \frac{1 + \tan(\alpha/2)}{1 - \tan(\alpha/2)}; \quad (1)$$

$$\tan(\alpha/2 - \pi/4) = \frac{\tan(\alpha/2) - 1}{\tan(\alpha/2) + 1} = \frac{1 - \cot(\alpha/2)}{1 + \cot(\alpha/2)}; \quad (2)$$

$$\sec \alpha - \tan \alpha = \cot(\alpha/2 + \pi/4) = \frac{\cot(\alpha/2) - 1}{\cot(\alpha/2) + 1}; \quad (3)$$

$$\cot(\alpha/2 - \pi/4) = \frac{1 + \cot(\alpha/2)}{1 - \cot(\alpha/2)} = \frac{\tan(\alpha/2) + 1}{\tan(\alpha/2) - 1}; \quad (4)$$

$$\csc \alpha + \cot \alpha = \cot(\alpha/2) = \frac{1}{\tan(\alpha/2)}; \quad (5)$$

$$\csc \alpha - \cot \alpha = \tan(\alpha/2) = \frac{1}{\cot(\alpha/2)}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \cot(\alpha/2) \tan(\alpha/2) &= (\csc \alpha + \cot \alpha)(\csc \alpha - \cot \alpha) \\ &= (\csc \alpha)^2 - (\cot \alpha)^2 \dots = 1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \cot(\alpha/2 + \pi/4) \tan(\alpha/2 + \pi/4) &= \left(\frac{1 + \cot(\alpha/2)}{1 - \cot(\alpha/2)} \right) \left(\frac{\tan(\alpha/2) - 1}{\tan(\alpha/2) + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\tan(\alpha/2) + 1}{\tan(\alpha/2) - 1} \right) \left(\frac{1 - \cot(\alpha/2)}{1 + \cot(\alpha/2)} \right) \\ &= (\sec \alpha - \tan \alpha)(\sec \alpha + \tan \alpha) \\ &= (\sec \alpha)^2 - (\tan \alpha)^2 \dots = 1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \cot(\alpha/2 - \pi/4) \tan(\alpha/2 - \pi/4) &= \left(\frac{1 + \cot(\alpha/2)}{1 - \cot(\alpha/2)} \right) \left(\frac{\tan(\alpha/2) - 1}{\tan(\alpha/2) + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\tan(\alpha/2) + 1}{\tan(\alpha/2) - 1} \right) \left(\frac{1 - \cot(\alpha/2)}{1 + \cot(\alpha/2)} \right) \equiv 1. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\cot(\alpha/2 - \pi/4) \tan(\alpha/2 + \pi/4) = -(\tan(\alpha/2 + \pi/4))^2; \quad (10)$$

$$\cot(\alpha/2 + \pi/4) \tan(\alpha/2 - \pi/4) = -(\cot(\alpha/2 + \pi/4))^2; \quad (11)$$

$$(\cot(\alpha/2 - \pi/4) \tan(\alpha/2 + \pi/4)) \cdot (\cot(\alpha/2 + \pi/4) \tan(\alpha/2 - \pi/4)) = 1; \quad (12)$$

$$\frac{\cot(\alpha/2 - \pi/4) \tan(\alpha/2 + \pi/4)}{\cot(\alpha/2 + \pi/4) \tan(\alpha/2 - \pi/4)} = \left(\frac{\csc \alpha + 1}{\csc \alpha - 1} \right)^2; \quad (13)$$

$$\frac{\csc \alpha + \cot \alpha}{\csc \alpha - \cot \alpha} = (\cot(\alpha/2))^2 = \frac{1}{(\tan(\alpha/2))^2}. \quad (14)$$

Ovviamente, altre identità sono ricavabili dalle precedenti, in particolare, le analoghe *iperboliche*, a partire da quelle *Euleriane* (CAS! + sostituzioni elementari, con $i := (-1)^{1/2} \equiv e^{i(\pi/2)}$, valore *principale* in \mathcal{C}):

$$\begin{aligned} \tan x &= -i \tanh(ix), \\ \cot x &= i \coth(ix), \\ \sec x &= \operatorname{sech}(ix), \\ \csc x &= i \operatorname{csch}(ix), \end{aligned} \quad (15)$$



I. INVERSIONE di una matrice (quadrata) reale

Sia \mathbf{A} una $(n \times n)$ -matrice (quadrata) con elementi tutti $\in \mathbb{R}$ e *non-singolare* (i.e., $\det \mathbf{A} \neq 0$).

I.1 Il *minore complementare* M_{jk} dell'elemento a_{jk} di \mathbf{A} ($j, k = 1, 2, \dots, n$) è il *determinante* della matrice di ordine $n - 1$ estratta da \mathbf{A} sopprimendone la j -esima riga e la k -esima colonna. Il numero di tali determinanti ottenibili variando i valori degli indici j e k in modo indipendente è n^2 .

I.2 Il *co-fattore* (o *complemento algebrico*) A_{jk} dell'elemento a_{jk} di \mathbf{A} è il numero

$$A_{jk} := (-1)^k M_{jk}, \quad (\text{A.1})$$

coincidente con od *opposto a* M_{jk} secondo che $j + k$ è *pari* o *dispari*.

I.3 La matrice *inversa* \mathbf{A}^{-1} della matrice \mathbf{A} è data da

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^\dagger, \quad (\text{A.2})$$

dove \mathbf{A}^\dagger , detta matrice *aggiunta* della matrice \mathbf{A} , è la $(n \times n)$ -matrice *trasposta* della matrice costruita con gli n^2 co-fattori (complementi algebrici) di \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^\dagger := (A_{jk})^T \equiv (A_{kj}) \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & \dots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.1})$$

■

II. L’AFFINITÀ INVERSA generica reale

Data l’affinità piana generica

$$\Omega := \begin{cases} u = ax + by + p \\ v = cx + dy + q \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

qui indicata convenzionalmente come *diretta*, avente rappresentazione matriciale

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{I} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3.1})$$

per la quale, sia $\Delta := \det \mathbf{A} \neq 0$ (i.e., \mathbf{A} sia *non-singolare*), la matrice dei coefficienti dell’affinità *inversa* Ω^{-1} si scrive (v. Eq. (A.2))

$$\mathbf{A}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Quindi, dal sistema (A.3), ponendo

$$\begin{cases} ax + by = u - p := s \\ cx + dy = v - q := t \end{cases},$$

segue l’uguaglianza matriciale

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \text{o, in forma equivalente,} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix},$$

corrispondente al sistema *inverso* di equazioni lineari

$$\begin{cases} x = \frac{d}{\Delta} s - \frac{b}{\Delta} t \equiv \frac{d}{\Delta} (u - p) - \frac{b}{\Delta} (v - q) \\ y = -\frac{c}{\Delta} s + \frac{a}{\Delta} t \equiv -\frac{c}{\Delta} (u - p) + \frac{a}{\Delta} (v - q) \end{cases}.$$

Pertanto, quest’ultimo definisce l’**affinità inversa** cercata,

$$\Omega^{-1} := \begin{cases} x = \frac{d}{\Delta} u - \frac{b}{\Delta} v - \frac{dp - bq}{\Delta} \\ y = -\frac{c}{\Delta} u + \frac{a}{\Delta} v - \frac{aq - cp}{\Delta} \end{cases}, \quad (\text{A.5})$$

la cui rappresentazione matriciale si scrive

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta_x/\Delta \\ \Delta_y/\Delta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.1})$$

I numeri $\Delta_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$ e $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$ provengono da $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, sostituendovi la colonna $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dei termini *traslazionali* in Ω alle colonne dei coefficienti delle incognite x e y , rispettivamente. ■

Il metodo di riduzione di Gauss-Seidel per i sistemi lineari

Uno dei metodi più diffusi per la risoluzione di un sistema di n equazioni *lineari* in n incognite è quello di *riduzione di Gauss-Seidel* che, rispetto al *metodo di Cramer*, ha il vantaggio notevole di essere meglio adattabile alla programmazione numerica.

Come premessa, va ricordato che due sistemi di equazioni di natura qualsiasi sono **equivalenti** quando hanno le stesse soluzioni nello stesso dominio. Inoltre, un sistema *lineare* qualsiasi genera un sistema *lineare* equivalente mediante le operazioni seguenti:

1. *moltiplicando i membri di una o più equazioni per un numero diverso da zero;*
2. *sostituendo a un'equazione una sua combinazione lineare con altre equazioni del sistema;*
3. *scambiando tra loro la sequenza di due o più equazioni del sistema.*

Il *metodo di Gauss-Seidel* usa tali operazioni per ottenere un sistema, equivalente all'originale, di forma *triangolare-alta* (i.e., con *tutti* elementi *nulli* al di sotto della diagonale principale nella matrice dei coefficienti associata), così da arrivare più rapidamente alla soluzione.

Un'osservazione semplice ma utile, in vista della traduzione dell'algoritmo in programma per il calcolo automatico, è che le suddette operazioni si possono effettuare direttamente sulla matrice dei coefficienti *orlata*, *a destra*, con il *vettore-colonna dei termini noti*, che sarà indicata come **matrice orlata** (od *aumentata*) **a destra**, secondo l'algoritmo moltiplicativo standard *righe* \times *colonne*.

Esempio 11

Per ridurre a forma *triangolare-alta* del sistema seguente e della sua matrice dei coefficienti *orlata* (*a destra*) associata,

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 3x - 3y - z = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{associata}]{\text{matrice orlata}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \end{array} \right),$$

si sostituisca alla 2^a equazione la somma della stessa con la 1^a moltiplicata per -2 , eliminando, così, x dalla 2^a equazione. Nella matrice, ciò è equivalente a sostituire la 2^a riga con la somma della stessa e della prima moltiplicata per -2 , determinando il nuovo elemento $a_{2,1} \equiv 0$,

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 5y + 4z = 3 \\ 3x - 3y - z = 4 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

Alla 3^a equazione, si sostituisca la somma della 3^a stessa con la 1^a moltiplicata per -3 , generando una modificazione corrispondente della matrice *orlata*:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 5y + 4z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Così, è sparita la variabile x anche dalla 3^a equazione, introducendo il nuovo elemento $a_{3,1} \equiv 0$.

Ora, si sostituisca alla 3^a equazione la somma della stessa con la precedente, la 2^a, moltiplicata per $-3/5$. La modifica della matrice *orlata* dei coefficienti è ovvia:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 5y + 4z = 3 \\ -2z/5 = -4/5 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2/5 & -4/5 \end{array} \right).$$

Questa la forma *triangolare-alta* cercata. Il calcolo della soluzione è immediato: dalla 3^a equazione, si ottiene $z = 2$ che, sostituita nella 2^a, dà $y = -1$. Infine, sostituendo $z = 2$ e $y = -1$ nella 1^a equazione, si trova $x = 1$.

■

Può accadere che un elemento della diagonale principale si annulli nel corso delle operazioni. I due esempi che seguono indicano come convenga comportarsi.

