revisione
23 luglio 2024

Struttura analitica della

Goniometria Iperbolica

claudio magno

https://www.cm-physmath.net/

CM_Portable MATH Notebook Series™

Ipparco di Nicea (~190 a. C. - ~120 a. C.)

Introduzione

Lo scopo di queste note sintetiche e informali (e, per questo, forse, non particolarmente coerenti) è il tentativo di un confronto tra la *Goniometria Circolare* – generalmente nota dalla formazione scolastica medio-superiore – e quella cosiddetta *Iperbolica*, legata in modo più esplicito all'Analisi, cercando di fissare analogie strutturali e rappresentazioni 'parallele' basate su un approccio geometrico unificato (benché specifico per ciascuna) di *angolo normalizzato* e di *grado radiante*. L'obiettivo di una costruzione autonoma di *Goniometria Iperbolica* costituisce il filo conduttore.

Siano ξ e ρ semirette *uscenti* da uno stesso punto ordinario, il *polo*, nel piano euclideo $\mathcal{E}$ $(\equiv X \times Y)$: ξ è presa come asse di *riferimento* mentre ρ è il *raggio vettore*, di direzione *variabile* rispetto alla direzione *fissa* di ξ.
Si assuma, come definizione primitiva di *angolo* (*piano*) *orientato*, il sotto-insieme piano *illimitato* di $\mathcal{E}$ compreso tra ξ e ρ (i lati dell'angolo) e generato con una rotazione di ρ anti-oraria $(+)$ od oraria $(-)$ dalla configurazione di sovrapposizione con ξ (angolo di *ampiezza*, o *misura*, nulla).

Si definisce *settore angolare* il sotto-insieme di angolo piano che *contiene il polo* e che sottende un arco γ di *sezione conica* centrata nel polo. L'arco γ è detto *supporto* (*finito*) dell'angolo. Poiché il polo è un punto euclideo ordinario, un tale supporto *non può* essere un ramo di parabola – avendo, questa, il centro all'*infinito* – ma *solo* un ramo di *ellisse* o di *iperbole* (coniche *a-centro*).

Per ragioni complessive di consistenza, semplicità ed estetica, γ è scelto *normomorfo* [*], i.e.,

- è rappresentato dall'equazione cartesiana *ristretta* di una conica a-centro in forma *canonica*,
- ha il semi-asse *focale*, X^+, coincidente con la semiretta ξ di riferimento angolare e i segmenti coniugati di simmetria – indicati comunemente con a e b – *congruenti* (geometricamente) tra loro,
- γ è percorribile con *continuità*, simmetricamente rispetto a X^+, ed è *generalmente regolare*.

Ne segue che un supporto *ellittico normomorfo* è un arco di **circonferenza**, $\gamma \equiv \mathfrak{C}$, mentre un supporto *iperbolico normomorfo* è un arco di *ramo destro* di **iperbole equilatera**, $\gamma \equiv \mathfrak{H}^+$.
Tali supporti angolari corrispondono alle *sole due* possibili goniometrie in $\mathcal{E}$, quella $(ellittico\text{-})\,circolare$, in breve, *circolare*, e quella $iperbolico\,(\text{-}equilatera)$, in breve, *iperbolica*.

Tutti gli angoli in $\mathcal{E}$ sono associabili a una Goniometria Circolare ma *non tutti* a una Goniometria Iperbolica. La ragione di ciò è geometricamente evidente: il supporto *circolare* $\mathfrak{C}$ può includere qualsiasi direzione del raggio vettore mentre il supporto *iperbolico* $\mathfrak{H}^+$ può includere, al più, un angolo η *asintoticamente retto* $(\eta \in (-45°, 45°))$ vs. la semiretta $\xi \equiv X^+$ di riferimento.

In coerenza con la definizione primitiva di *angolo* come *sotto-insieme* (*illimitato*) *di punti del piano* $\mathcal{E}$, l'ampiezza *operativa* di un angolo si definisce *normalizzando* – i.e., *riducendo al finito* – l'area del settore angolare – *sia* circolare *che* iperbolico – vs. l'area triangolare generalizzata $(1/2)\,a \cdot a \equiv a^2/2$, essendo $a \in \mathbb{R}^+$ la distanza tra il polo e il punto di intersezione $\gamma \cap X^+$ (i.e., o la misura del *raggio* di $\gamma \equiv \mathfrak{C}$ o l'*ascissa* del vertice di $\gamma \equiv \mathfrak{H}^+$).

Pertanto, si assegna *formalmente* l'area generalizzata (e *normalizzata*) $a^2/2$, associandola all'ampiezza di **1 grado radiante**, sia esso **circolare** (**1 rad**) che, rispettivamente, **iperbolico** (**1 radh**).

Il fondamento teorico poggia sull'identità analitica $e^{i\varphi} \equiv \cos\varphi + i \sin\varphi$, attribuita al sommo Euler (Leonhard, 1707-1783) ma maturata, presumibilmente, in indagini precorritrici di Bernoulli (Jacob, 1654-1705), di Taylor (Brook, 1685-1731) e di Maclaurin (Colin, 1698-1746) e al chiarimento del significato dell'unità immaginaria i e, quindi, delle proprietà costitutive del campo numerico $\mathbb{C}$, *uniformemente continuo*.

C M

---

[*] Neologismo introdotto (e proposto) da chi scrive.

GONIOMETRIA CIRCOLARE (non-normalizzata)

Dall'equazione del supporto circolare *massimale* $\mathfrak{C}$ di raggio a, v. Fig. 1,

$$x^2 + y^2 = a^2 ,$$

si individuano i punti $A \equiv (a;0)$ e $P \equiv (\overline{x};\overline{y}) := (a\,cos\,\varphi; a\,sin\,\varphi) \equiv (\overline{OH};\overline{PH})$.

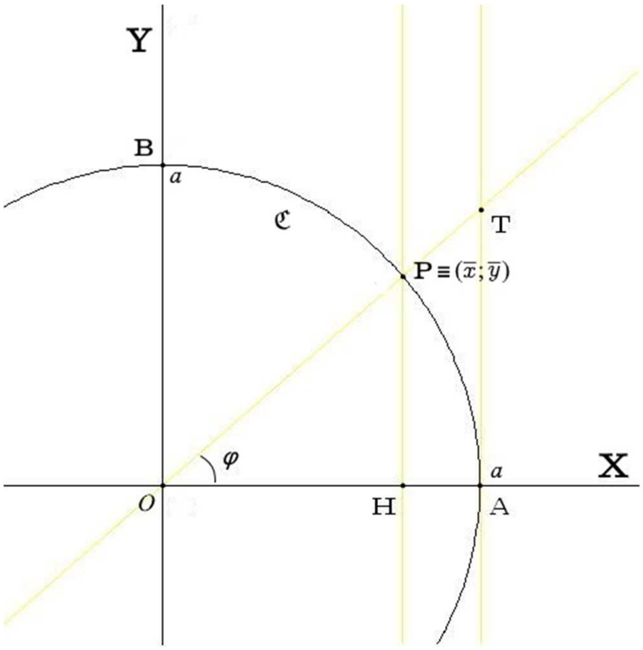


Fig. 1

La *similitudine* $OAT \doteq OHP$ implica la proporzione $AT:PH = OA:OH$; da questa, passando alle misure dei lati, si scrive $\dfrac{\overline{AT}}{a\,sin\,\varphi} = \dfrac{a}{a\,cos\,\varphi}$, i.e., $\overline{AT} = a\dfrac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} := a\,tan\,\varphi \equiv a(\overline{y}/\overline{x})$.

Quindi, poiché $T \equiv (a; a\,tan\,\varphi)$ e $\varphi = tan^{-1}(\overline{y}/\overline{x})$, si deducono tutte le identità della Goniometria Circolare sia *diretta* che *inversa*.

□

Ampiezza φ del settore circolare $\widehat{OAP}$ di area $A_{\mathfrak{C}}$

In generale, si *definisca*, dalla funzione *formale* tan^{-1} dell'Analisi, il parametro variabile

$$\varphi := \frac{A_{\mathfrak{C}}}{a^2/2} \equiv tan^{-1}(y(x)/x) . \tag{1}$$

Mediante l'Eq. (1), risulta che,

il **grado radiante circolare**, rad, *è l'unità di misura dell'ampiezza* (*operativa*) φ *di un angolo al centro di* $\mathfrak{C}$. 1 rad *corrisponde a un settore circolare di area* $A_{\mathfrak{C}} = a^2/2$.

Pertanto, l'unità rad è riferita, direttamente\inversamente alle funzioni goniometriche circolari sia inverse che dirette $(tan, cos^{-1}, \text{etc.})$. Ad esempio, con la scrittura $\varphi = cos^{-1}u$, si intende che il valore corrispondente a φ è espresso in *gradi radianti circolari*.
Allora, consistentemente con l'Eq. (1), si giustifica il calcolo classico vs. $P \equiv (x;y)$ generico

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathfrak{C}} = {} & \text{area del triangolo } OHP + \text{area del semi-segmento circolare } H\widehat{AP} \\
& = \frac{1}{2}|xy| + \int_x^a |y(t)|\,dt \\
& = \frac{1}{2}|xy| + \int_x^a (a^2 - t^2)^{1/2}\,dt \\
& = \frac{1}{2}|xy| + \frac{1}{2}\left(t(a^2 - t^2)^{1/2} + a^2 sin^{-1}\frac{t}{a} \right)\Bigg|_x^a \\
& = \cancel{\frac{1}{2}|xy|} - \cancel{\frac{1}{2}|xy|} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - sin^{-1}\frac{x}{a} \right) \\
& \equiv \frac{a^2}{2} cos^{-1}\left(\frac{\cancel{a}\, cos\,\varphi}{\cancel{a}} \right) \\
& = \frac{a^2}{2}\varphi \equiv \frac{a^2}{2} tan^{-1}\frac{y}{x}\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

■

GONIOMETRIA IPERBOLICA (non-normalizzata)

Dall'equazione algebrica di 2º grado

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

con $a \in \mathbb{R}^+$, si esplicita la *restrizione* $x = (y^2 + a^2)^{1/2}$, rappresentativa del supporto iperbolico *massimale* $\mathfrak{H}^+$ (v. Fig. 2) e soggetta, in $\mathbb{R}$, alla condizione $|y| < x$. Su $\mathfrak{H}^+$, si individuano i punti $A \equiv (a\,;0)$ e $P \equiv (\bar{x}\,;\bar{y}) := (a\,cosh\eta; a\,sinh\eta) \equiv (\overline{OH}\,;\overline{PH})$, con $\eta \equiv P\hat{O}H$.
L'introduzione dei simboli $cosh$, $sinh$ e di quelli dedotti successivamente ($tanh$, $cosh^{-1}$, etc.) va intesa, per ora, in senso puramente *formale*, motivata unicamente dalla ricerca di un'analogia con le funzioni goniometriche circolari ma *ignorando* le connessioni fondamentali esistenti, come si vedrà, con la coppia di funzioni esponenziali $\eta \mapsto e^{\pm\eta}$.