Esempio 12

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + z = -1 \\ 3x - 3y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{associata}]{\text{matrice orlata}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Alla 2^a riga, si *sostituisca* la differenza della 2^a riga stessa con il doppio della 1^a: $R_2 \mapsto R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{array} \right);$$

alla 3^a riga, si *sostituisca* la differenza della 3^a riga stessa con il triplo della 1^a: $R_3 \mapsto R_3 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

Ora, si *scambino* la 2^a e la 3^a riga tra loro, $R_2 \Leftrightarrow R_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \Leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right),$$

con l'ultima matrice *orlata* scritta corrispondente al sistema lineare, equivalente al sistema originario,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{associato}]{\text{sistema lineare}} \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3y + 2z = -4 \\ 3z = -3 \end{cases}.$$

Si ottiene immediatamente $z = -1$ e, quindi, $y = -2/3$ e $x = -4/3$. ■

Esempio 13

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + z = -1 \\ 3x - 6y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{associata}]{\text{matrice orlata}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Effettuando le stesse operazioni dell'**Esempio 11**, si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{equivalente}]{\text{matrice orlata}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Come appare evidente, non è più possibile eseguire uno scambio di righe per ottenere l'elemento $a_{2,2} \neq 0$. Inoltre, il determinante della matrice (quadrata) dei coefficienti è nullo, i.e., il sistema è *critico*. Nel caso presente, esso è *impossibile*, data l'incompatibilità tra le equazioni $3z = -3$ e $z = -3$, corrispondenti alle ultime due righe. □

La generalizzazione del metodo esemplificato sopra a un sistema di n equazioni (lineari) in n incognite può essere realizzato con un algoritmo dovuto a *Kronecker*: l'equazione matriciale lineare

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{– dove } \mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ e } \mathbf{b} \equiv (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \text{ – corrisponde al}$$

$$\text{sistema di } n \text{ equazioni lineari } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \text{ la cui matrice } \textit{orlata} \text{ è}$$

$$\mathbf{A}_+ = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

Per ridurre la matrice \mathbf{A} di forma *triangolare-alta*, si procede su \mathbf{A}_+ per passi successivi, incominciando a operare in modo da ottenere tutti 0 nella prima colonna mentre $a_{11} \neq 0$. A tale scopo, uno *scambio preliminare tra righe* potrebbe rivelarsi opportuno.

Le operazioni necessarie sono sintetizzate come segue:

$$\begin{cases} R_2 \mapsto R_2 - (a_{21}/a_{11})R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - (a_{31}/a_{11})R_1 \\ \vdots & \vdots \\ R_n \mapsto R_n - (a_{n1}/a_{11})R_1 \end{cases}$$

Queste sostituzioni trasformano la matrice orlata \mathbf{A}_+ in

$$\mathbf{A}_{+,1} \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} & t_n \end{array} \right),$$

dove, è chiaro che, per $i \geq 2$, valgono, in generale, le disuguaglianze $u_{ij} \neq a_{ij}$ e $t_i \neq b_i$.

Ora, è necessario azzerare gli elementi alle locazioni incolonnate $(3; 2)$, $(4; 2)$, $(5; 2)$, ..., $(n; 2)$.

Se $u_{22} \neq 0$, le sostituzioni da effettuare sono le seguenti:

$$\begin{cases} R_3 \mapsto R_3 - (u_{32}/u_{22})R_2 \\ R_4 \mapsto R_4 - (u_{42}/u_{22})R_2 \\ \vdots & \vdots \\ R_n \mapsto R_n - (u_{n2}/u_{22})R_2 \end{cases}.$$

Se $u_{22} \equiv 0$, si controllano gli elementi *sottostanti* u_{22} nella stessa colonna. Se ce n'è uno $\neq 0$, si effettua uno *scambio di righe* per collocare questo elemento al posto di u_{22} . Se tutti sono uguali a 0, il sistema è *critico*.

Poi, si procede in modo analogo fino alla colonna $(n - 1)$ -esima, sempre partendo dall'elemento della diagonale principale. Al termine dell'ultimo ciclo di operazioni, si ottiene una matrice i cui elementi posti *sotto* la diagonale principale sono nulli, i.e., una matrice triangolare-alta. Una volta ottenuta la riduzione a forma triangolare-alta, si può concludere che il sistema è:

determinato se gli elementi della diagonale principale sono *tutti* $\neq 0$, il che implica che la soluzione del sistema *esiste ed è unica* (per il Teorema di Cramer);

critico se *almeno un* elemento della diagonale principale è 0. Poi, per stabilire se un sistema critico è *impossibile* o *indeterminato*, è necessaria un'analisi ulteriore.

Esercizio 8

Verificare che alla matrice *orlata*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \text{ corrisponde un sistema } \mathbf{determinato}, \text{ di soluzione } \begin{pmatrix} -1/4 \\ 47/4 \\ -5/4 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

mentre, alle matrici *orlate*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \quad \text{e} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

corrispondono, rispettivamente, un sistema **impossibile** e un sistema **indeterminato**. □

Ottenuta la forma triangolare-alta, si potrebbe pensare di applicare ancora il *metodo di riduzione di Gauss* così da ottenere un sistema la cui matrice dei coefficienti sia di forma *diagonale*.

Esempio 14

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2x - 7y + 3z = 32 \\ -x - y + z = 3 \end{cases} \text{ e la matrice } \mathbf{orlata} \text{ corrispondente } \mathbf{B}_+ \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -7 & 3 & 32 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

La *riduzione di Gauss* dà la matrice *orlata* della matrice triangolare-alta, \mathbf{B} , dei coefficienti delle incognite,

$$\mathbf{B}_{+,1} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -5/11 & -42/11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Per rendere nulli gli elementi di \mathbf{B} al di *sopra* della diagonale principale, le operazioni necessarie sono, nell'ordine,

$$\begin{cases} R_2 \mapsto R_2 + (5/11)R_3 \\ R_1 \mapsto R_1 + R_3 \\ R_2 \mapsto R_1 - 2R_3 \end{cases}.$$

Quindi, si arriva alla matrice *orlata*, coincidente con il vettore dei termini noti:

$$\mathbf{B}_{+,2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right), \text{ i.e., } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}.$$

□

Osservazione sul controllo della parità\disparità di f in \mathcal{D}_f

Non è sempre immediato decidere, senza un controllo esplicito, se $f: x \mapsto f(x)$ sia *pari* o *dispari*, i.e., se *graf*(f) sia *simmetrico* o *anti-simmetrico* vs. $Y \cong \mathbb{R}$ in un dominio $\mathcal{D}_f \subseteq X \cong \mathbb{R}$ assegnato, massimale o no.

Quindi, dalla definizione generale, è *necessario* e *sufficiente* controllare se risulta, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, che

$$f(x) \mp f(-x) = 0:$$

nel caso ‘-’, f è *pari*; nel caso ‘+’, f è *dispari* (altrimenti, si ha $f(x) \mp f(-x) \neq 0$ per certi $x \in \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}_f$).

□

Come applicazione, si controlli se la funzione

$$x \mapsto f(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right)$$

abbia parità\disparità definita, oppure no, nel suo dominio di realtà.

Quindi, si controlli la parità\disparità (eventuale) della funzione-fattore

$$x \mapsto \phi(x) \equiv \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

Le conclusioni per ϕ sono coerenti con quelle ricavate per f ? Perché?

■

Teorema di equivalenza tra infinitesimi

Due quantità infinitesime in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, sono *equivalenti* (i.e., $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 1$) **sse** (se e solo se)

$\alpha(x) - \beta(x)$ è un infinitesimo di ordine (noto o no) *superiore* vs. *entrambe*:

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Dimostrazione

Necessità:

se, definitivamente in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, risulta $\alpha(x) \sim \beta(x)$, allora

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Sufficienza:

se, definitivamente in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, allora

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 1, \text{ i.e., } \alpha(x) \sim \beta(x), \quad \text{q. e. d. } \blacktriangle$$

■■■

Funzioni su domini ristretti in \mathbb{R}

Sia $f: \mathcal{D}(\subseteq \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}(\subseteq \mathbb{R})$.

Quando esiste, si definisce **determinazione principale** di f la *funzione-restrizione, monotona generalmente*,

$$f_{\mathcal{D}_0}: \mathcal{D}_0 \mapsto \mathcal{C},$$

a un sotto-dominio proprio convenzionale $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, detto l'**insieme principale di definizione** di f . Ciò implica, *generalmente*, che $\exists! (f_{\mathcal{D}_0})^{-1}: \mathcal{C} \mapsto \mathcal{D}_0$ (vs. \mathcal{D}_0 , *generalmente* significa: eccetto che per un numero *finito* di elementi $x \in \mathcal{D}_0$). (†)

Pertanto, se la restrizione $f_{\mathcal{D}_0}$ è definibile, essa conserva il co-dominio \mathcal{C} originario, risultando *generalmente bi-iettiva* tra \mathcal{D}_0 e \mathcal{C} .

Nella specificazione di \mathcal{D}_0 , si conviene di determinare $f_{\mathcal{D}_0}$ così che l'insieme $\text{graf}(f_{\mathcal{D}_0})$, detto il **ramo principale** di $\text{graf}(f_{\mathcal{D}})$, risulti *simmetrico\anti-simmetrico* vs. almeno uno degli assi del riferimento cartesiano e, possibilmente, vs. $\text{graf}(f_{\bar{\mathcal{D}}_0})$ ($\bar{\mathcal{D}}_0$ indica la *chiusura* di \mathcal{D}_0 , *includente* la *frontiera* $\partial \mathcal{D}_0$). Da ciò segue che la stessa specificazione della monotonia di f in \mathcal{D}_0 (crescita o decrescita in senso *generalmente* stretto) corrisponde a criteri di simmetria isometrica – assiale o centrale – evidenti.

Il valore $\bar{y} \equiv f(\bar{x})$ è il **valore principale** di f in $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$.

Salvo specificazione diversa, le operazioni analitiche formali su f , in primo luogo, le *derivazioni* e le *integrazioni*, sono riferite convenzionalmente a \mathcal{D}_0 .

■■■

(†) Riguardo all'impostazione generale dell'argomento e alla terminologia, ci si ispira, di regola, al lavoro *eccellente*:

C. D. PAGANI - S. SALSA, *ANALISI MATEMATICA*, VOL. 1 & 2, ZANICHELLI (-MASSON).

Limiti notevoli non-elementari

$$1. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + q/x)^x \equiv \lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1 + qx)^{1/x} = \lim_{qx \rightarrow 0^\pm} ((1 + qx)^{1/(qx)})^q = \left(\lim_{qx \rightarrow 0^\pm} (1 + qx)^{1/(qx)} \right)^q = e^q},$$

$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$2. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_b(1 + ax)}{x} = \frac{a}{\ln b}},$$

$\forall \{a, b\} \in \mathbb{R} \times \{(0, 1) \times (1, +\infty)\}$.

Infatti, $(\log_b(1 + ax))/x = \log_b(1 + ax)^{1/x}$ e, dal limite 1, segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_b(1 + ax)^{1/x} = \log_b \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} \right) = \log_b e^a = a \log_b e \equiv \frac{a}{\ln b}.$$

$$3. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^{ax} - 1}{x} = a \ln b},$$

$\forall \{a, b\} \in (\mathbb{R}^+)^2$.

Infatti, posto $t := \frac{b^{ax} - 1}{x}$, si ha che $ax = \log_b(1 + tx)$. Inoltre, $x \rightarrow 0 \Rightarrow ax \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow tx \rightarrow 0. \text{ Quindi, } \frac{b^{ax} - 1}{x} \equiv \frac{b^{\log_b(1+tx)} - 1}{a} = \frac{tx}{\log_b(1+tx)} \equiv \frac{a}{\log_b(1+tx)}, \text{ da cui,}$$

posto $w := tx$, segue che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^{ax} - 1}{x} \equiv a \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{\log_b(1+w)/w} = a \ln b$, per il limite 2.

$$4. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ax)^b - 1}{x} = ab}.$$

Infatti, per $x \rightarrow 0$, risulta

$$\frac{(1 + ax)^b - 1}{x} \equiv \frac{((1 + ax)^{1/(ax)})^{abx} - 1}{x} \sim \frac{e^{abx} - 1}{x} \rightarrow ab \ln e \equiv ab, \text{ per il limite 3.}$$

5. Si abbiano le condizioni simultanee

$$\begin{cases} f(x) \in \mathfrak{C}_f \subseteq \mathbb{R}^+ \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lambda \ (\in \mathbb{R}^+) \\ \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \end{cases}.$$

Allora, risulta

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x))^{g(x)} - 1}{g(x)} = \ln \lambda .$$

Infatti, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x))^{g(x)} - 1}{g(x)} \equiv \lim_{x \rightarrow c} \frac{e^{g(x) \ln f(x)} - 1}{g(x) \ln f(x)} \ln f(x)$

$$= \left(\lim_{w \rightarrow 0} (e^w - 1)/w \right) \left(\lim_{x \rightarrow c} \ln f(x) \right), \quad \text{dove, } w := g(x) \ln f(x),$$

$$= 1 \cdot \ln \lambda \equiv \ln \lambda, \quad \text{per il limite 3.}$$

6. Riduzione della forma indeterminata $[\pm \infty \mp \infty]$

Sia $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} [\pm \infty \mp \infty]$.

Allora, $\forall x$ tale che $f(x)g(x) \neq 0$, si può scrivere

$$f(x) - g(x) \equiv (1/g(x) - 1/f(x)) f(x)g(x) \equiv f(x)/g(x) - g(x)/f(x)$$

e ricondursi a forme indeterminate del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$, idonee all'applicazione delle Regole – unicamente *necessarie* (!) – di *de l'Hôpital* (opportunamente soppiantabili dal più agevole *Teorema di Taylor-Maclaurin*).

7. Riduzione della forma indeterminata $[1^\infty]$

Sia $f(x) \in \mathbb{R}^+ \wedge \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$.

Poiché, per $x \rightarrow c$, $f(x) \sim 1 + \alpha(x)$, con $\alpha(x) = o(1)$, allora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} ((f(x))^{g(x)}) &= \lim_{x \rightarrow c} \left((1 + \alpha(x))^{1/\alpha(x)} \right)^{\alpha(x)g(x)} \\ &\equiv \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \left((1 + \alpha(x))^{1/\alpha(x)} \right)^{\alpha(x)g(x)} \equiv \lim_{x \rightarrow c} e^{(f(x)-1)g(x)} \equiv e^{\lim_{x \rightarrow c} (f(x)-1)g(x)}, \end{aligned}$$

poiché, in forma equivalente, si ha che $\alpha(x) \sim f(x) - 1$. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow c} ((f(x))^{g(x)}) = e^{\lim_{x \rightarrow c} (f(x)-1)g(x)},$$

i.e., si ottiene la trasformazione di forma indeterminata $[1^\infty] \mapsto [0 \cdot \infty]$.

8. Riduzione delle forme indeterminate $[\log_0 0]$, $[\log_0 \infty]$, $[\log_\infty 0]$, $[\log_\infty \infty]$, $[\log_1 1]$

L'identità – purché ammissibile in \mathbb{R} –

$$\log_{g(x)} f(x) \equiv \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}$$

riduce le prime quattro forme indeterminate alla forma $[\infty/\infty]$ e la quinta alla forma $[0/0]$.

Derivate

A. Derivata di un prodotto di funzioni (derivabili)

Sia $\phi(x) := f(x)g(x)$. Costruita la variazione

$$\begin{aligned}\Delta\phi(x) &= \Delta(f(x)g(x)) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &\equiv f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))g(x) \\ &= f(x+h)\Delta g(x) + (\Delta f(x))g(x),\end{aligned}$$

si ha che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x+h) \frac{\Delta g(x)}{h} + \frac{\Delta f(x)}{h} g(x) \right) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

■

B. Derivata di una funzione (derivabile) composta

Sotto le condizioni specificate dal teorema pertinente (i.e., derivabilità di f e di g ove richiesto), la variazione generale della funzione composta $\psi(x) := (g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$ si scrive come

$$\Delta\psi(x) \equiv \Delta((g \circ f)(x)) \equiv (g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) \equiv g(f(x+h)) - g(f(x)). \quad (1)$$

Ponendo

$$y := f(x) \quad \wedge \quad k := \Delta y \equiv \Delta f(x) \equiv f(x+h) - f(x) \equiv f(x+h) - y,$$

segue che

$$f(x+h) = y + k. \quad (2)$$

Poiché $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_f)$, è evidente, dall'Eq. (2), che $h \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0$.

Inoltre, essendo g derivabile vs. la variabile y , si costruisce il rapporto incrementale

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k} \equiv \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = g'(y) + \varepsilon(k), \quad \text{con } \varepsilon(k) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} 0.$$

Così, si può porre l'Eq. (1) nella forma

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) \equiv g(y+k) - g(y) = k(g'(y) + \varepsilon(k)). \quad (3)$$

Ora, dividendo l'Eq. (3) per h e tenendo conto che $k/h \equiv \Delta f(x)/h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'(x)$, risulta:

$$\frac{\Delta((g \circ f)(x))}{h} \equiv \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{k}{h} (g'(y) + \varepsilon(k)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} g'(y) f'(x). \quad (4)$$

Pertanto, esplicitamente vs. x , risulta la *regola di derivazione 'a catena'* (*chain rule*)

$$\frac{d}{dx}((g \circ f)(x)) \equiv \frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{dg}{dy} \Big|_{y=f(x)} \cdot \frac{df}{dx}. \quad (5)$$

■

C. Derivata di una funzione (derivabile) inversa

L'inversione di una funzione costituisce un'operazione particolare di *composizione funzionale*, quella *mediata* dallo scambio (corrispondenza biunivoca) $\mathfrak{D}_f \rightleftharpoons \mathfrak{C}_f$, i.e., dall'isometria di *riflessione assiale* di $\text{graf}(f)$ vs. la retta bisettrice del 1.o e del 3.o quadrante cartesiano, $y = x$.

In tal senso, sia $f : (a, b) \equiv \mathfrak{D}_f \subseteq X \rightleftharpoons \mathbb{R}$, *derivabile e strettamente monotona*, con $f'(x) \neq 0$ è evidente, inoltre, che $f : (a, b) \equiv \mathfrak{C}_f \subseteq Y \rightleftharpoons \mathbb{R}$, data la *commutabilità* dei domini.

Da $x (= x(y)) = f^{-1}(y) \equiv f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)$, si deduce l'uguaglianza *derivazionale* tra

$$\frac{dx}{dy} \equiv \frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = \left. \frac{df^{-1}(y)}{dy} \right|_{y=f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}, \quad (6.1)$$

come derivata di una *funzione composta*, (v. Eq. (5)), e

$$1 \equiv \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)), \quad (6.2)$$

come derivata della rappresentazione, mediante f , della *funzione-identità*, $I_{(a,b)} \equiv (f^{-1} \circ f)_{(a,b)}$.

Dividendo membro-a-membro l'Eq. (6.2) per l'Eq. (6.1), si ha $df^{-1}/dy \big|_{y=f(x)} = 1/(df/dx)$, i.e., essendo $x \equiv f^{-1}(y)$ in $\mathfrak{D}_{f^{-1}} \equiv \mathfrak{C}_f$,

$$dx/dy = 1/f'(x) = (dy/dx) \big|_{x=f^{-1}(y)}. \quad (7)$$

Reciprocando in (a, b) l'Eq. (7) o, in modo equivalente (data l'*invertibilità* di f), scambiando tra loro le variabili *bi-iettive* x e y , si scrive $dy/dx = 1/(dx/dy)$. Quindi, riconsiderando x come variabile *indipendente*, risulta

$$dy/dx = 1/(dx/dy) \big|_{y=f(x)}. \quad (8)$$

La *biunivocità* della corrispondenza tra gli elementi $x \in \mathfrak{D}_f$ e $y \in \mathfrak{C}_f$, espressa dalle azioni degli operatori f e f^{-1} , dà origine alle due coppie *alternative* di relazioni *equivalenti* seguenti:

$$\text{se } \begin{cases} y := f(x) \\ x := f^{-1}(y) \end{cases}, \text{ allora, } \begin{cases} \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \equiv \frac{1}{df^{-1}(y)/dy} \bigg|_{y=f(x)} \\ \frac{dx}{dy} \equiv \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \equiv \frac{1}{df(x)/dx} \bigg|_{x=f^{-1}(y)} \end{cases}, \quad (9)$$

$$\text{se } \begin{cases} y := f^{-1}(x) \\ x := f(y) \end{cases}, \text{ allora, } \begin{cases} \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \equiv \frac{1}{df(y)/dy} \bigg|_{y=f^{-1}(x)} \\ \frac{dx}{dy} \equiv \frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \equiv \frac{1}{df^{-1}(x)/dx} \bigg|_{x=f(y)} \end{cases}. \quad (10)$$

La scelta tra la coppia di relazioni (9) e la (10) dipende dal contesto rappresentativo specifico, i.e., dalla *convenzione* di definizione della funzione da considerare come *diretta* e, rispettivamente, come *inversa* e, pertanto, dei domini e co-domini di ciascuna. ■

D. Derivate modulari

La funzione *valore assoluto* o *modulo*, $|\dots|$, va considerata come un'applicazione *composta* da \mathbb{R} in \mathbb{R}_0^+ . Definito il simbolo generale $\text{sgn}(\phi(x)) := |\phi(x)|/\phi(x) \equiv \phi(x)/|\phi(x)| \equiv \pm 1$,

D1 sia $p := |x|$. Allora,

$$\frac{d}{dx} f(|x|) = \frac{df(p)}{dp} \frac{dp}{dx} = f'(p) \Big|_{p=|x|} \frac{|x|}{x} \equiv \text{sgn}(x) f'(p) \Big|_{p=|x|}; \quad (11.1)$$

D2 sia $y := f(x)$. Allora,

$$\frac{d}{dx} |f(x)| \equiv \frac{d|y|}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{|y|}{y} f'(x) \equiv \text{sgn}(f(x)) f'(x); \quad (11.2)$$

D3 sia $s := |f(x)|$. Allora, mediante l'identità (11.2),

$$\frac{d}{dx} g(|f(x)|) = \frac{dg(s)}{ds} \frac{ds}{dx} = g'(s) \Big|_{s=|f(x)|} \text{sgn}(f(x)) f'(x). \quad (11.3)$$

■

E. Derivate delle funzioni inverse-circolari

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1} x &= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}, & \frac{d}{dx} \cos^{-1} x &= -\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}, \\ \frac{d}{dx} \tan^{-1} x &= \frac{1}{1+x^2}, & \frac{d}{dx} \cot^{-1} x &= -\frac{1}{1+x^2}, \\ \frac{d}{dx} \csc^{-1} x &= -\frac{1}{x(x^2-1)^{1/2}}, & \frac{d}{dx} \sec^{-1} x &= \frac{1}{x(x^2-1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

■

F. Derivate delle funzioni inverse-iperboliche

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x &= \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x &= \frac{1}{(x^2-1)^{1/2}}, & \forall x \in (1, +\infty), \\ \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x &= \frac{1}{1-x^2}, & \forall x \in (-1, 1), \\ \frac{d}{dx} \coth^{-1} x &= \frac{1}{1-x^2}, & \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ \frac{d}{dx} \text{sech}^{-1} x &= -\frac{1}{x(1-x^2)^{1/2}}, & \forall x \in (0, 1), \\ \frac{d}{dx} \text{csch}^{-1} x &= -\frac{1}{|x|(1+x^2)^{1/2}}, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

■

G. Convenzioni di scrittura con le derivate

Stabilite convenzionalmente le identità simboliche *semi-algebriche*,

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x),$$

ciascuna con le sue *caratterizzazioni originarie*, è, poi, necessaria una certa *cautela* nell'uso delle stesse nella *composizione funzionale*, a cominciare dal caso del *cambiamento proporzionale di scala* della variabile indipendente.