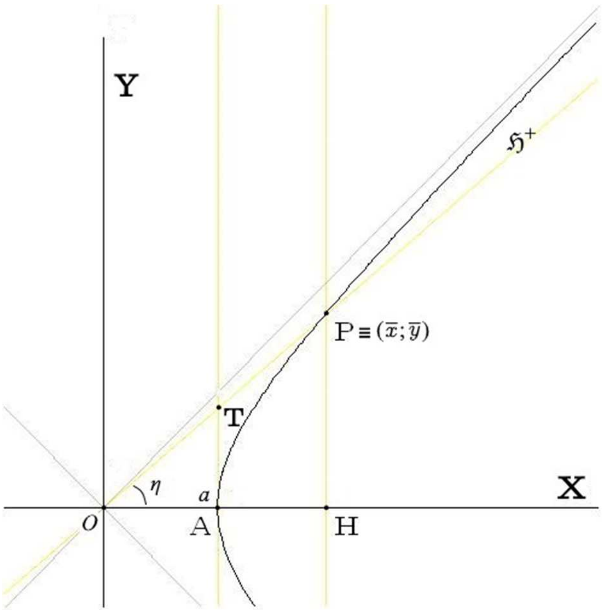


Fig. 2

Poiché $T \in r_{OP}$, la similitudine $OAT \doteq OHP$ implica la proporzione $AT:PH = OA:OH$. Da questa, si scrive $\dfrac{\overline{AT}}{a\,sinh\eta} = \dfrac{a}{a\,cosh\eta}$, i.e., $\overline{AT} = a\dfrac{sinh\eta}{cosh\eta} := a\,tanh\eta \equiv a(\bar{y}/\bar{x})$, in termini delle misure dei lati. Segue che $T \equiv (a; a\,tanh\eta)$ e $\eta = tanh^{-1}(\bar{y}/\bar{x})$.

□

Ampiezza η del settore iperbolico $\widehat{OAP}$ di area $\mathsf{A}_{\mathfrak{H}}$

In generale, si *definisca*, dalla funzione *formale* $tanh^{-1}$ dell'Analisi, il parametro variabile

$$\eta := \frac{\mathsf{A}_{\mathfrak{H}}}{a^2/2} \equiv tanh^{-1}(y(x)/x). \tag{3}$$

Mediante l'Eq. (3), risulta che

il **grado radiante iperbolico**, **radh**, *è l'unità di misura dell'ampiezza* (*operativa*) η *di un angolo al centro* $O\hat{A}P$ *di* $\mathfrak{H}^+$. $1\,$**radh** *corrisponde a un settore iperbolico di area* $\mathsf{A}_{\mathfrak{H}^+} = a^2/2$.

Pertanto, l'unità $\mathtt{radh}$ è riferita a tutte le funzioni goniometriche iperboliche, sia dirette che inverse, $(cosh,\ csch^{-1}$, etc.$)$. Detto altrimenti, con la scrittura $\eta = csch^{-1}u$, si intende che il valore η è espresso in *gradi radianti iperbolici*.
Allora, consistentemente con l'Eq. (3), nel semipiano $[a, +\infty)\times Y$, si giustifica il calcolo classico vs. $P \equiv (x; y)$ generico

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathfrak{H}^+} &= \text{area del triangolo } OHP - \text{area del semi-segmento iperbolico } \widehat{PAH} \\
&= \frac{1}{2}x|y| - \int_a^x |y(t)|dt = \frac{1}{2}x|y| - \int_x^a (t^2-a^2)^{1/2}dt \\
&= \frac{1}{2}x|y| - \frac{1}{2}(t(t^2-a^2)^{1/2} - a^2 ln(t+(t^2-a^2)^{1/2}))\Big|_x^a = \cancel{\frac{1}{2}x|y|} - \cancel{\frac{1}{2}x|y|} + \frac{a^2}{2}ln\frac{x+y}{a} \\
&= \frac{a^2}{2}ln\frac{x+y}{(x^2-y^2)^{1/2}} \equiv \frac{a^2}{2}ln\left(\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}\right)^{1/2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}ln\frac{x+y}{x-y}\right) \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}ln\frac{1+y/x}{1-y/x}\right) \equiv \frac{a^2}{2}tanh^{-1}\frac{y}{x} \equiv \frac{a^2}{2}\eta,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

in analogia *formale* completa con l'Eq. (2).

Dunque, appare suggestiva (e plausibile) l'ipotesi della definibilità di una *Goniometria Iperbolica* in $\mathbb{R}$, analoga strutturalmente e operativamente a quella *Circolare*.
Una linea meditata di procedimento suggerisce l'individuazione di rappresentazioni per le funzioni $cosh$ e $sinh$ tali che i valori delle coordinate cartesiane $(x; y) \equiv (a\,cosh\eta; a\,sinh\eta)$ del generico punto $P \in \mathfrak{H}^+$ risultino composte appropriatamente attraverso una funzione elementare **univoca** $\eta \mapsto w(\eta)$ dell'*ampiezza iperbolica* η. Inoltre, è auspicabile che la richiesta di *consistenza* tra il modello ipotizzato di Goniometria Iperbolica e il grafico di $\mathfrak{H}^+$ possa essere soddisfatta mediante espressioni *le più semplici possibile* per le funzioni composte $\eta \mapsto x(w(\eta))$ e $\eta \mapsto y(w(\eta))$.
La rappresentazione *canonica* $x^2 - y^2 = a^2$ di $\mathfrak{H}^+$ è separabile nella forma equivalente

$$x/a + y/a = \frac{1}{x/a - y/a}\ . \tag{5}$$

L'uguaglianza (5) evidenzia il *vincolo di uguaglianza* della somma dei valori di funzioni composte attraverso la funzione (sperabilmente) elementare w – ancora ignota – con il *reciproco* della loro differenza. Poiché tale vincolo deve valere $\forall\,\eta \in (-\pi/4\,\text{rad}, \pi/4\,\text{rad}) \equiv (-\infty\,\text{radh}, +\infty\,\text{radh})$, i.e., $\forall\,\eta$ (in $\mathtt{radh}$) $\in \mathbb{R}$, si fissano le definizioni

$$\begin{cases} x/a + y/a := w(\eta)\,, \\ x/a - y/a := 1/w(\eta)\,, \end{cases} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}\,. \tag{6}$$

Sul grafico di $\mathfrak{H}^+$, $x \equiv x(\eta)$, è invariante nella riflessione assiale $\eta \mapsto -\eta$ mentre $y \equiv y(\eta)$ si trasforma in $-y(\eta)$. Così, da $1/w(\eta) \equiv x/a + (-y)/a$, si *inferisce* il carattere *esponenziale* di $w(\eta)$ al variare del suo argomento η: $1/w(\eta) \equiv w(-\eta)$. Risolto vs. a x e y, il sistema (6) dà

$$\begin{cases} x = a\dfrac{w(\eta)+1/w(\eta)}{2} \equiv a\dfrac{w(\eta)+w(-\eta)}{2} \equiv x(\eta), \\[2ex] y = a\dfrac{w(\eta)-1/w(\eta)}{2} \equiv a\dfrac{w(\eta)-w(-\eta)}{2} \equiv y(\eta). \end{cases} \tag{7}$$

Le rappresentazioni (7) delle coordinate cartesiane dei punti del grafico di $\mathfrak{H}^+$ mostrano che, vs. il parametro η, $\eta \mapsto x(\eta)$, è una funzione *pari* mentre $\eta \mapsto y(\eta)$ è una funzione *dispari*; in altre parole, esse costituiscono, rispettivamente, la componente *pari* e la componente *dispari* di w.

Riepilogando le caratteristiche risultanti di w, si ha che

$$\begin{cases} w(\eta) \in \mathbb{R}^+, \\ 1/w(\eta) \equiv w(-\eta), \\ w(\eta) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \qquad \text{(almeno)}, \\ w \in \mathcal{M}^{\uparrow} \qquad \text{(crescente)}. \end{cases} \tag{8}$$

Infatti,

- la condizione $w \in \mathbb{R}^+$ segue dall'essere $x \equiv a(w + 1/w)/2 \geq a$, i.e., $(w + 1/w)/2 \geq 1$;
- della seconda, si è già detto circa il suo carattere *esponenziale* vs. $\eta \in \mathbb{R}$;
- la continuità e la crescita monotòna ($\therefore \mathcal{M}^{\uparrow}$) di x in $[a, +\infty)$ implicano la *continuità* e la *crescita monotòna* di w vs. $\eta \in \mathbb{R}$.

Ovviamente, anche la variabile reciproca $1/w(\eta) \in \mathbb{R}^+$ risulta definita e continua in $\mathbb{R}$ benché decrescente ($\in \mathcal{M}^{\downarrow}$). Inoltre, $\sup_{\eta \in \mathbb{R}} w = \sup_{\eta \in \mathbb{R}} (1/w) = +\infty$, mentre $\inf_{\eta \in \mathbb{R}} w = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} (1/w) = 0^+$.

Ora, la richiesta che le variazioni *continue* di $x \in [a, +\infty)$ e di $y \in \mathbb{R}$ siano rappresentabili dalle composizioni (7) di un'unica funzione *elementare* $\eta \mapsto w(\eta)$ che soddisfi le proprietà (8) rende sostanzialmente *obbligata* la scelta di una *funzione esponenziale con base* > 1.

La definizione *convenzionale* $\eta \mapsto w(\eta) := e^{\eta}$ *nelle* Eq.i (7) *soddisfa identicamente* l'Eq. (4).

Pertanto, $\forall (x; y) \in \mathfrak{H}^+$, si definiscono

$$\begin{cases} x \equiv a \cosh \eta := a \dfrac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} \\ y \equiv a \sinh \eta := a \dfrac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} \end{cases} . \tag{9}$$

Insieme con le rappresentazioni dei valori delle funzioni *sinh* e *cosh*, le Eq.i (9) forniscono immediatamente la definizione della funzione *tanh* e la sua limitazione principale,

$$-1 < \frac{y}{x} \equiv \tanh \eta = \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}} \left(\equiv \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1} \equiv \frac{1 - e^{-2\eta}}{1 + e^{-2\eta}} \right) < 1. \tag{10}$$

Dunque, le definizioni (9) e il calcolo integrale di $\Omega_{\mathfrak{H}}$ precedente risultano *chiusi* rispetto alla definizione geometrica fondamentale (2), giustificando l'esistenza di una **Goniometria Iperbolica** formalmente strutturata – sotto *vincoli specifici* – in modo *del tutto analogo* a quella Circolare.

■

La Funzione di Gudermann

La *Funzione di Gudermann* (†) (o *Gudermanniana* o *ampiezza iperbolica*), *gd*, è un'applicazione trascendente che connette, direttamente in $\mathbb{R}$, mediante composizione, le funzioni *circolari* con quelle *iperboliche*. In tal modo, essa costituisce un'alternativa interessante – benché meno nota e meno agevole – alle *Formule di Euler*. Essa, però, *evita* il ricorso a rappresentazioni in $\mathbb{C}$.

La definizione,

$$x \mapsto gd\, x := 2tan^{-1}(e^{x}) - \pi/2\,, \tag{11}$$

indica che $gd \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, è una funzione con codominio *principale* $(-\pi/2, \pi/2)$, limitata, dispari, monotòna $\in \mathcal{M}^{\uparrow}$ e, quindi, *invertibile*. La simmetria centrale di $graf\,(gd)$, v. Fig. 3, è verificata facilmente notando, dall'identità

$$tan^{-1}(e^{-x}) \equiv cot^{-1}(e^{x}) \equiv \pi/2 - tan^{-1}(e^{x})\,,$$

che gd è una funzione *dispari* vs. il suo argomento. Infatti,

$$\begin{aligned} gd(-x) &= 2(\pi/2 - tan^{-1}(e^{x})) - \pi/2 \\ &= -(2tan^{-1}(e^{x}) - \pi/2) \equiv -gd\,x\,. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Il valore $y \equiv gd\,x$ è chiamato il *gudermanniano di* x o l'*ampiezza iperbolica di* x.