In generale, infatti, si riconosce che, $\forall \alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(\alpha x) &\equiv f'(u)|_{u=\alpha x} = \frac{d}{du} f(u) \Big|_{u=\alpha x} \\ &\neq \frac{d}{dx} f(\alpha x) = \alpha \left(\frac{d}{du} f(u) \Big|_{u=\alpha x} \right) \end{aligned}$$

In altri termini, risulta

$$f'(\alpha x) \equiv \left(\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} \right) f(\alpha x). \quad (12.1)$$

Tale osservazione si estende, ovviamente (e a maggior ragione!), alle derivate successive ($n > 1$), per le quali, si ha

$$\begin{aligned} f^{(n)}(\alpha x) &\equiv f^{(n)}(u)|_{u=\alpha x} = \frac{d^n}{du^n} f(u) \Big|_{u=\alpha x} \\ &\neq \frac{d^n}{dx^n} f(\alpha x) = \alpha^n \left(\frac{d^n}{du^n} f(u) \Big|_{u=\alpha x} \right), \end{aligned}$$

i.e., esplicitamente,

$$f^{(n)}(\alpha x) \equiv \frac{d^n}{(\alpha dx)^n} f(\alpha x) \equiv \frac{1}{\alpha^n} \frac{d^n}{dx^n} f(\alpha x). \quad (12.2)$$

■

H. Derivazione 1.a composta in un cambiamento di variabile indipendente

Dalla Regola di Derivazione ‘*a catena*’, Eq. (5), si ricava una rappresentazione molto utile in varie circostanze applicative di particolare contenuto formale (Analisi Variazionale, Fisica Teorica, etc.) che consente di ri-esprimere la derivata dy/dx ($y = y(x)$) *completamente* mediante una variabile indipendente più fondamentale, u . Potendo *sempre* assumere sia x che y come *immagini* di u , i.e., $x = x(u)$ e $y = y(u)$, si calcola

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy(u)}{dx(u)} = \frac{du}{dx(u)} \frac{dy(u)}{du} \equiv \frac{1}{dx(u)/du} \frac{dy(u)}{du}, \quad \text{i.e.,} \\ &\frac{dy}{dx} = \frac{y'(u)}{x'(u)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ne segue la forma *dell'operatore derivata* I^a attraverso la variabile intermedia x , vs. alla quale, è definita dy/dx :

$$\frac{d}{dx} \equiv \frac{1}{x'(u)} \frac{d}{du}. \quad (14)$$

□

Le espressioni delle *derivate successive* sono ottenibili iterativamente dall'Idn. operatoriale (14):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &\equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{x'} \frac{d}{du} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \frac{x' y'' - y' x''}{(x')^3}, \\ &\equiv \frac{1}{(x'(u))^3} \begin{vmatrix} x'(u) & y'(u) \\ x''(u) & y''(u) \end{vmatrix}, \quad \text{in forma simbolica di } \textit{determinante}, \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} &\equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{1}{x'} \frac{d}{du} \left(\frac{x' y'' - y' x''}{(x')^3} \right) = \dots \\ &= \frac{y'''}{(x')^3} - \frac{x''' y' + 3 x'' y''}{(x')^4} + \frac{3 (x'')^2 y'}{(x')^5}, \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y}{dx^4} &\equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right) = \frac{1}{x'} \frac{d}{du} \left(\frac{y'''}{(x')^3} - \frac{x''' y' + 3 x'' y''}{(x')^4} + \frac{3 (x'')^2 y'}{(x')^5} \right) = \dots \\ &= \frac{y^{(4)}}{(x')^4} - \frac{6 x'' y'''}{(x')^5} + \frac{4 x''' y'' + x^{(4)} y'}{(x')^5} + \frac{5 x'' (2 x''' y' + 3 x'' y'')}{(x')^6} - \frac{15 (x'')^3 y'}{(x')^7}, \end{aligned} \quad (15.3)$$

non dimenticando mai che, e.g., $x''' \equiv x'''(u)$, $y^{(4)} \equiv y^{(4)}(u)$, etc. . (†)

I. Derivazione parziale libera vs. vincolata

Si considerino $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e una funzione scalare di vettore $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$, derivabile (parzialmente) vs. tutte le sue componenti variabili scalari $\{x_r\}$. Di queste, scelte x_j e x_k , con $x_j \neq x_k$, i procedimenti di calcolo espliciti delle derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{x_k} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{x_k}, \quad (2)$$

sono *formalmente identici* ma il significato delle operazioni è un po' *diverso*: nella derivazione (1), la variabile x_k , come *qualsiasi altra* $\neq x_j$, rimane *spettatrice* durante la derivazione di f vs. x_j , *come se* fosse una *costante* o un *parametro autonomo* (benché, di fatto, non sia tale). In altre parole, $\partial f / \partial x_j$ esprime *unicamente* la variazione-di f determinata dalla variazione di x_j , *ignorando* totalmente il comportamento di *ciascuna* delle altre variabili indipendenti x_r , quale che esso sia.

Invece, i simboli alternativi di derivazione (2) indicano che $\partial f / \partial x_j$ viene eseguita mantenendo la variabile x_k *consapevolmente* costante. Quindi, diversamente dalla derivazione *libera* (1), la derivazione (2) appare *vincolata* in modo *esplicito e specifico*. Tale distinzione sottile risulta *cruciale* nella rappresentazione dell'analisi e dell'evoluzione di processi dinamici particolari, e.g., in Termodinamica, in Meccanica Statistica, in Econometria, etc. .

■

(†) Discussioni chiare ed esaustive sul tema delle derivazioni vs. il cambiamento di variabili indipendenti sono contenute, e.g., in:

- Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, CH. 7, § 1-3, 2nd ED., PRENTICE-HALL, INC. (1976);
- WREDE, R. C. - SPIEGEL, M. R., *Advanced Calculus*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 3rd ED., MCGRAW-HILL (2010) (scaricabile).

J. Formule di derivazione implicita

Nell'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si consideri la funzione $(x; y) \mapsto g \in \mathcal{C}^k(A)$, con $k \in \mathbb{Z}^+$ assegnato. Inoltre, l'equazione $g(x, y) = 0$ definisca, in A , il grafico di un'unica funzione $x \mapsto y(x)$ che soddisfa l'identità

$$g(x, y(x)) \equiv 0. \quad (1)$$

Derivando simultaneamente i membri dell'Idn. (1) vs. x , si ottiene

$$0 \equiv \frac{d}{dx} g(x, y(x)) = g_x + g_y y', \quad (2)$$

con i simboli sintetici soliti: $g_x \equiv \partial g(x, y)/\partial x$, $g_y \equiv \partial g(x, y)/\partial y$ e $y' \equiv dy(x)/dx$.

Se $g_y(x, y(x)) \neq 0$ generalmente in A , dall'Idn. (2), discende la tesi (globale) del *Teorema di Dini* scalare in 2-dim:

$$y' = -\frac{g_x(x, y(x))}{g_y(x, y(x))} \quad (\equiv y'(x)). \quad (3)$$

Derivando simultaneamente i membri dell'Idn. (2) vs. x , si calcola

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x, y(x)) = \frac{d}{dx} (g_x + g_y y') = \frac{d g_x}{dx} + \frac{d}{dx} (g_y y') = \frac{d g_x}{dx} + \left(\frac{d g_y}{dx} y' + g_y y'' \right) = 0,$$

da cui, osservato che $g_x \equiv g_x(x, y(x)) \wedge g_y \equiv g_y(x, y(x))$ e prendendo l'Idn. (2) come *prototipo* formale, risulta

$$0 \equiv (g_x)_x + (g_x)_y y' + ((g_y)_x + (g_y)_y y') y' + g_y y''. \quad (4)$$

Poiché vale il *Teorema di Schwarz* relativo all'uguaglianza delle derivate parziali miste, risolvendo vs. y'' , si trova

$$y'' = -\frac{1}{g_y} (g_{xx} + 2g_{xy} y' + g_y (y')^2) \quad (\equiv y''(x)). \quad (5)$$

Ancora con il metodo del *crivello*, derivando simultaneamente i membri dell'Idn. *nulla* (4) vs. x , risulta

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} (g_{xx} + 2g_{xy} y' + g_{yy} (y')^2 + g_y y'') \equiv \frac{d^2}{dx^2} (g_x + g_y y') \\ &= (g_{xx})_x + (g_{xx})_y y' + 2 \frac{d}{dx} (g_{xy} y') + \frac{d}{dx} (g_{yy} (y')^2) + \frac{d}{dx} (g_y y'') \\ &= g_{xxx} + g_{xxy} y' + 2((g_{xyx} + g_{xyy} y') y' + g_{xy} y'') + ((g_{yyx} + g_{yyy} y') (y')^2 + g_{yy} \cdot 2y' y'') + ((g_{yx} + g_{yy} y') y'' + g_y y''') \\ &= g_{xxx} + 3(g_{xxy} y' + g_{xyy} (y')^2 + (g_{xy} + g_{yy} y') y'') + g_{yyy} (y')^3 + g_y y'''. \end{aligned} \quad (6)$$

così che, dall'Idn. (6), si può esplicitare y''' , scrivendo

$$y''' = -\frac{1}{g_y} (g_{xxx} + 3(g_{xxy} y' + g_{xyy} (y')^2 + (g_{xy} + g_{yy} y') y'') + g_{yyy} (y')^3) \quad (\equiv y'''(x)). \quad (7)$$

Qui, y' e y'' sono espresse, rispettivamente, dalle Eq.i (3) e (5). Gli algoritmi formali delle derivate $y^{(n)}$ successive sono solo onerosi; nella pratica, è preferibile procedere direttamente sulla g *specificata data*. Comunque, se valgono le condizioni sufficienti di *regolarità* per g (*Teorema di Schwarz*), le Eq.i (3), (5) e (7) sono applicabili alla costruzione dei primi polinomi approssimanti di Taylor\Maclaurin in $\mathcal{U}_\delta((x_0; y_0)) \equiv \mathcal{U}_\delta((x_0; y(x_0)) \subseteq A$, con $\delta = o(1)$.

Esercizio

Iniziando dall'Idn. *nulla* (6), si verifichi che il metodo del *crivello* precedente dà

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= -\frac{1}{g_y} (g_{xxxx} + 4g_{xxx} y' + 6g_{xxy} (y')^2 + 4g_{xyy} (y')^3 + g_{yyy} (y')^4 + \\ &\quad + 4g_{xxy} y'' + g_{xyy} (12y'' + y''') + 6g_{yyy} (y')^2 y'' + 4g_{xy} y''' + 3g_{yy} (y' + y'') y''') \quad (\equiv y^{(4)}(x)), \end{aligned} \quad (8)$$

nella quale, sono state *cumulate* le rappresentazioni implicite precedenti di $y'(x)$, $y''(x)$ e $y'''(x)$.

Il procedimento auto-iterativo dovrebbe essere ormai chiaro e facilmente estendibile e programmabile a tutti gli ordini di derivazione successivi di $y(x)$.

Problema

Si consideri l'equazione implicita $g(x, y, z) = 0$ che, soddisfacendo le condizioni del *Teorema di Dini* in un intorno $\mathcal{U}_\delta((x_0; y_0)) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ (A aperto), definisce un'unica funzione $(x; y) \mapsto z(x, y) \in \mathcal{C}^2(A)$ in $\mathcal{U}_\delta((x_0; y_0))$.

Si verifichi l'identità differenziale del 2° ordine

$$(\nabla g \cdot d\xi)^{(2)} + g_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g_x}{g_z} \right) dx^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g_y}{g_z} \right) dx dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{g_y}{g_z} \right) dy^2 \right) = 0, \quad \text{con } (x; y; z) \equiv \xi.$$

Chi scrive ha incontrato tale identità in calcoli gravitazionali eseguiti nella *metrica di Schwarzschild*.

Soluzione

La forma generale di $d^2 g$,

$$d^2 g := (g_x dx + g_y dy + g_z dz)^{(2)} \equiv (\nabla g \cdot d\xi)^{(2)}, \quad (1)$$

non mette in evidenza legami *specifici* che *possano* sussistere tra le variabili x, y, z , prese come *indipendenti*.

Se, però, $0 = g(x, y, z) \equiv g(x, y, z(x, y))$ in A , come avviene in questo caso, allora,

$$0 \equiv dg(x, y, z(x, y)) \quad \text{e, quindi,}$$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv d^2 g(x, y, z(x, y)) \equiv d(dg(x, y, z) \equiv d(g_x dx + g_y dy + g_z dz)) \\ &= d(g_x dx) + d(g_y dy) + d(g_z dz) \\ &= d(g_x dx) + d(g_y dy) + d(g_z dz) \\ &= d(g_x dx) + d(g_y dy) + ((dg_z)dz + g_z d^2 z), \end{aligned} \quad (2)$$

avendo tenuto conto, riguardo al termine differenziale $d(g_z dz)$, che solo i parametri di variazione dx e dy sono da considerarsi *indipendenti*, mentre $dz \equiv z_x dx + z_y dy$ dipende da questi, chiaramente.

Espandendo ulteriormente l'Idn. (2) e applicando il *Teorema di Schwarz* dove appropriato, si scrive

$$\begin{aligned} 0 &\equiv d^2 g(x, y, z(x, y)) \\ &= \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} dx + \frac{\partial g_x}{\partial y} dy + \frac{\partial g_x}{\partial z} dz \right) dx + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} dx + \frac{\partial g_y}{\partial y} dy + \frac{\partial g_y}{\partial z} dz \right) dy + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} dx + \frac{\partial g_z}{\partial y} dy + \frac{\partial g_z}{\partial z} dz \right) dz + g_z d^2 z(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} dz dx \right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} dz dy \right) + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} dz^2 \right) + g_z d^2 z(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} dy dz \right) + g_z d^2 z(x, y) \\ &= (g_x dx + g_y dy + g_z dz)^{(2)} + g_z (z_x dx + z_y dy)^{(2)} \\ &\equiv (\nabla g \cdot d\xi)^{(2)} + g_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g_x}{g_z} \right) dx^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g_y}{g_z} \right) dx dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{g_y}{g_z} \right) dy^2 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Si noti l'uguaglianza: $\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g_y}{g_z} \right) dy dx \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{g_x}{g_z} \right) dx dy$ (il prodotto $dx dy$ è *commutativo*, ovviamente).

Nell'Idn. (3), che conclude la verifica, il primo termine è il differenziale generale 2° di g , quello in cui x, y, z compaiono tutte e tre come variabili *indipendenti*, mentre il secondo termine costituisce la 'correzione' al 2° ordine, *necessaria* a causa della *dipendenza* specifica di z da x e da y .

■■■

Problema (elementare ma utile)

Siano $f \in \mathcal{C}^2(A)$ almeno generalmente e l'aperto $A \subseteq \mathbb{R}$; inoltre, sia $x_0 \in A$ e $(x_0; y_0) \in \text{graf}(f)$.

Si determini l'equazione generale della *retta tangente* a $\text{graf}(f)$ in $(x_0; y_0)$. Da questa, si deduca il risultato per una linea piana γ *qualsiasi* definita *implicitamente* in un aperto $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Inoltre, si determini la forma generale della *retta normale* alla linea in $(x_0; y_0)$.

Soluzione

Se $(x_0; y_0)$ è un punto di tangenza verticale per $\text{graf}(f)$ (di flesso, di cuspide uni- o bi-laterale, di inversione o di arresto), allora, banalmente, la *retta tangente* a $\text{graf}(f)$ ha equazione

$$x = x_0. \quad (1)$$

Altrimenti, l'equazione della *retta tangente* avrà la forma esplicita

$$y = mx + q, \quad (2)$$

con m e q da determinarsi.

Poiché, in $(x_0; y_0)$, $\text{graf}(f)$ ha la *stessa pendenza* vs. l'asse X della *retta tangente locale*, si conclude che

$$m \equiv f'(x_0). \quad (3)$$

Per $x = x_0$, anche l'ordinata di $\text{graf}(f)$ e quella della *retta tangente locale* coincidono, $f(x_0) \equiv y_0$, così che l'Eq. incognita (2) fornisce l'uguaglianza *puntuale* $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + q$. Da questa, si ricava

$$q = f(x_0) - f'(x_0)x_0. \quad (4)$$

Quindi, l'equazione della *retta tangente* in $(x_0; y_0)$ a $\text{graf}(f)$ è

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{f'(x_0)x}_m + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_q \\ &\equiv f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \end{aligned} \quad (5)$$

In particolare, se $(x_0; y_0) \in \text{graf}(g(x, y)) \subset A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$, con $y = y(x)$ in $A \wedge g \in \mathcal{C}^1(A)$ almeno, allora, per il *Teorema di Dini*, l'Eq. (5) diventa

$$y = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0. \quad (5.1)$$

Infine, se $f'(x_0) \neq 0$, si verifichi che l'equazione della *retta normale* alla linea γ in $(x_0; y_0)$ è data da

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0, \quad (6)$$

mentre, per la rappresentazione *implicita*, risulta

$$y = \frac{g_y(x_0, y_0)}{g_x(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0. \quad (6.1)$$

■■■

Espansioni asintotiche vs. argomenti infinitesimi (Polinomi e funzioni approssimanti)

Se $\alpha \equiv \alpha(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$, allora, in ogni δ -intorno *infinitesimo* $U_\delta(x_0)$, il *Teorema di Taylor* fissa le approssimazioni polinomiali *definitive* (asintotiche) seguenti (le sole eccezioni quasi-polinomiali (\cot , \csc , sech^{-1} , ...) richiedono *funzioni generatrici* specifiche ([†]):

$$e^\alpha \sim 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\alpha^5}{120} + \frac{\alpha^6}{720};$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^6}{6};$$

$$\cos \alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^6}{720} + \frac{\alpha^8}{40320};$$

$$\cos^{-1} \alpha \sim \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \alpha;$$

$$\sin \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^7}{5040} + \frac{\alpha^9}{362880};$$

$$\sin^{-1} \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{3}{40}\alpha^5 + \frac{5}{112}\alpha^7 + \frac{35}{1152}\alpha^9;$$

$$\tan \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\alpha^5 + \frac{17}{315}\alpha^7 + \frac{62}{2835}\alpha^9;$$

$$\tan^{-1} \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} + \frac{\alpha^9}{9};$$

$$\cot \alpha \sim \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} - \frac{2}{945}\alpha^5 - \frac{\alpha^7}{4725};$$

$$\cot^{-1} \alpha \sim \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \alpha;$$

$$\sec \alpha \sim 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{61}{720}\alpha^6 + \frac{277}{8064}\alpha^8;$$

$\sec^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\csc \alpha \sim \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{6} + \frac{7}{360}\alpha^3 + \frac{31}{15120}\alpha^5 + \frac{127}{604800}\alpha^7;$$

$\csc^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\cosh \alpha \sim 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\alpha^6}{720} + \frac{\alpha^8}{40320};$$

$\cosh^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\sinh \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} + \frac{\alpha^7}{5040} + \frac{\alpha^9}{362880};$$

$$\sinh^{-1} \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{3}{40}\alpha^5 - \frac{5}{112}\alpha^7 + \frac{35}{1152}\alpha^9;$$

$$\tanh \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\alpha^5 - \frac{17}{315}\alpha^7 + \frac{62}{2835}\alpha^9;$$

$$\tanh^{-1} \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \frac{\alpha^7}{7} + \frac{\alpha^9}{9};$$

$$\coth \alpha \sim \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \frac{2}{945}\alpha^5 - \frac{\alpha^7}{4725};$$

$\coth^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\operatorname{sech} \alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5}{24}\alpha^4 - \frac{61}{720}\alpha^6 + \frac{277}{8064}\alpha^8;$$

$$\operatorname{sech}^{-1} \alpha \sim \ln \frac{2}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{32}\alpha^4 - \frac{5}{96}\alpha^6 - \frac{35}{1024}\alpha^8;$$

$$\operatorname{csch} \alpha \sim \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{6} + \frac{7}{360}\alpha^3 - \frac{31}{15120}\alpha^5 + \frac{127}{604800}\alpha^7;$$

$$\operatorname{csch}^{-1} \alpha \sim \ln \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{32}\alpha^4 + \frac{5}{96}\alpha^6 - \frac{35}{1024}\alpha^8;$$

$$(1 + \alpha)^\eta \sim 1 + \eta\alpha + \frac{\eta(\eta-1)}{2}\alpha^2 + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{6}\alpha^3 + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)(\eta-3)}{24}\alpha^4 + \downarrow \\ \uparrow + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)(\eta-3)(\eta-4)}{120}\alpha^5 + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)(\eta-3)(\eta-4)(\eta-5)}{720}\alpha^6, \quad \forall \eta \in \mathbb{R};$$

$$gd \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{24} - \frac{61}{5040}\alpha^7 + \frac{277}{72566}\alpha^9;$$

$$gd^{-1} \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{24} + \frac{61}{5040}\alpha^7 + \frac{277}{72566}\alpha^9.$$