La funzione $x \mapsto gd\,x \equiv y$ (ramo principale)

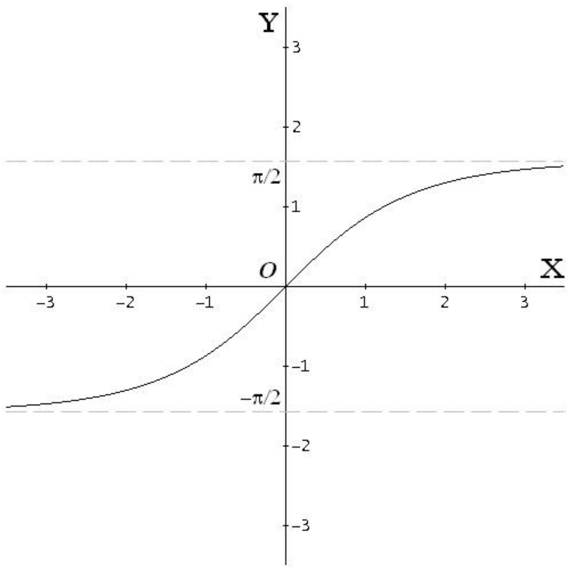


Fig. 3

La funzione *inversa*, $x \mapsto gd^{-1}x$, è esprimibile, in forma simmetrica vs. la bisettrice del 1° e del 3° quadrante cartesiano, come l'applicazione, *periodica*, dispari e $\in \mathcal{M}^{\uparrow}$

$$x \mapsto gd^{-1}x \equiv ln(tan(x/2 + \pi/4)) \equiv ln\left(\frac{tan(x/2)+1}{1-tan(x/2)}\right) \equiv ln(sec\,x + tan\,x)\,, \tag{12}$$

avente l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ come dominio *principale*, a frontiera asintotica (v. Fig. 4, P. 9). Invertendo l'Eq. (11) vs. la funzione tan^{-1}, si trova che

$$e^{x} = tan((1/2)\,gd\,x + \pi/4) \tag{13}$$

e, mediante le Eq.i (13) e (11), che

$$e^{-x} = tan((1/2)\,gd(-x) + \pi/4) = -tan((1/2)\,gd\,x - \pi/4)\,. \tag{14}$$

Ora, tenendo presente l'identità goniometrica

$$tan(\alpha - \pi/4) \equiv \frac{tan\,\alpha - 1}{1 + tan\,\alpha}\,, \tag{15}$$

si scrive, dall'Eq. (13),

$$\begin{aligned} tanh\frac{x}{2} &\equiv \frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}} \equiv \frac{\cancel{e^{-x/2}}(e^{x}-1)}{\cancel{e^{-x/2}}(e^{x}+1)} \equiv \frac{tan((1/2)\,gd\,x+\pi/4)-1}{tan((1/2)\,gd\,x+\pi/4)+1}\,, \\ &= tan((1/2)\,gd\,x)\,, \end{aligned}$$

quest'ultima, dall'identità (15), nella quale, sia $\alpha \equiv (1/2)\,gd\,x+\pi/4$.
Quindi, eseguendo la dilatazione $x \mapsto 2x$, si arriva all'uguaglianza fondamentale

$$tanh\,x = tan((1/2)\,gd\,(2x))\,. \tag{16}$$

Con la posizione $y := (1/2)\,gd\,(2x)$ nell'Eq. (16), insieme con quella inversa $x \equiv (1/2)\,gd^{-1}(2y)$, e, infine, eseguendo lo scambio $x \rightleftarrows y$, si ottiene la relazione simmetrica

$$tan\,x = tanh((1/2)\,gd^{-1}(2x))\,. \tag{17}$$

A loro volta, le Eq.i (13) e (14) sono le generatrici delle *relazioni di trasformazione in* $\mathbb{R}$ tra le Funzioni Iperboliche e quelle Circolari.

Ad esempio, posto $\eta := gd\,x$, risulta

$$\begin{aligned} sinh\,x &\equiv \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(tan(\eta/2+\pi/4)+tan(\eta/2-\pi/4)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{tan(\eta/2)+1}{1-tan(\eta/2)}+\frac{tan(\eta/2)-1}{1+tan(\eta/2)}\right) = \frac{2\,tan(\eta/2)}{1-(tan(\eta/2))^2} \\ &\equiv tan\,\eta \equiv tan(gd\,x) \equiv (tan\circ gd)(x)\,. \end{aligned}$$

Con le altre cinque identità, determinate facilmente in modo analogo dalle forme esponenziali rispettive, si completa la tabella seguente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} cosh\,x \equiv sec(gd\,x) & sech\,x \equiv cos(gd\,x) \\ sinh\,x \equiv tan(gd\,x) & csch\,x \equiv cot(gd\,x) \\ tanh\,x \equiv sin(gd\,x) & coth\,x \equiv csc(gd\,x) \end{array}}\,. \tag{18}$$

La posizione $y := gd\,x$, a destra nelle Eq. (18), e dell'inversa (biunivoca) $x \equiv gd^{-1}y$, a sinistra, seguita dallo scambio $x \rightleftarrows y$, generano la tabella delle relazioni simmetriche di connessione:

$$\boxed{\begin{array}{ll} cos\,x \equiv sech(gd^{-1}x) & sec\,x \equiv cosh(gd^{-1}x) \\ sin\,x \equiv tanh(gd^{-1}x) & csc\,x \equiv coth(gd^{-1}x) \\ tan\,x \equiv sinh(gd^{-1}x) & cot\,x \equiv csch(gd^{-1}x) \end{array}}\,. \tag{19}$$

Le tabelle (18) e (19) consentono la riscrittura di tutte le identità goniometriche, sia *circolari* che (*equilatero-*)*iperboliche*, prendendo i valori delle funzioni reali gd e gd^{-1} come argomenti.
Le varie identità *quadratiche* – immediatamente riconoscibili – assumono, e.g., le forme seguenti:

- $(sech(gd^{-1}x))^2+(tanh(gd^{-1}x))^2 = 1\,,$ (20.1)
- $(cosh(gd^{-1}x))^2-(sinh(gd^{-1}x))^2 = 1\,,$ (20.2)
- $(coth(gd^{-1}x))^2-(csch(gd^{-1}x))^2 = 1\,,$ (20.3)
- $(cosh(gd^{-1}x))^2+(coth(gd^{-1}x))^2 = (cosh(gd^{-1}x))^2(coth(gd^{-1}x))^2\,,$ (20.4)

- $(sec(gd\, x))^2 - (tan(gd\, x))^2 = 1$, (20.5)
- $(sin(gd\, x))^2 + (cos(gd\, x))^2 = 1$, (20.6)
- $(csc(gd\, x))^2 - (cot(gd\, x))^2 = 1$, (20.7)
- $(cot(gd\, x))^2 - (cos(gd\, x))^2 = (cot(gd\, x))^2 (cos(gd\, x))^2$. (20.8)

■

Funzioni Derivate

Operando direttamente sulle definizioni, Eq.i (11) e (12), si calcolano

$$x \mapsto \frac{d}{dx} gd\, x \equiv \frac{d}{dx}(2tan^{-1}(e^x) - \pi/2) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \equiv sech\, x, \tag{21}$$

$$x \mapsto \frac{d}{dx} gd^{-1} x \equiv \frac{d}{dx} ln(tan(x/2 + \pi/4)) = \ldots = \frac{1}{sin(x + \pi/2)} \equiv \frac{1}{cos\, x} \equiv sec\, x. \tag{22}$$

Quindi, incominciando dalle Eq.i (21) e (22) e sfruttando il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, si deducono prontamente le seguenti

■

Rappresentazioni Integrali à-la Picard-Peano

$$gd\, x \;\; (= 2tan^{-1}(e^x) - \pi/2) \equiv \int_0^x sech\, u\, du, \tag{23}$$

$$gd^{-1} x \;\; (= ln(tan(x/2 + \pi/4))) \equiv \int_0^x sec\, u\, du. \tag{24}$$

In intervalli *compatti* appropriati, dove è *garantita* la convergenza *uniforme*, esistono le seguenti

Espansioni in Serie di Funzioni-tangente

Invertendo l'Eq. (16) ed eseguendo, quindi, la compressione $x \mapsto x/2$, risulta

$$gd\, x = 2tan^{-1}(tanh(x/2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (tanh(x/2))^{2n+1}, \tag{25}$$

dove, $tanh(x/2) \in (-1, 1)$. In particolare, quando $x \in [x_1, x_2] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, l'espansione (25) è equivalente alla rappresentazione in *serie di potenze* (lo si verifichi)

$$\begin{aligned} gd\, x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &\equiv x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \frac{61}{5040}x^7 + \frac{277}{72566}x^9 - \frac{50521}{39916800}x^{11} + \ldots, \end{aligned} \tag{25.1}$$

nella quale, E_{2n} indica il $2n$-simo *numero di Euler* (‡).

Analogamente, invertendo l'Eq. (17) e facendo seguire la compressione $x \mapsto x/2$, si ha

$$gd^{-1} x = 2tanh^{-1}(tan(x/2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} (tan(x/2))^{2n+1}, \tag{26}$$

essendo $tan(x/2) \in (-1,1)$, i.e., $x \in ((2k-1)\pi/2,\ (2k+1)\pi/2)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. In particolare, nel caso in cui si ha $x \in [x_1, x_2] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, l'espansione (26) equivale alla rappresentazione in *serie di potenze* (lo si verifichi, confrontandola con l'espansione (25.1))

$$gd^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\equiv x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{61}{5040}x^7 + \frac{277}{72566}x^9 + \frac{50521}{39916800}x^{11} + \ldots \,. \tag{26.1}$$

Infine, dalle Tabelle (18) e (19), dovrebbe risultare del tutto evidente quali siano, per $x = o(1)$, le espansioni in serie di potenze di $x \mapsto sec(gd\, x)$ o di $x \mapsto coth(gd^{-1}x)$, etc. .

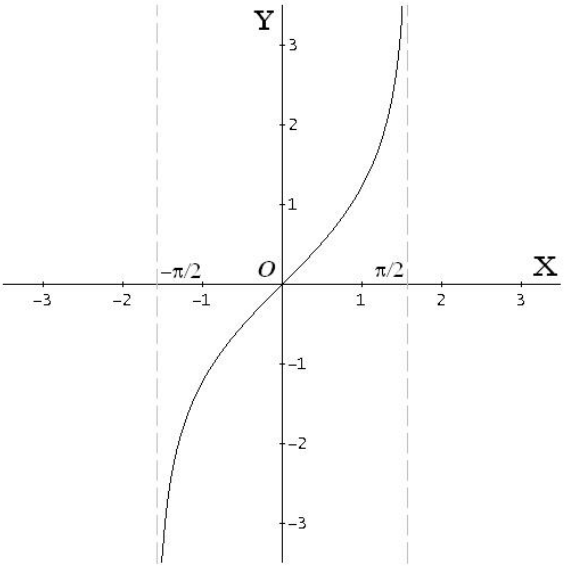


Fig. 4 - Grafico della funzione $x \mapsto gd^{-1}x \equiv y$ (ramo principale)

Osservazione

Il lavoro di Gudermann diede fondamento analitico definitivo alle intuizioni empiriche geniali del geografo, cartografo e agrimensore fiammingo Gerhard Kremer (1512-1594) (latinizz. in MERCATOR, come per il matematico e astronomo tedesco Nikolaus Kauffmann (1620-1687), figura preminente nel periodo introduttivo dei logaritmi). La *proiezione cilindrica modificata di Kremer* (Gerardus Mercator) poggia sulle funzioni gd, gd^{-1} e sulle loro varie rappresentazioni sia in serie sia differenziali sia integrali. Tale proiezione cilindrica è ancora utilizzata, e.g., nella navigazione in versioni più o meno aggiornate e adattate. Una presentazione dell'argomento si trova in:
https://it.wikipedia.org/wiki/Proiezione_cilindrica_centrografica_modificata_di_Mercatore .