■■■

([†]) Si veda, e.g., il math-notebook: *Determinazione di serie di potenze in \mathbb{R} dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler.*

**Alcune rappresentazioni di π mediante
combinazioni lineari di arco-tangenti**

$$\pi = 16 \tan^{-1}(1/5) - 4 \tan^{-1}(1/239) \quad (J. Machin, 1706);$$

$$\pi = 8 \tan^{-1}(1/2) - 4 \tan^{-1}(1/7) \quad (J. Hermann, 1706);$$

$$\pi = 32 \tan^{-1}(1/10) - 4 \tan^{-1}(1/239) - 16 \tan^{-1}(1/515) \quad (S. Klingenstierna, 1730);$$

$$\pi = 4 \tan^{-1}(1/2) + 4 \tan^{-1}(1/3) \quad (L. Euler, 1738);$$

$$\pi = 20 \tan^{-1}(1/7) + 8 \tan^{-1}(3/79) \quad (L. Euler, 1755);$$

$$\pi = 16 \tan^{-1}(1/5) - 4 \tan^{-1}(1/70) + 4 \tan^{-1}(1/99) \quad (L. Euler, 1764);$$

$$\pi = 8 \tan^{-1}(1/3) + 4 \tan^{-1}(1/7) \quad (C. Hutton, 1776);$$

$$\pi = 12 \tan^{-1}(1/4) + 4 \tan^{-1}(5/99) \quad (C. Hutton, 1776);$$

$$\pi = 8 \tan^{-1}(1/5) + 4 \tan^{-1}(1/7) + 8 \tan^{-1}(1/8) \quad (K. H. Schellbach, 1832);$$

$$\pi = 48 \tan^{-1}(1/18) + 32 \tan^{-1}(1/57) - 20 \tan^{-1}(1/239) \quad (J. C. F. Gauss, 1836);$$

$$\pi = 48 \tan^{-1}(1/38) + 80 \tan^{-1}(1/57) + 28 \tan^{-1}(1/239) + 96 \tan^{-1}(1/268) \quad (J. C. F. Gauss, 1836);$$

$$\pi = 4 \tan^{-1}(1/2) + 4 \tan^{-1}(1/5) + 4 \tan^{-1}(1/8) \quad (K. L. S. von Strassnitzky, 1844);$$

$$\pi = 12 \tan^{-1}(1/4) + 4 \tan^{-1}(1/20) + 4 \tan^{-1}(1/1985) \quad (S. L. Loney, 1893);$$

$$\pi = 24 \tan^{-1}(1/8) + 8 \tan^{-1}(1/57) + 4 \tan^{-1}(1/239) \quad (F. C. M. Störmer, 1896);$$

$$\pi = 176 \tan^{-1}(1/57) + 28 \tan^{-1}(1/239) - 48 \tan^{-1}(1/682) + 96 \tan^{-1}(1/12943) \quad (F. C. M. Störmer, 1896);$$

$$\pi = 48 \tan^{-1}(1/49) + 128 \tan^{-1}(1/57) - 20 \tan^{-1}(1/239) + 48 \tan^{-1}(1/110443) \quad (K. Takano, 1982).$$

In termini di *Numeri di Fibonacci*, F_k , con $k \in \mathbb{Z}_0^+$ (si ricordi che $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $\forall k \geq 2$), vale la formula *auto-espansiva* generale seguente:

$$\pi = 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2p+2}}\right) + 4 \sum_{n=1}^p \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2r+1}}\right),$$

nella quale, si sottintende che è $p \geq 1$.



Identità indiciali per le somme finite\serie iterative

- $\cos(n\pi) \equiv \sin((n+1/2)\pi) \equiv \binom{-1}{n} \equiv (-1)^n;$ (1)

- $\cos((n+1/2)\pi) \equiv \sin n\pi \equiv 0;$ (2)

- $\cos((n-1/2)\pi/2) \equiv \sin((n+1/2)\pi/2) \equiv (-1)^{n(n+3)/2}/2^{1/2};$ (3)

- $\cos(n\pi/2) \equiv (1+(-1)^n)i^n/2 \equiv \delta_{1,(-1)^n} i^n \quad (i^2 = -1);$ (4)

- $\sin(n\pi/2) \equiv (1-(-1)^n)i^{n-1}/2 \equiv \delta_{-1,(-1)^n} i^{n-1};$ (5)

- $\sin(n\pi/4) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(n^2+4n+11)/8}}{2^{1/2}}, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \begin{cases} (-1)^{(n-2)/4}, & \text{se } n \text{ è pari } \wedge n/2 \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } n \wedge n/2 \text{ sono pari;} \end{cases} \end{cases}$ (6)

- somma di addendi di indice *pari* (v. Eq. (4)):

$$\sum_{n=0,2,4,6,\dots,M} u_n \equiv \sum_{n=0}^M ((1+(-1)^n)/2) u_n \equiv \sum_{n=0}^M \delta_{1,(-1)^n} u_n; \quad (7)$$

- somme di addendi di indice *pari* e di segno *alterno* (v. Eq. (4)):

$$\sum_{n=0}^M (-1)^n u_{2n} \equiv \sum_{n=1}^{M+1} (-1)^{n-1} u_{2(n-1)} \equiv \sum_{n=0}^M u_n \cos(n\pi/2); \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^M (-1)^n u_{2n} \equiv \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^{n+1} u_{2(n+1)} \equiv \sum_{n=1}^M u_n \cos(n\pi/2); \quad (9)$$

- somma di addendi di indice *dispari* (v. Eq. (A.5)):

$$\sum_{n=1,3,5,7,\dots,M} u_n \equiv \sum_{n=1}^M ((1-(-1)^n)/2) u_n \equiv \sum_{n=1}^M \delta_{-1,(-1)^n} u_n; \quad (10)$$

- somme di addendi di indice *dispari* e di segno *alterno* (v. Eq. (5)):

$$\sum_{n=0}^M (-1)^n u_{2n+1} \equiv \sum_{n=1}^{M+1} (-1)^{n-1} u_{2n-1} \equiv \sum_{n=0}^M u_n \sin(n\pi/2); \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^M (-1)^{n-1} u_{2n-1} \equiv \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n u_{2n+1} \equiv \sum_{n=1}^M u_n \sin(n\pi/2). \quad (12)$$

■■■

Successioni nidificate aritmetico-geometriche

Della coppia numerica $\{a_0, b_0\} \subset \mathbb{R}^+$, con $b_0 \leq a_0$, si definiscano i valori medi *aritmetico* e *geometrico*

$$\begin{cases} a_1 := (a_0 + b_0)/2 \\ b_1 := (a_0 b_0)^{1/2} \end{cases}.$$

Allora, seguono le limitazioni evidenti

$$\begin{cases} a_1 \leq a_0 \\ b_0 \leq b_1 \end{cases}, \quad (1)$$

la seconda, osservando che $b_0 \leq (a_0/b_0)^{1/2} b_0 = (a_0 b_0)^{1/2} \equiv b_1$. Inoltre, vale la disuguaglianza

$$b_1 \leq a_1, \quad (2)$$

come si può verificare scrivendo

$$a_1 - b_1 \equiv (a_0 + b_0)/2 - (a_0 b_0)^{1/2} = (1/2)(a_0 + b_0 - 2(a_0 b_0)^{1/2}) \equiv (1/2)(a_0^{1/2} - b_0^{1/2})^2 \geq 0.$$

Pertanto, dall'intersezione delle disuguaglianze (1) e (2), risulta la sequenza ordinata

$$b_0 \leq b_1 \leq a_1 \leq a_0. \quad (3)$$

Ripetendo il procedimento precedente dalle definizioni analoghe

$$\begin{cases} a_2 := (a_1 + b_1)/2 \\ b_2 := (a_1 b_1)^{1/2} \end{cases},$$

dove è $b_1 \leq a_1$ (Dis. (2)), si ottiene la sequenza

$$b_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq a_1. \quad (3.1)$$

Questa, combinata con le disuguaglianze (3), fornisce il prolungamento ordinato ascendente

$$b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0. \quad (4)$$

Allora, è induttivamente evidente che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ in \mathbb{R} , con $n \in \mathbb{Z}_0^+$, per le quali,

$$\begin{cases} a_{n+1} := (a_n + b_n)/2 \\ b_{n+1} := (a_n b_n)^{1/2} \end{cases},$$

sono *contigue, monotone* – $\{a_n\}$ non-crescente e $\{b_n\}$ non-decrescente – e *limitate*, quindi, convergenti:

$$b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_p \leq \dots \leq a_q \leq \dots \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0. \quad (5)$$

Ora, siano $a := \inf_n \{a_n\}$ e $b := \sup_n \{b_n\}$ i *valori-limite* rispettivi, risultando $0 < b \leq a$. Poiché si può scrivere, in modo equivalente, che $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n)^{1/2} \equiv (b^2)^{1/2}$, se ne deduce che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono verso lo *stesso* valore-limite μ ($\equiv a \equiv b$), detto **media aritmetico-geometrica** tra a_0 e b_0 . Chiaramente, essendo la successione $\{a_n\}$ *maggiorante* della successione $\{b_n\}$, la successione di rapporti

$$\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\} \equiv \left\{ \frac{2(a_{n-1} b_{n-1})^{1/2}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \right\} \sim \left\{ \frac{2(a_n b_n)^{1/2}}{a_n + b_n} \right\} \quad (6)$$

tende al valore-limite $\mu^-/\mu^+ = 1^-$.

□

Proposizione

Siano $a_n = 1 \wedge b_n \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$. Allora,

$$b_n \leq \frac{2b_n^{1/2}}{1+b_n} := b_{n+1}. \quad (7)$$

Dimostrazione

Infatti, dalla definizione (7) di b_{n+1} , si ha che

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2b_n^{1/2} - b_n - b_n^2}{1+b_n} \equiv \frac{(1+2b_n^{1/2}+b_n) - (1+2b_n+b_n^2)}{1+b_n} = \frac{(1+b_n^{1/2})^2 - (1+b_n)^2}{1+b_n} \geq 0$$

perché, $\forall b_n \in [0, 1]$, risulta $b_n \leq b_n^{1/2}$. Ne segue l'asserto, q. e. d. . ▲

Da quanto discusso in precedenza, è evidente che

$$\sup\{b_n\} = 1. \quad (8)$$

■■■

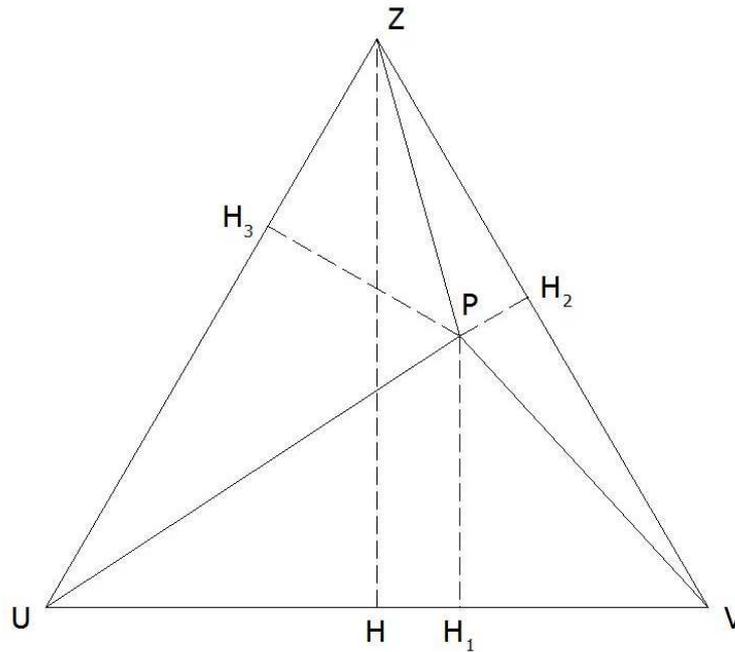
Il Teorema di Viviani (Vincenzo, 1622-1703)

Teorema

Sia P un punto qualsiasi *non-esterno* a un triangolo *equilatero*. La *somma* dei segmenti-*distanza* da P ai lati del triangolo è *geometricamente congruente* (i.e., *sovrapponibile*, simbolo \doteq) con il segmento-*altezza* di questo:

$$PH_1 + PH_2 + PH_3 \doteq ZH . \blacktriangle$$

Dimostrazione



Sfruttando la corrispondenza biunivoca tra *congruenza geometrica* e *misura*, risulta, in termini di aree, $A_{UVZ} \equiv A_{PUV} + A_{PVZ} + A_{PZU} \quad \forall P \in UVZ$, i.e.,

$$\frac{1}{2} \overline{ZH} \overline{UV} = \frac{1}{2} \overline{PH_1} \overline{UV} + \frac{1}{2} \overline{PH_2} \overline{VZ} + \frac{1}{2} \overline{PH_3} \overline{ZU},$$

da cui, segue l'asserto banalmente, osservando che $UV \doteq VZ \doteq ZU$, q. e. d. .

Si vede elementarmente che il teorema vale anche se $P \equiv H_j$, con $j \in \{1, 2, 3\}$.

■■■

Risultati e proposizioni di Calcolo Combinatorio ([†])

- A. Numero di DISPOSIZIONI SEMPLICI di n oggetti *distinti* (costituenti l'*insieme totale* o *dominio*) presi a k per volta ($k \leq n$):

$$D_{n,k} := \prod_{r=1}^k (n-r+1) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1); \quad (1)$$

- B. Numero di PERMUTAZIONI SEMPLICI di n oggetti *distinti* o FATTORIALE di n :

$$P_n := n! = \prod_{\nu=1}^n \nu \equiv n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \equiv D_{k,k}; \quad (2)$$

- b.1 Fattoriale generalizzato, interpolato mediante la FUNZIONE GAMMA ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$):

$$x! := \Gamma(x+1) \equiv x \Gamma(x); \quad (2.1)$$

- b.2 Simbolo (o Funzione) di Pochhammer:

$$(x)_n := x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n-1) \equiv \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!} \equiv \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}; \quad (2.2)$$

- b.3 Identità SEMI-FATTORIALI vs. Fattoriali:

$$(2n)!! = 2^n n! \equiv 2^n n \Gamma(n), \quad (2.3)$$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!} \equiv \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)}, \quad (2.4)$$

- C. Numero di COMBINAZIONI SEMPLICI di n oggetti *distinti* presi a k per volta o COEFFICIENTE BINOMIALE ($k \leq n$):

$$C_{n,k} \equiv \frac{D_{n,k}}{P_k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} := \binom{n}{k}; \quad (3)$$

- c.1 Coefficiente Binomiale generalizzato ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}; \quad (3.1)$$

- D. Numero di DISPOSIZIONI con RIPETIZIONE di n oggetti *distinti* presi a k per volta ($k \leq n$):

$$D_{n,k}^R = n^k; \quad (4)$$

- E. Numero di COMBINAZIONI con RIPETIZIONE di n oggetti *distinti* presi a k per volta ($k \leq n$):

$$C_{n,k}^R = C_{n+k-1,k} \equiv \binom{n+k-1}{k}; \quad (5)$$

- F. Numero di PERMUTAZIONI con RIPETIZIONE di un numero *fissato* n di oggetti *distinti* presi a k per volta ($k \leq n$) secondo la partizione seguente:

j_1 oggetti sono uguali tra loro, con somma k ,

j_2 oggetti sono uguali tra loro, con somma k , ma *distinti* dai j_1 precedenti,

j_3 oggetti sono uguali tra loro, con somma k , ma *distinti* dai $j_1 + j_2$ precedenti,

.....
 j_n oggetti sono uguali tra loro, con somma k , ma *distinti* dai $j_1 + j_2 + \dots + j_{n-1}$ precedenti.

Dunque, $\forall k$ assegnato, gli n oggetti j_ν di tale partizione obbediscono al *vincolo*

$$\sum_{\nu=1}^n j_\nu = k. \tag{6}$$

Un gruppo di k oggetti così scelti costituisce una *permutazione con ripetizione*. Il numero di permutazioni degli n oggetti, con *ripetibilità* di ciascuno fino a k volte, è dato da

$$P_{j_1, j_2, \dots, j_n; k}^R := \frac{k!}{j_1! j_2! j_3! \dots j_n!}. \tag{7}$$

□

Una prima applicazione significativa del concetto di *permutazione con ripetizione* è legata al nome di LEIBNIZ (G. W., von, 1646-1716) e alla sua formula di espansione della potenza intera $k \geq 0$, di un polinomio generico (generalizzazione dell'espansione binomiale),

$$(q_1 + q_2 + \dots + q_n)^k = \sum_{\mu=1}^{(n)_k/k!} \frac{\overset{\equiv a_\mu}{k!}}{(j_1! j_2! \dots j_n!)_\mu} \overset{\equiv Q_\mu}{(q_1^{j_1} q_2^{j_2} \dots q_n^{j_n})_\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^{(n)_k/k!} a_\mu Q_\mu. \tag{7.1}$$

Nell'espansione della potenza polinomiale (7.1), il monomio generale $a_\mu Q_\mu$ ha *sempre* grado k vs. il prodotto delle potenze $q_\nu^{j_\nu}$, con $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Il numero dei termini di questa espansione è uguale al numero delle *combinazioni con ripetizione* degli elementi q_ν presi a k per volta, i.e.,

$$\frac{(n)_k}{k!} \equiv \frac{(n)_k (n-1)!}{k! (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! ((n+k-1) - k)!} \equiv \binom{n+k-1}{k}. \tag{7.2}$$

A sua volta, il *coefficiente polinomiale generalizzato* μ -esimo dell'espansione (7.1),

$$a_\mu \equiv \frac{k!}{(j_1! j_2! \dots j_n!)_\mu} (\equiv P_{j_1, j_2, \dots, j_n; k; \mu}^R), \tag{7.3}$$

corrisponde alla μ -esima *permutazione*, con $\mu \in \{1, 2, \dots, (n)_k/k!\}$, degli n esponenti j_ν vs. la sequenza *ordinata* $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Tale permutazione, *ripetuta* j_ν volte ($j_\nu \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$), rispetta il vincolo di *omogeneità* (6). □

Applicazioni ulteriori dell'Eq. (7) ricorrono, e.g., nel conteggio degli stati particellari occupabili in un sistema microscopico secondo i modelli statistici fondamentali della Fisica sia semi-classica che quantistica (v. il phys-notebook: **Il Modello Statistico semi-classico del Gas Ideale**, P. 12-14). ■

(†) Discussioni delle varie proposizioni si trovano, e.g., in:

- Pagani, C. D. - Salsa, S., *Analisi Matematica*, **1**, P. 46-53, Zanichelli (-Masson) (1999),
- Bononcini, V. E. - Fantì, G., *Esercizi di Analisi Matematica*, **1**, 5ª ED., CAP. III, CEDAM (1975).

F.1 ESPANSIONE DI TAYLOR PER I DIFFERENZIALI VETTORIALI

Un'applicazione notevole dei risultati del paragrafo F è quella della \mathcal{T} -espansione (\therefore Taylor, serie o somma ridotta) di una funzione $f: \mathcal{D}_f \mapsto \mathcal{C}_f$. L'insieme $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, $\mathcal{C}_f \subseteq \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_f)$.

Assegnati $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ e $\xi_0 \equiv (\xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \dots, \xi_{0,n})$, con $\{\xi, \xi_0\} \subset \mathcal{D}_f$, la Teoria dà

$$f(\xi) = f(\xi_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (\nabla f(\xi)|_{\xi_0} \cdot (\xi - \xi_0))^{(k)} \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\nu=1}^n ((\partial/\partial \xi_\nu) f'_{\xi_\nu}(\xi)|_{\xi_0} (\xi_\nu - \xi_{0,\nu})) \right)^{(k)}. \quad (8)$$

La scrittura $(\dots)^{(k)}$ indica la potenza polinomiale *simbolica* k -esima della *somma* risultante dal prodotto scalare $\nabla f(\xi)|_{\xi_0} \cdot (\xi - \xi_0)$, costituita da n addendi. Il valore esplicito di $f_{\xi_\nu}^{(k)}(\xi)|_{\xi_0}$ segue sempre il calcolo di $f_{\xi_\nu}^{(k)}(\xi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. È, inoltre, evidente che la potenza k -esima della ν -somma interna all'Eq. (8) rimanda, formalmente, all'espansione (7.1):

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(\xi_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\nu=1}^n ((\partial/\partial \xi_\nu) f'_{\xi_\nu}(\xi)|_{\xi_0}) (\xi_\nu - \xi_{0,\nu}) \right)^{(k)} \equiv f(\xi_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\nu=1}^n (f'_{\xi_\nu}(\xi)|_{\xi_0}) (\xi_\nu - \xi_{0,\nu}) \right)^{(k)} \\ &= f(\xi_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \left(\frac{\partial^k}{\partial \xi_1^{j_1} \partial \xi_2^{j_2} \dots \partial \xi_n^{j_n}} f(\xi) \right)_{\xi_0} \frac{(\xi_1 - \xi_{0,1})^{j_1} (\xi_2 - \xi_{0,2})^{j_2} \dots (\xi_n - \xi_{0,n})^{j_n}}{j_1! j_2! \dots j_n!} \\ &\equiv f(\xi_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \left(\frac{\partial^k}{\partial \xi_1^{j_1} \partial \xi_2^{j_2} \dots \partial \xi_n^{j_n}} f(\xi) \right)_{\xi_0} \frac{(\xi_1 - \xi_{0,1})^{j_1} (\xi_2 - \xi_{0,2})^{j_2} \dots (\xi_n - \xi_{0,n})^{j_n}}{j_1! j_2! \dots j_n!}. \end{aligned} \quad (9)$$

Alcuni aspetti significativi emergono dall'Eq. (9), dove, qualsiasi permutazione tra le operazioni di derivazione risulta *ammissibile*, avendo assunto che il *Teorema di Schwarz* valga in $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_f)$:

- alla *somma multipla* (o *multi-somma*) $\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \equiv \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^n \dots \sum_{j_n=0}^n \equiv \sum_j$, si applica il criterio di partizione indicato al paragrafo F, con il vincolo di omogeneità (6) (si noti l'uso sintetico dell'indice vettoriale $\mathbf{j} \equiv (j_1, j_2, \dots, j_n)$);
- gli 'oggetti di permutazione' sono gli operatori differenziali $(\xi_\nu - \xi_{0,\nu}) \partial/\partial \xi_\nu$, tenendo tra loro *indipendenti* e ben *distinti* gli indici (variabili) $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j_\nu \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$, $\forall \nu$;
- n , il numero di addendi del polinomio $\sum_{\nu=1}^n (f'_{\xi_\nu}(\xi)|_{\xi_0}) (\xi_\nu - \xi_{0,\nu})$, corrisponde alla dimensione del dominio \mathcal{D}_f ;
- k , l'esponente simbolico della potenza polinomiale e l'ordine di derivazione parziale nella \mathcal{T} -espansione *coincidono*. Quindi, può avvenire che sia $k \leq n$ poiché k e n sono *indipendenti* tra loro. □

Dall'Eq. (9), isolando la differenza $f(\xi) - f(\xi_0)$ nel limite $\xi \rightarrow \xi_0$, $\forall \xi \in \mathcal{D}_f$, quindi, in modo equivalente, per $(\xi_\nu - \xi_{0,\nu}) \partial/\partial \xi_\nu \rightarrow d\xi_\nu (\partial/\partial \xi_\nu)$, $\forall \nu \in \{1, 2, \dots, n\}$, si definisce il *differenziale totale* k -esimo di $f(\xi)$:

$$f(\xi) - f(\xi_0) \xrightarrow{\xi \rightarrow \xi_0} d^{(k)} f(\xi) := \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \left(\frac{\partial^k}{\partial \xi_1^{j_1} \partial \xi_2^{j_2} \dots \partial \xi_n^{j_n}} f(\xi) \right) \frac{d\xi_1^{j_1} d\xi_2^{j_2} \dots d\xi_n^{j_n}}{j_1! j_2! \dots j_n!}. \quad (10)$$

□

I risultati (9) e (10) sono prontamente estendibili a una *funzione vettoriale di vettore* $f: \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{C}_f \subset \mathbb{R}^m$. Infatti, l'applicazione funzionale

$$\xi \mapsto f(\xi) \equiv \sum_{\lambda=1}^m f_\lambda(\xi) \hat{\phi}_\lambda \quad (11)$$

è \mathcal{T} -espandibile in $\mathcal{U}_\delta(\xi_0)$ sse lo sono *tutte* le sue m componenti (nella base *ortonormale* $\{\hat{\phi}_\lambda\}$). ■

Conversioni tra unità di misura angolari

Come riferimento, si assuma che le unità di misura angolare più comuni – **deg** ($^{\circ}$), **rad** e **gon** ($^{\text{g}}$) – presenti in tutte le calcolatrici scientifiche, siano basate sulla suddivisione dell'*angolo piatto* (piano) – qui, indicato brevemente con Π – in numeri predefiniti di parti uguali. Ogni suddivisione costituisce un'unità di misura angolare specifica. L'esistenza di tali unità di misura ha origini

storiche (il grado *sessagesimale* (1°), contenuto 180 volte *esattamente* in Π , è suddiviso in 60 *primi* ($'$) e, il *primo*, in 60 *secondi* ($''$)), o di

consistenza e semplicità analitica (il grado *radiante* (1 rad) è contenuto π volte *esattamente* in Π), ovvero

pratico-tecniche (il grado *centesimale* (1^{g}), contenuto esattamente 200 volte in Π , è suddivisibile in 100 *centesimi* ($^{\circ}$) e, il *centesimo*, in 100 *centesimi* (di centesimo) ($^{\text{cc}}$), esprimendo le misure nel sistema *decimale* di numerazione).

Le conversioni tra le diverse unità di misura si gestiscono, sulle calcolatrici scientifiche, con la routine **DRG** (Degree-Radian-Gon); inoltre, la routine **DMS** (Degree-Minute-Second) riporta ai *primi* ($'$) e ai *secondi* ($''$) le parti *decimali* eventuali di **deg**. Il meccanismo formale di conversione è semplice ma va organizzato con attenzione quando si sia costretti a operare manualmente o per incertezza nell'uso di **DRG** e di **DMS** o, semplicemente, come verifica.

Se i numeri *puri* $\alpha_{\text{S}}, \alpha_{\text{R}}, \alpha_{\text{G}} \in \mathbb{R}$ rappresentano i valori dell'ampiezza di uno *stesso* angolo espressa in unità di misura *sessagesimali*, *radianti* e *centesimali*, rispettivamente, allora, i *fattori generali di conversione* sono dati dalle identità

$$\frac{(\alpha_{\text{S}})^{\circ}}{180^{\circ}} \equiv \frac{(\alpha_{\text{R}}) \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} \equiv \frac{(\alpha_{\text{G}})^{\text{g}}}{200^{\text{g}}} \quad (1)$$

I gradi angolari vanno trattati come le unità di misura fisiche. Gli esempi seguenti dovrebbero risultare auto-esplicativi:

conversioni **deg** \Leftrightarrow **rad**:

$$41^{\circ}09'27'' = 41^{\circ} + (9/60)^{\circ} + (27/60^2)^{\circ} \equiv (41 + 9/60 + 27/3600)^{\circ} = (41.1575)^{\circ} \quad \text{e, dalle Idn. (1),}$$

$$\equiv \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}} (41.1575)^{\circ} \approx 0.229 \pi \text{ rad} \approx 0.718 \text{ rad}$$

$$1'' = (3600)^{-1} \text{ }^{\circ} \equiv (2.7 \cdot 10^{-4})^{\circ} = \pi / (2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3) \text{ rad} \approx 4.8481368111 \cdot 10^{-6} \text{ rad};$$

$$85.2589 \text{ rad} \equiv \frac{85.2589 \text{ rad}}{\pi} \pi = 27.1388 \pi \text{ rad} \quad \text{e, dalle Idn. (1),}$$

$$\equiv \frac{180^{\circ}}{\pi \text{ rad}} 85.2589 \text{ rad} = (4884.97513)^{\circ} \equiv (4884)^{\circ} + (0.97513 \cdot 60)' \approx (4884)^{\circ} + (58.5081)'$$

$$\approx (4884)^{\circ} + 58' + (0.5081 \cdot 60)'' = (13 \cdot 360^{\circ} + 204^{\circ}) + 58' + (30.4893)''$$

$$\approx 204^{\circ}58'30'' + 13 \text{ mod } 360^{\circ};$$

conversioni **deg** \Leftrightarrow **gon**:

$$87^{\circ}32'15'' = 87^{\circ} + (32/60)^{\circ} + (15/60^2)^{\circ} \equiv (87 + 32/60 + 15/3600)^{\circ} = (87.5375)^{\circ} \quad \text{e, dalle Idn. (1),}$$

$$\equiv \frac{200^{\text{g}}}{180^{\circ}} (87.5375)^{\circ} \approx (97.2639)^{\text{g}} \equiv 97^{\text{g}}26^{\text{c}}39^{\text{cc}};$$

$$120^{\text{g}}66^{\text{c}}67^{\text{cc}} = 120^{\text{g}} + (66/100)^{\text{g}} + (67/100^2)^{\text{g}} = (120.6667)^{\text{g}} \quad \text{e, dalle Idn. (1),}$$

$$\equiv \frac{180^{\circ}}{200^{\text{g}}} (120.6667)^{\text{g}} = (108.60003)^{\circ} = 108^{\circ} + (0.60003 \times 60)' = 108^{\circ} + (36.0018)'$$

$$= 108^{\circ} + 36' + (0.0018 \times 60)'' = 108^{\circ} + 36' + (0.108)'' \approx 108^{\circ}36';$$

conversioni **rad** \Leftrightarrow **gon**:

$$1 \text{ rad} \equiv \left(\frac{200^{\text{g}}}{\pi \text{ rad}} \right) \text{ rad} \equiv \frac{200^{\text{g}}}{\pi \text{ rad}} (1 \text{ rad}) \approx (63.6620)^{\text{g}} \equiv 63^{\text{g}}66^{\text{c}}20^{\text{cc}};$$

$$1^{\text{g}} = \left(\frac{\pi \text{ rad}}{200^{\text{g}}} \right) (1)^{\text{g}} \equiv \frac{\pi}{200} \text{ rad} \approx 1.5708 \cdot 10^{-2} \text{ rad}.$$



Osservazione sul tracciamento completo del grafico della funzione

radicale generale $f: x \mapsto \sqrt[p]{(f(x))^q}$, con $q/p \in \mathbb{Q} \wedge \text{MCD}\{p, q\} = 1$

Una routine di calcolo che lavora in *modalità reale* riconosce come tale *qualsiasi* numero intero o no. Sia q/p un numero *razionale irriducibile* in base 10, con $p \neq \pm 2^m \cdot 5^n \wedge \{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Ora, in rappresentazione decimale, $|q/p|$ è *periodico* ^(‡), quindi, possiede la parte decimale costituita da *infinite* cifre. Chiaramente, il troncamento di queste dipende dalla *dimensione* della memoria dell'unità aritmetico-logica della calcolatrice. La stessa situazione si presenta anche quando il numero di cifre decimali della rappresentazione di q/p è *finito* ma eccede quello massimo gestibile dall'unità aritmetico-logica.

In entrambi i casi indicati, il grafico della funzione-potenza con esponente *reale-razionale* e base $f(x)$ *reale*,

$$f: x \mapsto (f(x))^{q/p} \left(\equiv \sqrt[p]{(f(x))^q} \text{ solo se } p \in \mathbb{Z}^+ \right),$$

viene tracciato *completamente solo se* $f(x) > 0$.

Invece, *anche con* p, q entrambi *dispari*, primi tra loro $\wedge \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$, la rappresentazione *grafica* della *funzione radicale* in \mathbb{R} ,

$$f: x \mapsto \sqrt[p]{(f(x))^q} \equiv (f(x))^{q/p},$$

risulta *priva* del ramo corrispondente a $f(x) \leq 0$ quando tale ramo esiste. In tal caso, si può ovviare al problema ricordando la rappresentazione equivalente seguente di f :

$$f: x \mapsto \sqrt[p]{(f(x))^q} := \begin{cases} (\text{sgn } f(x)) |f(x)|^{q/p}, & \text{per } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{per } f(x) = 0 \end{cases}.$$

Il fondamento teorico dell'Osservazione si trova alle P. 24-27 in questo math-notebook.

■■■

^(‡) La periodicità della rappresentazione *decimale* degli elementi di \mathbb{Q} è discussa, e.g., in:

- Bononcini, V. E. - Fanti, G., *Esercizi di Analisi Matematica*, **1**, 5ª ED., PP. 160-164, CEDAM (1975),
- Pagani, C. D. - Salsa, S., *Analisi Matematica*, **1**, PP. 75-77, Zanichelli (-Masson) (1999).