■

(†) CHRISTOPH GUDERMANN (1798-1852), studioso delle Funzioni Iperboliche, delle Funzioni Sferiche Speciali e delle Funzioni Ellittiche, docente e guida influente dell'allievo K. W. T. Weierstrass all'Accademia di Münster.

(‡) Il procedimento classico (di Euler) per la determinazione delle espansioni (25.1) e (26.1) è approfondito, con dettagli e vari esempi svolti, e.g., nel math-notebook: Determinazione di serie di potenze in $\mathbb{R}$ dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler, Eq.i (61) e (62), raggiungibile dalla home-page corrente.

Conversioni rad ⇄ radh

Dal grafico del ramo $\mathfrak{H}^+$ (Fig. 2), risultano *formalmente* evidenti le identità biunivoche

$$tan\,\eta \equiv \overline{AT}/a \equiv tanh\,\eta\,, \tag{27}$$

dove, è inteso – non sembra inutile ricordarlo – che la funzione tan opera sull'argomento η come espresso in **rad** mentre la funzione $tanh$ opera sullo *stesso* argomento η come espresso in **radh**.
Invertendo l'Idn. (27) bilateralmente e ricorrendo alla *Funzione di Gudermann* e alla sua inversa si scrivono le formule di conversione, reciprocamente *inverse*,

- $$\begin{aligned}\eta\,(\text{in }\mathbf{radh}) &= tanh^{-1}(tan\,\eta) \equiv tanh^{-1}(tanh((1/2)\,gd^{-1}(2\eta))) \equiv (1/2)\,gd^{-1}(2\eta)\\ &= (1/2)\,ln(tan(\eta\,(\text{in }\mathbf{rad}) + \pi/4))\,;\end{aligned} \tag{28.1}$$

- $$\begin{aligned}\eta\,(\text{in }\mathbf{rad}) &= tan^{-1}(tanh\,\eta) \equiv tan^{-1}(tan((1/2)\,gd(2\eta))) \equiv (1/2)\,gd(2\eta)\,gd(2\eta)\\ &= tan^{-1}(e^{2\eta\,(\text{in }\mathbf{radh})}) - \pi/4\,.\end{aligned} \tag{28.2}$$

____

Esempi:

- $tan^{-1}(tanh(1\,\mathbf{radh})) \approx 0.65088\,\mathbf{rad} \approx (26\pi/25)\,\mathbf{rad} \approx 37°17'34''\,;$
- $tan^{-1}(tanh(-\pi\,\mathbf{radh})) \approx -0.78353\,\mathbf{rad} \approx -(499\pi/2000)\,\mathbf{rad} \quad (>-\pi/4\,\mathbf{rad}) \approx -44°53'35''\,;$
- $tanh^{-1}(tan(-\pi/6\,\mathbf{rad})) \approx -0.65848\,\mathbf{radh}\,;$
- $tanh^{-1}(tan(44°59'59'')) \approx 6.11846\,\mathbf{radh}\,;$
- $tanh^{-1}(tan(-2\pi/5\,\mathbf{rad})) \notin \mathbb{R}$
  perché $tan(-2\pi/5\,\mathbf{rad}) \equiv -tan\,72° = -(5+2\cdot 5^{1/2})^{1/2} < -1 \equiv tan(-\pi/4\,\mathbf{rad})\,;$
- $\lim\limits_{\eta\to\pm\pi/4\,\mathbf{rad}} tanh^{-1}(tan\,\eta) = \pm\infty\,\mathbf{radh}\,;$
- $\lim\limits_{\eta\to\pm\infty\,\mathbf{radh}} tan^{-1}(tanh\,\eta) = \pm\pi/4\,\mathbf{rad}\,.$

■

Completamento delle rappresentazioni geometriche

1. Con riferimento al caso *ellittico-circolare* (Fig. 5),

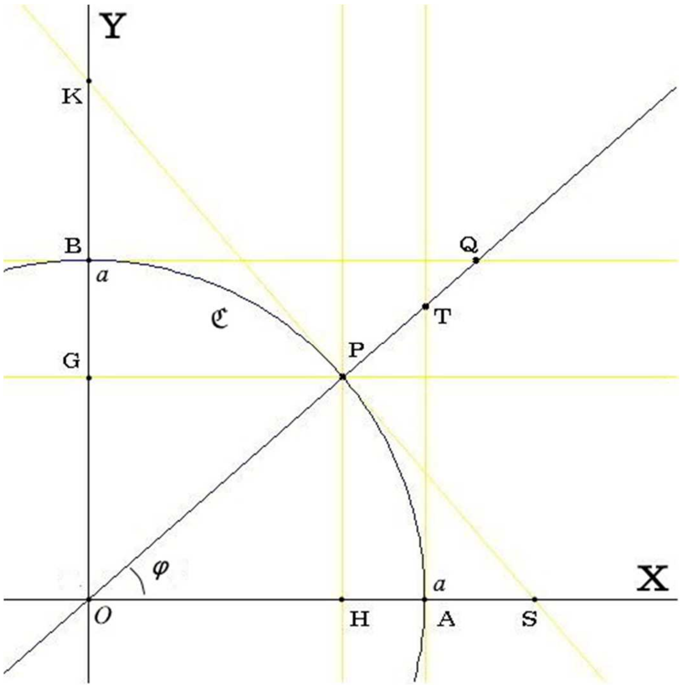


Fig. 5

la similitudine $OBQ \doteqdot OGP$ implica la proporzione $BQ : OB = GP : OG$, i.e., in termini delle misure dei segmenti, si ha $\dfrac{\overline{BQ}}{a} = \dfrac{\overline{GP}}{\overline{OG}} \equiv \dfrac{\cancel{a}\, cos\,\varphi}{\cancel{a}\, sin\,\varphi} := cot\,\varphi$. Segue che

$$\boxed{\overline{BQ} = a\,cot\,\varphi}; \tag{29}$$

la similitudine $OPS \doteqdot OHP$ implica la proporzione $OS : OP = OP : OH$, i.e., in termini delle misure dei segmenti, è determinato dal *1º Teorema di Euclide*, $\overline{OP}^2 = \overline{OS} \cdot \overline{OH}$, i.e., $a^2 = \overline{OS} \cdot a\,cos\,\varphi$. Segue che

$$\boxed{\overline{OS} = \frac{a}{cos\,\varphi} := a\,sec\,\varphi}; \tag{30}$$

la similitudine $OPK \doteqdot OGP$ implica la proporzione $OK : OP = OP : OG$ che, in termini delle misure dei segmenti, è determinato dal *1º Teorema di Euclide*, $\overline{OP}^2 = \overline{OK} \cdot \overline{OG}$, i.e., $a^2 = \overline{OK} \cdot a\,sin\,\varphi$. Segue che

$$\boxed{\overline{OK} = \frac{a}{sin\,\varphi} := a\,csc\,\varphi}. \tag{31}$$

Si osservi l'allineamento dei punti P, T e Q sulla retta r_{OPQ}: il punto Q si sposta davanti, o dietro, al punto T, secondo come varia l'*ampiezza circolare* φ.

□

2. Con riferimento al caso *iperbolico-equilatero* (Fig. 6),

oltre ai punti $P \equiv (\bar{x}; \bar{y}) \equiv (a\cosh\eta; a\sinh\eta)$, con $\eta \equiv P\hat{O}M$ e $A \equiv (a;0)$, si consideri il punto $B \equiv (0;a)$, allineato con i punti Q e F sulla retta $y = a$. Siano K e H, le proiezioni ortogonali di Q e di P, rispettivamente, sull'asse X.
La similitudine $OKQ \doteq OHP$ implica la proporzione $OK : OH = KQ : HP$, i.e., in termini di misure dei segmenti, risulta $\dfrac{\overline{OK}}{a\cosh\eta} = \dfrac{\overline{KQ}}{\overline{HP}} \equiv \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sinh\eta}$. Segue che

$$\overline{OK} = \frac{a\cosh\eta}{\sinh\eta} := a\coth\eta. \tag{32}$$

Inoltre, costruito il triangolo OFM, rettangolo in $F \equiv (a\cosh\eta; a)$, il *2º Teorema di Euclide* determina il quadrato $\overline{FH}^2 = \overline{OH} \cdot \overline{HM}$, i.e., $a^2 = a\cosh\eta \cdot \overline{HM}$, da cui, si ha

$$\overline{HM} = \frac{a}{\cosh\eta} := a\,\mathrm{sech}\,\eta. \tag{33}$$

Analogamente, costruito il triangolo OGN, rettangolo in $G \equiv (a; a\sinh\eta)$, poiché vale il quadrato $\overline{SG}^2 = \overline{OS} \cdot \overline{SN}$, i.e., $a^2 = a\sinh\eta \cdot \overline{SN}$, allora, risulta

$$\overline{SN} = \frac{a}{\sinh\eta} := a\,\mathrm{csch}\,\eta. \tag{34}$$

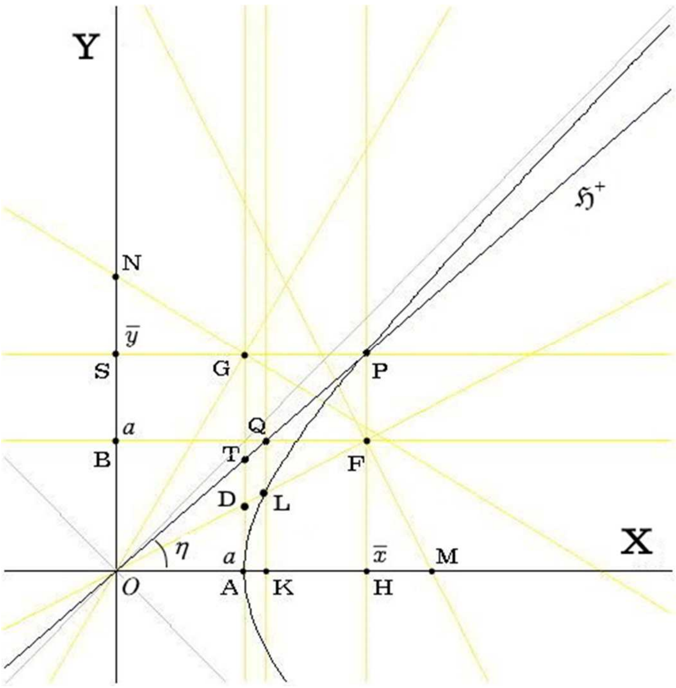


Fig. 6

Analogamente, i punti P, Q e T, inizialmente sovrapposti sulla retta r_{OP} in A $(x = a)$, si separano per poi tornare a sovrapporsi sull'asintoto $(\bar{y}/\bar{x} \to 1^-)$ a distanza crescente di P da A, seguendo la decrescita continua della *curvatura* di $\mathfrak{H}^+$, da a/b^2 a 0, al crescere della *ampiezza iperbolica* η.

■

Qui di seguito, sono riportati gli elementi significativi, punti e rette, necessari nella costruzione geometrica mostrata nella Fig. 6:

assegnato il punto-base $P \equiv (\overline{x}\,;\overline{y}) \equiv (a\,cosh\eta\,;a\,sinh\eta) \in \mathfrak{H}^+$, si determinano agevolmente i punti

$A \equiv (a\,;0)$, $K \equiv (a\overline{x}/\overline{y}\,;0)$, $H \equiv (\overline{x}\,;0)$, $M \equiv (\overline{x}+a^2/\overline{x}\,;0)$,

$D \equiv (a;a^2/\overline{x})$, $L \equiv (a\overline{x}/\overline{y};a^2/\overline{y})$, $F \equiv (\overline{x}\,;a)$,

$T \equiv (a\,;a\overline{y}/\overline{x})$, $Q \equiv (a\overline{x}/\overline{y}\,;a)$,

$G \equiv (a\,;\overline{y})$,

$B \equiv (0;a)$, $S \equiv (0;\overline{y})$, $N \equiv (0;\overline{y}+a^2/\overline{y})$,

e le rette di sostegno

$r_{OTQP}: \; y = (\overline{y}/\overline{x})x$, $r_{ADTG}: \; x = a$, $r_{BQF}: \; y = a$, $r_{KLQ}: \; x = a\overline{x}/\overline{y}$,

$r_{ODLF}: \; y = (a/\overline{x})x$, $r_{FM}: \; y = -(\overline{x}/a)x + \overline{x}^2/a + a$,

$r_{OG}: \; y = (\overline{y}/a)x$, $r_{NG}: \; y = -(a/\overline{y})x + a^2/\overline{y} + \overline{y}$.

Osservazione

Dalla discussione precedente, appaiono evidenti le connessioni geometriche delle due Goniometrie, rispettivamente, dai due *Teoremi di Euclide* classici. A loro volta, questi discendono direttamente dal Teorema di Pitagora, il vero ‘Atlante’, sul quale, a ben vedere, poggia tutta la costruzione teorica presentata!

■

Funzioni su dominî ristretti in $\mathbb{R}$

Sia $f : \mathfrak{D}(\subseteq \mathbb{R}) \mapsto \mathfrak{C}(\subseteq \mathbb{R})$.
Quando esiste, si definisce **determinazione principale** di f la *restrizione* di f, *generalmente monotòna*,

$$f_{|\mathfrak{D}_0} : \mathfrak{D}_0 \mapsto \mathfrak{C},$$

a un sotto-dominio proprio convenzionale $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$, detto l'**insieme principale di definizione** di f. Ciò implica, *generalmente*, che $\exists!$ (esiste un'*unica*) $(f_{|\mathfrak{D}_0})^{-1} : \mathfrak{C} \mapsto \mathfrak{D}_0$ (vs. $\mathfrak{D}_0$, *generalmente* significa: eccetto, al più, che per un numero *finito* di elementi $x \in \mathfrak{D}_0$). (†)
Dunque, se la restrizione $f_{|\mathfrak{D}_0}$ è definibile, essa conserva il co-dominio $\mathfrak{C}$ originario, risultando *generalmente bi-iettiva* tra $\mathfrak{D}_0$ e $\mathfrak{C}$.
Nella specificazione di $\mathfrak{D}_0$, si conviene di determinare $f_{|\mathfrak{D}_0}$ così che l'insieme $graf(f_{|\mathfrak{D}_0})$, detto il **ramo principale** di $graf(f)$, sia *simmetrico* o *anti-simmetrico* rispetto ad almeno uno degli assi del riferimento cartesiano e, possibilmente, che $0 \in \overline{\mathfrak{D}}_0$ $(\equiv \mathfrak{D}_0 \cup \partial\mathfrak{D}_0)$ ($\overline{\mathfrak{D}}_0$ indica la *chiusura* di $\mathfrak{D}_0$, inclusiva della *frontiera* $\partial\mathfrak{D}_0$). Da ciò, segue che la stessa specificazione della monotonìa di f in $\mathfrak{D}_0$ (crescita o decrescita in senso stretto *generalmente*) corrisponde a criteri di simmetria assiale o centrale evidenti.
Il valore $\bar{y} \equiv f(\bar{x})$, per $\bar{x} \in \mathfrak{D}_0$, costituisce un **valore principale** di f.
Salvo specificazione diversa, le operazioni analitiche formali su f, in primo luogo, le *derivazioni* e le *integrazioni*, sono riferite convenzionalmente a $\mathfrak{D}_0$.

Le tabelle alle P. 15-17 riportano gli insiemi *prodotto cartesiano* $\mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{C}$ delle funzioni-restrizione *trascendenti fondamentali*, nella rappresentazione esplicita consueta $x \mapsto f_{|\mathfrak{D}_0}(x) \equiv y$.
I grafici rispettivi di tali funzioni – salvo quelli delle *Funzioni Esponenziale, Logaritmica e di Gudermann* diretta e inversa (v. P. 6 e 9) – si trovano alle pagine successive 18-21.

■

(†) Riguardo all'impostazione generale dell'argomento e alla terminologia, l'autore si ispira, regolarmente, al lavoro *eccellente*:
C. D. PAGANI - S. SALSA, *ANALISI MATEMATICA*, VOL. **1** & **2**, ZANICHELLI (-MASSON) (1998).

Dominî e Codominî in $\mathbb{R}$ delle Funzioni(-restrizione) trascendenti elementari

A. Le Funzioni-restrizione **Circolari** dirette e inverse

$x \mapsto f_{\|\mathfrak{D}_0}(x) \equiv y$	$\mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{C}$
$x \mapsto \cos x$	$[0, \pi] \times [-1, 1]$
$x \mapsto \cos^{-1} x$	$[-1, 1] \times [0, \pi]$
$x \mapsto \sin x$	$[-\pi/2, \pi/2] \times [-1, 1]$
$x \mapsto \sin^{-1} x$	$[-1, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$
$x \mapsto \tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$(-\pi/2, \pi/2) \times (-\infty, +\infty)$
$x \mapsto \tan^{-1} x$	$(-\infty, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$
$x \mapsto \cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$(0, \pi) \times (-\infty, +\infty)$
$x \mapsto \cot^{-1} x$	$(-\infty, +\infty) \times (0, \pi)$
$x \mapsto \sec x := \dfrac{1}{\cos x}$	$\{[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]\} \times \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$
$x \mapsto \sec^{-1} x$	$\{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \times \{[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]\}$
$x \mapsto \csc x := \dfrac{1}{\sin x}$	$\{[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]\} \times \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$
$x \mapsto \csc^{-1} x$	$\{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \times \{[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]\}$

B. Le Funzioni **Esponenziale**, **Logaritmica** e
le Funzioni(-restrizione) **Gudermanniane** diretta e inversa

$x \mapsto e^x$	$(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$
$x \mapsto \ln x$	$(0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$

$x \mapsto gd\, x := 2\tan^{-1}(e^x) - \pi/2$	$(-\infty, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$
$x \mapsto gd^{-1} x \equiv \ln(\tan(x/2 + \pi/4))$	$(-\pi/2, \pi/2) \times (-\infty, +\infty)$

C. Le Funzioni **Iperboliche** dirette e inverse (v. p. 24-25)

$x \mapsto \cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$[0, +\infty) \times [1, +\infty)$
$x \mapsto \cosh^{-1} x := \ln(x + (x^2 - 1)^{1/2})$	$[1, +\infty) \times [0, +\infty)$
$x \mapsto \sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$
$x \mapsto \sinh^{-1} x := \ln(x + (x^2 + 1)^{1/2})$	$(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$

$x \mapsto \tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \equiv \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$(-\infty, +\infty) \times (-1, 1)$
$x \mapsto \tanh^{-1} x := \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$	$(-1, 1) \times (-\infty, +\infty)$

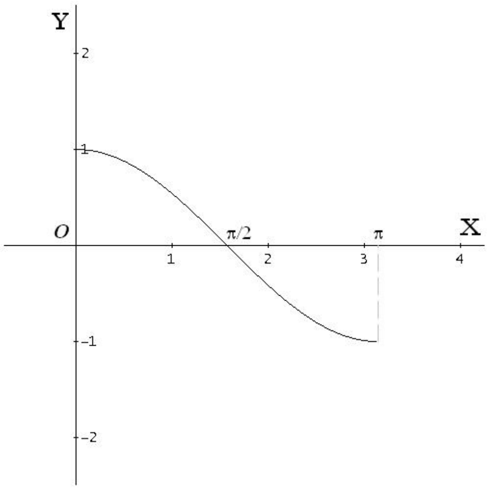
$x \mapsto \coth x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x} \equiv \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \equiv \dfrac{1}{\tanh x}$	$\{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\} \times \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\}$
$x \mapsto \coth^{-1} x := \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$	$\{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \times \{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$

$x \mapsto sech\,x := \dfrac{1}{cosh\,x} \equiv \dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$	$(-\infty,+\infty)\times(0,1]$
$x \mapsto sech^{-1}x := ln\dfrac{1+(1-x^{2})^{1/2}}{x}$	$(0,1]\times[0,+\infty)$

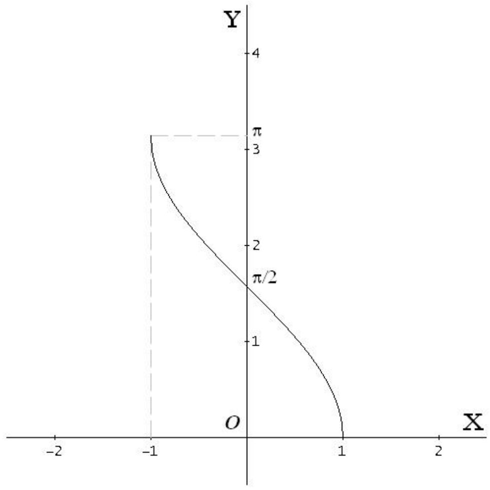
$x \mapsto csch\,x := \dfrac{1}{sinh\,x} \equiv \dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$	$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\times\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}$
$x \mapsto csch^{-1}x := ln\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{(1+x^{2})^{1/2}}{\lvert x\rvert}\right)$	$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\times\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}$

■

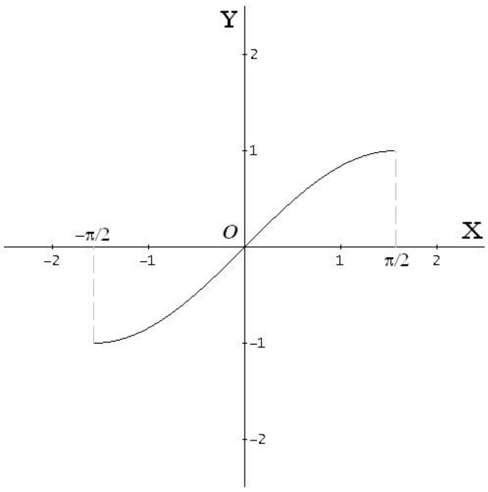
I grafici delle Funzioni Circolari dirette e inverse



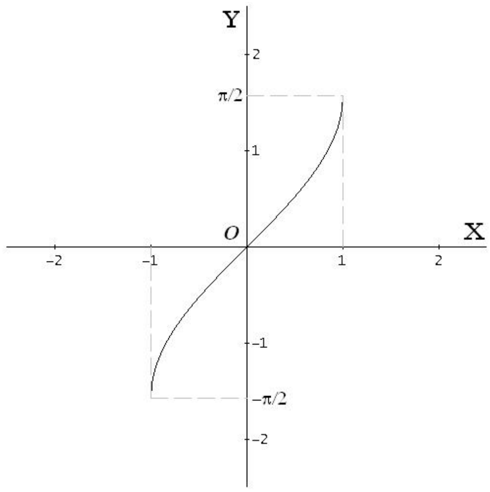
$x \mapsto cos\, x$



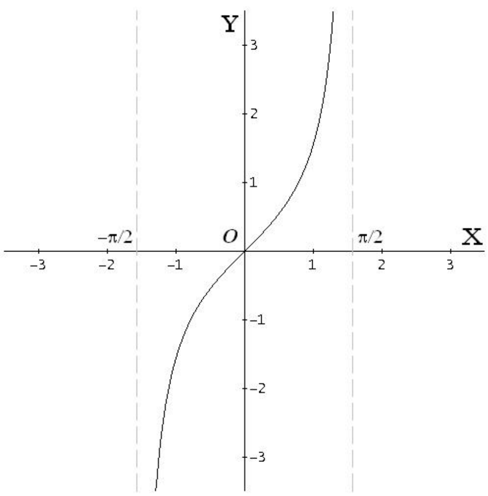
$x \mapsto cos^{-1} x$



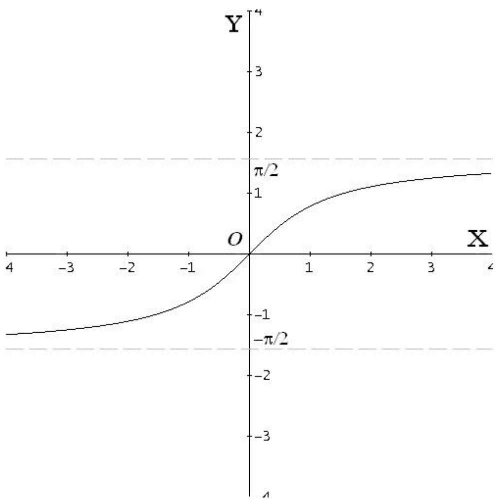
$x \mapsto sin\, x$



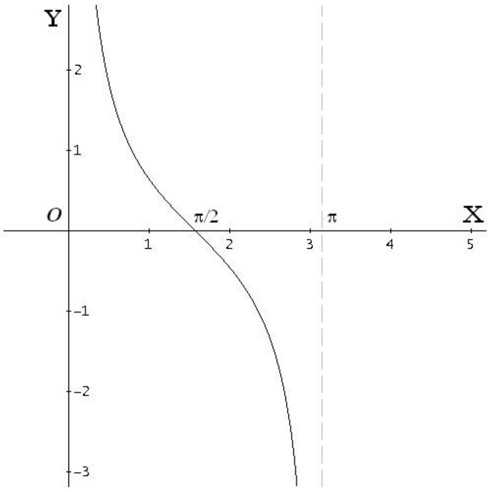
$x \mapsto sin^{-1} x$



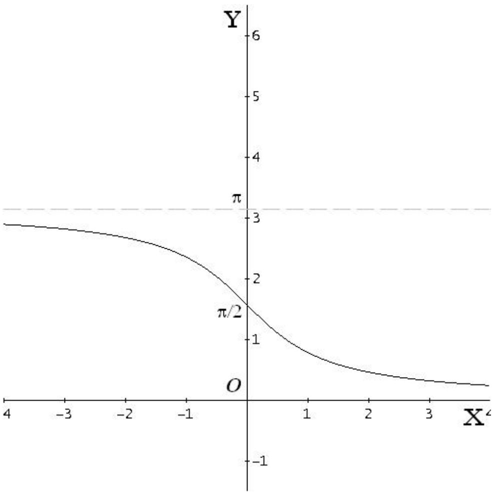
$x \mapsto tan\, x$



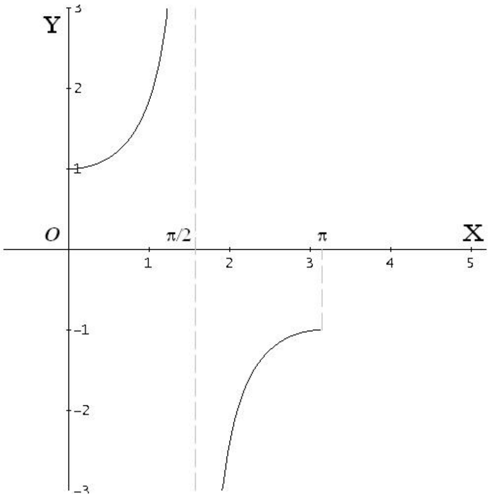
$x \mapsto tan^{-1} x$



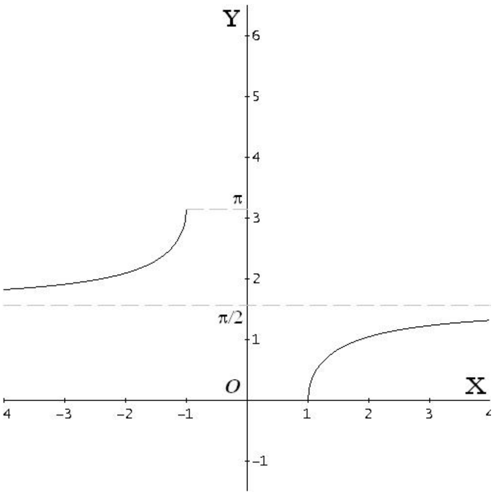
$x \mapsto cot\, x$



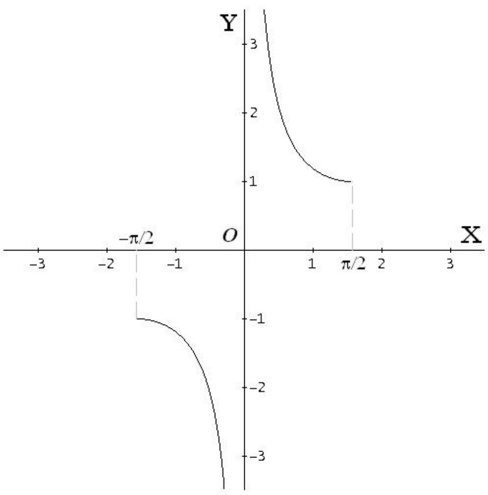
$x \mapsto cot^{-1} x$



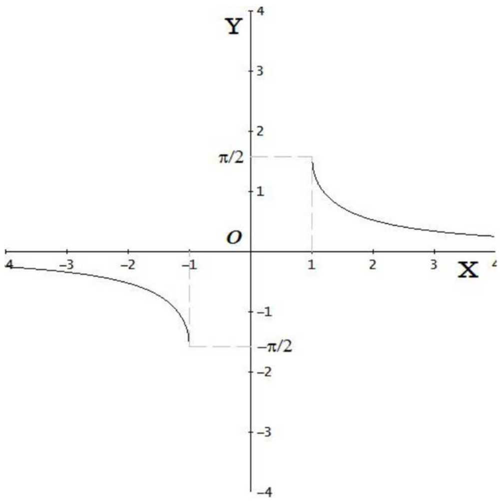
$x \mapsto sec\, x$



$x \mapsto sec^{-1} x$

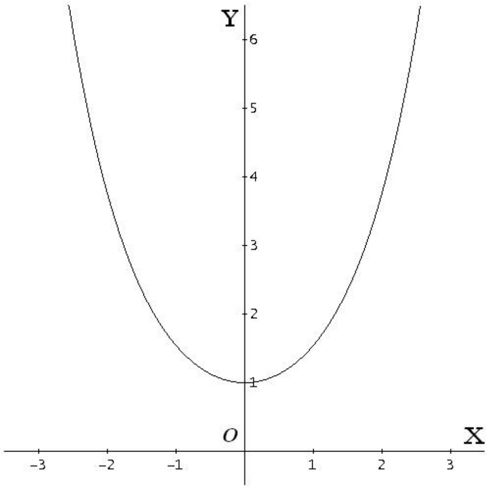


$x \mapsto csc\, x$

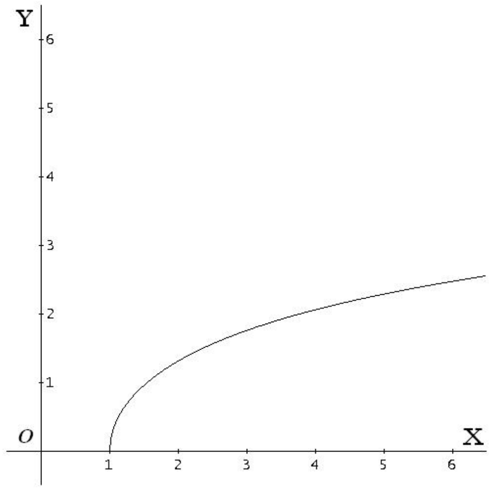


$x \mapsto csc^{-1} x$

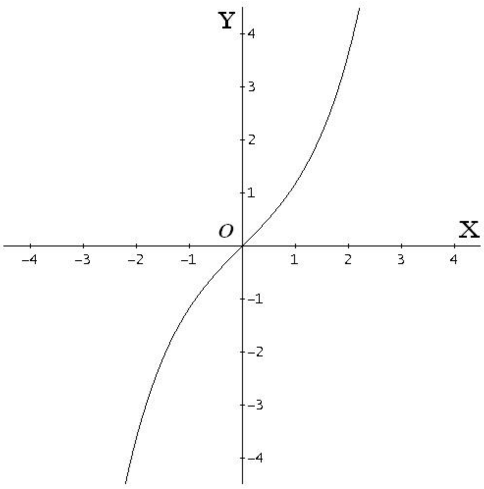
I grafici delle Funzioni Iperboliche dirette e inverse



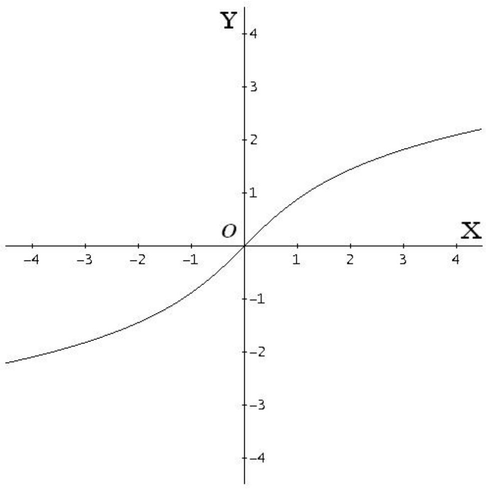
$x \mapsto \cosh x$



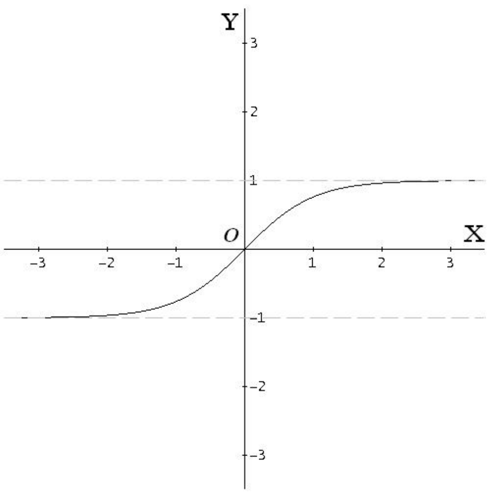
$x \mapsto \cosh^{-1} x$



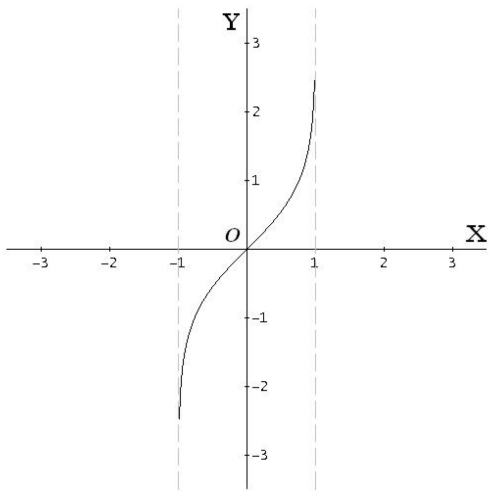
$x \mapsto \sinh x$



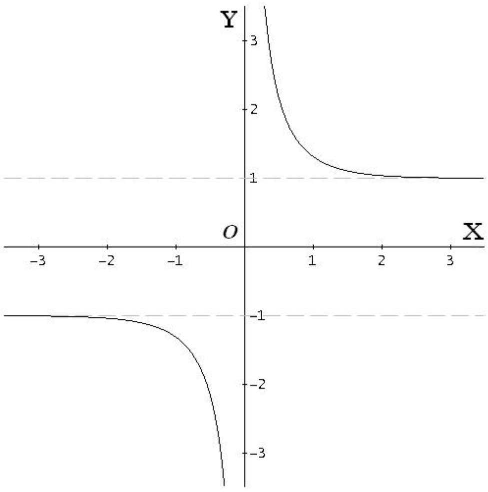
$x \mapsto \sinh^{-1} x$



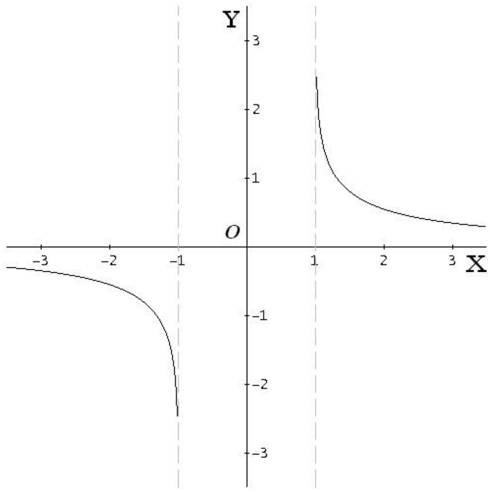
$x \mapsto \tanh x$



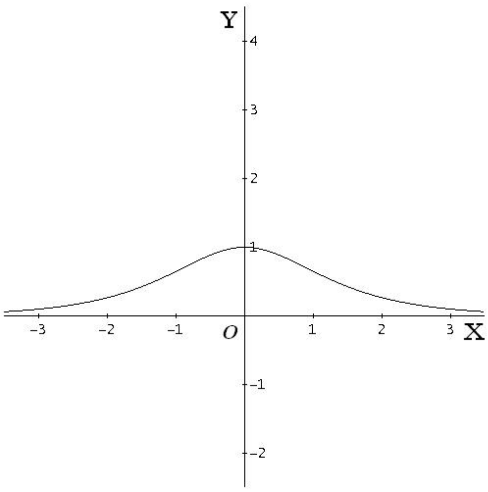
$x \mapsto \tanh^{-1} x$



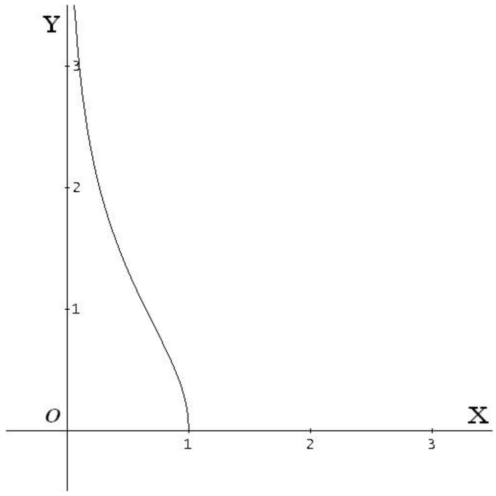
$x \mapsto coth\, x$



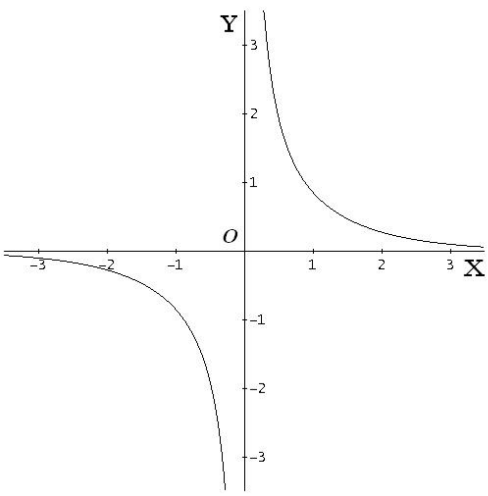
$x \mapsto coth^{-1} x$



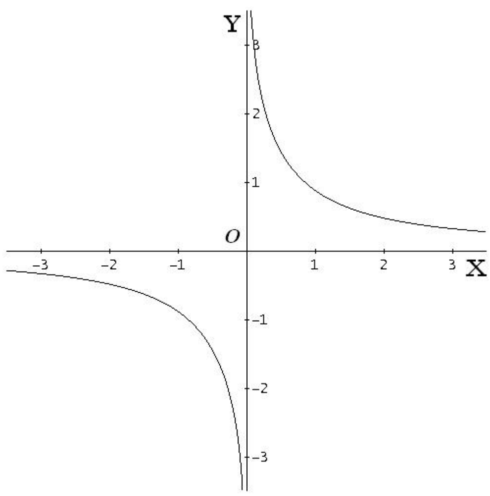
$x \mapsto sech\, x$



$x \mapsto sech^{-1} x$



$x \mapsto csch\, x$



$x \mapsto csch^{-1} x$

■

L'inversione dei valori iperbolici in $\mathbb{R}$

1. Dalla definizione in $\mathbb{R}$ del valore parametrico

$$k := \cosh\eta \equiv \frac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2} ,$$

si ottiene l'equazione $e^{2\eta}-2ke^{\eta}+1 = 0$. Risolvendola vs. e^{η}, si determinano le radici *reciproche* $e^{\eta} = k \pm (k^2-1)^{1/2}$. Ovviamente, $e^{\eta} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow k \in [1,+\infty)$. Quindi, per inversione, risultano

$$\eta_{\pm} = \ln(k \pm (k^2-1)^{1/2}) .$$

Quale di queste due η - rappresentazioni scegliere? Poiché i valori

$$\eta_{-} \equiv \ln(k-(k^2-1)^{1/2}) \equiv -\ln\frac{1}{k-(k^2-1)^{1/2}} \equiv -\ln(k+(k^2-1)^{1/2}) \equiv -\eta_{+}$$

sono *opposti*, si assume η_{+}, *convenzionalmente*, come la *rappresentazione principale* di η.
Quindi,

$$\cosh^{-1}k := \ln(k+(k^2-1)^{1/2}) \equiv \eta ; \tag{35}$$

2. la definizione in $\mathbb{R}$ del valore parametrico

$$s := \sinh\eta \equiv \frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2}$$

genera l'equazione $e^{2\eta}-2se^{\eta}-1 = 0$, che, risolta vs. e^{η}, fornisce le radici

$$e^{\eta} = \begin{cases} s+(s^2+1)^{1/2}, & \forall\, s \in \mathbb{R} \\ s-(s^2+1)^{1/2} < 0 & \Rightarrow \quad \eta \notin \mathbb{R} \end{cases} .$$

Pertanto, dall'*unica* radice invertibile in $\mathbb{R}$, la *prima*, si ottiene

$$\sinh^{-1}s := \ln(s+(s^2+1)^{1/2}) \equiv \eta ; \tag{36}$$

3. dalla definizione in $\mathbb{R}$ del valore parametrico

$$\tau := \tanh\eta \equiv \frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{e^{\eta}+e^{-\eta}} \equiv \frac{e^{2\eta}-1}{e^{2\eta}+1} \equiv \frac{1-e^{-2\eta}}{1+e^{-2\eta}} \quad (\equiv s/k) ,$$

risulta $e^{2\eta} = (1+\tau)/(1-\tau)$, $\forall\, \tau \in (-1,1)$. Quindi, invertendo $e^{2\eta}$ vs. η, si trova

$$\tanh^{-1}\tau := \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) \equiv \eta ; \tag{37}$$

4. dalla definizione in $\mathbb{R}$ del valore parametrico

$$q := coth\,\eta \equiv \frac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{e^{\eta}-e^{-\eta}} \equiv \frac{e^{2\eta}+1}{e^{2\eta}-1} \equiv \frac{1+e^{-2\eta}}{1-e^{-2\eta}} \quad (q \equiv k/s \equiv 1/\tau),$$

risulta, $e^{2\eta} = (q+1)/(q-1)$, $\forall\, q \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Pertanto, invertendo $e^{2\eta}$ vs. η, si trova

$$coth^{-1} q := \frac{1}{2} ln\left(\frac{q+1}{q-1}\right) \equiv \eta\,; \tag{38}$$

5. assegnato il valore parametrico in $\mathbb{R}$

$$\sigma := sech\,\eta \equiv \frac{2}{e^{\eta}+e^{-\eta}} \equiv \frac{2e^{\eta}}{e^{2\eta}+1} \quad (\equiv 1/k),$$

risulta l'equazione $\sigma e^{2\eta} - 2e^{\eta} + \sigma = 0$. Risolvendola vs. e^{η}, si determinano le radici *reciproche* $e^{\eta} = (1 \pm (1-\sigma^2)^{1/2})/\sigma$, con il vincolo $\sigma \in (0,1]$. Quindi, per inversione, risultano

$$\eta_{\pm} = ln((1 \pm (1-\sigma^2)^{1/2})/\sigma)\,.$$

Quale di queste due η-rappresentazioni scegliere? Poiché le due radici,

$$\eta_{-} \equiv ln((1-(1-\sigma^2)^{1/2})/\sigma) \equiv -ln(\sigma/(1-(1-\sigma^2)^{1/2})) \equiv -ln((1+(1-\sigma^2)^{1/2})/\sigma) \equiv -\eta_{+}$$

sono *opposte*, si assume η_{+}, *convenzionalmente*, come la *rappresentazione principale* di η.
Quindi,

$$sech^{-1}\sigma := ln((1+(1-\sigma^2)^{1/2})/\sigma) \equiv \eta\,; \tag{39}$$

6. assegnato il valore parametrico in $\chi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\chi := csch\,\eta \equiv \frac{2}{e^{\eta}-e^{-\eta}} \equiv \frac{2e^{\eta}}{e^{2\eta}-1} \quad (\equiv 1/s),$$

se ne deduce l'equazione $\chi e^{2\eta} - 2e^{\eta} - \chi = 0$. Questa, risolta vs. e^{η}, fornisce le radici

$$e^{\eta} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1+(1+\chi^2)^{1/2}}{\chi}, & \text{se } \chi \in (0,+\infty), \\ \dfrac{1-(1+\chi^2)^{1/2}}{\chi}, & \text{se } \chi \in (-\infty,0), \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{\chi} + \frac{(1+\chi^2)^{1/2}}{|\chi|}\,.$$

Pertanto, invertendo e^{η} vs. η, segue che

$$csch^{-1}\chi := ln\left(\frac{1}{\chi} + \frac{(1+\chi^2)^{1/2}}{|\chi|}\right) \equiv \eta\,. \tag{40}$$

■

Identità Goniometriche Iperboliche in $\mathbb{R}$

A. Funzioni Dirette

Riepilogo delle rappresentazioni *esponenziali*:

$$\begin{aligned} &\cosh x := \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, && \sinh x := \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, && \tanh x := \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}, \\ &\operatorname{sech} x := \frac{2}{e^{x}+e^{-x}} \equiv \frac{1}{\cosh x}, && \operatorname{csch} x := \frac{2}{e^{x}-e^{-x}} \equiv \frac{1}{\operatorname{csch} x}, && \coth x := \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} \equiv \frac{1}{\tanh x}; \end{aligned} \tag{41}$$

Dalle Rappresentazioni (41), seguono tutte le identità (in **radh**) seguenti (se ne consiglia la verifica!):

identità moltiplicative:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \coth x \cdot \sinh x, & \sinh x &= \tanh x \cdot \cosh x, \\ \tanh x &= \sinh x \cdot \operatorname{sech} x, & \coth x &= \cosh x \cdot \operatorname{csch} x, \\ \operatorname{sech} x &= \tanh x \cdot \operatorname{csch} x, & \operatorname{csch} x &= \coth x \cdot \operatorname{sech} x; \end{aligned} \tag{42}$$

identità-quoziente:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{\coth x}{\operatorname{csch} x}, & \sinh x &= \frac{\tanh x}{\operatorname{sech} x}, & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, & \operatorname{sech} x &= \frac{\operatorname{csch} x}{\coth x}, & \operatorname{csch} x &= \frac{\operatorname{sech} x}{\tanh x}; \end{aligned} \tag{43}$$

identità iperboliche *quadratiche* fondamentali:

$$\begin{aligned} (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= 1, & (\tanh x)^2 + (\operatorname{sech} x)^2 &= 1, \\ (\coth x)^2 - (\operatorname{csch} x)^2 &= 1, & (\operatorname{csch} x)^2 - (\operatorname{sech} x)^2 &= (\operatorname{csch} x)^2 (\operatorname{sech} x)^2; \end{aligned} \tag{44}$$

identità di *somma\differenza angolare* iperbolica:

$$\begin{aligned} \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y, \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y, \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y} = \frac{\sinh(2x) \pm \sinh(2y)}{\cosh(2x) \pm \cosh(2y)}, \\ \coth(x \pm y) &= \frac{1 \pm \cosh x \cdot \coth y}{\coth x \pm \coth y} = \frac{\sinh(2x) \mp \sinh 2y}{\cosh(2x) - \cosh(2y)}; \end{aligned} \tag{45}$$

identità di *duplicazione* iperbolica:

$$\begin{aligned} &\cosh(2x) \equiv \frac{1}{\operatorname{sech}(2x)} = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = 2(\cosh x)^2 - 1 = 1 + 2(\sinh x)^2 = \frac{1+(\tanh x)^2}{1-(\tanh x)^2}, \\ &\sinh(2x) \equiv \frac{1}{\operatorname{csch}(2x)} = 2\cosh x \cdot \sinh x = \frac{2\tanh x}{1-(\tanh x)^2}, \\ &\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+(\tanh x)^2}, \qquad \coth 2x = \frac{1+(\coth x)^2}{2\coth x}; \end{aligned} \tag{46}$$

identità di *triplicazione* iperbolica:

$$\begin{aligned} &\cosh(3x) = 4(\cosh x)^3 - 3\cosh x = (1 + 4(\sinh x)^2)\cosh x, \\ &\sinh(3x) = 4(\sinh x)^3 + 3\sinh x = (4(\cosh x)^2 - 1)\sinh x, \\ &\tanh(3x) = \frac{(3+(\tanh x)^2)\tanh x}{1+3(\tanh x)^2}, \qquad \coth 3x = \frac{(3+(\coth x)^2)\coth x}{1+3(\coth x)^2}; \end{aligned} \tag{47}$$

identità di *bi-sezione* iperbolica:

$$\begin{aligned}
cosh(x/2) &= \left(\frac{cosh\,x+1}{2}\right)^{1/2}, \\
sinh(x/2) &= \pm\left(\frac{cosh\,x-1}{2}\right)^{1/2}, \\
tanh(x/2) &= \pm\left(\frac{cosh\,x-1}{cosh\,x+1}\right)^{1/2} = \frac{cosh\,x-1}{sinh\,x} = \frac{sinh\,x}{cosh\,x+1}, \\
coth(x/2) &= \pm\left(\frac{cosh\,x+1}{cosh\,x-1}\right)^{1/2} = \frac{cosh\,x+1}{sinh\,x} = \frac{sinh\,x}{cosh\,x-1};
\end{aligned} \tag{48}$$

identità *parametriche* iperboliche:

posto $\tau := tanh(x/2)$ o, altrimenti, $\kappa := coth(x/2)$, seguono (condizionate!), rispettivamente

$$\begin{aligned}
cosh\,x &\equiv \frac{1}{sech\,x} = \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, & cosh\,x &\equiv \frac{1}{sech\,x} = \frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1}, \\
sinh\,x &\equiv \frac{1}{csch\,x} = \frac{2\tau}{1-\tau^2}, & sinh\,x &\equiv \frac{1}{csch\,x} = \frac{2\kappa}{\kappa^2-1}, \\
tanh\,x &\equiv \frac{1}{coth\,x} = \frac{2\tau}{1+\tau^2}; & tanh\,x &\equiv \frac{1}{coth\,x} = \frac{2\kappa}{\kappa^2+1};
\end{aligned} \tag{49}$$

identità di *prostaferesi* iperbolica:

$$\begin{aligned}
cosh\,x + cosh\,y &= 2\,cosh\frac{x+y}{2}\,cosh\frac{x-y}{2}, \\
cosh\,x - cosh\,y &= 2\,sinh\frac{x+y}{2}\,sinh\frac{x-y}{2}, \\
sinh\,x + sinh\,y &= 2\,sinh\frac{x+y}{2}\,cosh\frac{x-y}{2}, \\
sinh\,x - sinh\,y &= 2\,cosh\frac{x+y}{2}\,sinh\frac{x-y}{2}, \\
tanh\,x \pm tanh\,y &= (1 \pm tanh\,x\,tanh\,y)\,tanh(x \pm y) = \frac{sinh(x \pm y)}{cosh\,x \cdot cosh\,y}, \\
coth\,x \pm coth\,y &= \frac{1 \pm coth\,x \cdot coth\,y}{coth(x \pm y)} = \frac{sinh(x \pm y)}{sinh\,x \cdot sinh\,y}; \\
&\text{---} \\
cosh\,x \pm sinh\,x &= \frac{1 \pm tanh(x/2)}{1 \mp tanh(x/2)} = e^{\pm x};
\end{aligned} \tag{50}$$

Identità *di Werner* iperboliche:

$$\begin{aligned}
&cosh\,x \cdot cosh\,y = (1/2)(cosh(x+y) + cosh(x-y)), \\
&sinh\,x \cdot sinh\,y = (1/2)(cosh(x+y) - cosh(x-y)), \\
&cosh\,x \cdot sinh\,y = (1/2)(sinh(x+y) - sinh(x-y)); \\
&\text{---} \\
&cosh(x+y) \cdot cosh(x-y) = (cosh\,x)^2 + (sinh\,y)^2 = (cosh\,y)^2 + (sinh\,x)^2, \\
&sinh(x+y) \cdot sinh(x-y) = (cosh\,x)^2 - (cosh\,y)^2 = (sinh\,x)^2 - (sinh\,y)^2;
\end{aligned} \tag{51}$$

le *Identità Euleriane* di connessione con le Funzioni Goniometriche Circolari *Dirette* seguono dall'*Identità Euleriana fondamentale*

$$e^{\pm ix} \equiv cos\,x \pm i\,sin\,x : \tag{52}$$

$$\begin{array}{ll} cosh(ix) = cos\,x\,, & cosh\,x = cos(ix)\,, \\ sinh(ix) = i\,sin\,x\,, & sinh\,x = -i\,sin(ix)\,, \\ tanh(ix) = i\,tan\,x\,, & tanh\,x = -i\,tan(ix)\,, \\ coth(ix) = -i\,cot\,x\,, & coth\,x = i\,cot(ix)\,, \\ sech(ix) = sec\,x\,, & sech\,x = sec(ix)\,, \\ csch(ix) = -i\,csc\,x\,, & csch\,x = i\,csc(ix)\,. \end{array} \tag{53}$$

A sua volta, l'*Identità Euleriana fondamentale* (52) è verificabile con le $\mathcal{M}$-espansioni ($\therefore$ Maclaurin) specifiche, tutte convergenti *uniformemente* in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pm ix)^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{53.1}$$

La convergenza uniforme delle serie di potenze nella rappresentazione (53.1) è condizione *sufficiente* per la verifica *termine-a-termine* dell'uguaglianza. L'algebra è un po' laboriosa ma diretta; per tale scopo, va ricordata la regola ciclica quaternaria, valida $\forall\, n \in \mathbb{Z}\ (n\ mod\ 4)$,

$$i^{4n} = 1\,, \quad i^{4n+1} = i\,, \quad i^{4n+2} = -1\,, \quad i^{4n+3} = -i\,. \tag{53.2}$$

□

Introdotto il simbolo abbreviato $\varsigma := sgn(x) \equiv \pm 1$, altre identità possono essere dedotte combinando opportunamente le relazioni generali nelle due Tabelle seguenti per le rappresentazioni di *ciascuna* Funzione Iperbolica Diretta mediante *qualsiasi altra* Funzione Iperbolica Diretta (cf/c p. 20-21, grafici a *sinistra*):

	$f \equiv cosh$	$f \equiv sinh$	$f \equiv tanh$
$cosh\,x =$	$cosh\,x$	$(1+(sinh\,x)^2)^{1/2}$	$\frac{1}{(1-(tanh\,x)^2)^{1/2}}$
$sinh\,x =$	$\varsigma\,((cosh\,x)^2-1)^{1/2}$	$sinh\,x$	$\frac{tanh\,x}{(1-(tanh\,x)^2)^{1/2}}$
$tanh\,x =$	$\varsigma\,\frac{((cosh\,x)^2-1)^{1/2}}{cosh\,x}$	$\frac{sinh\,x}{(1+(sinh\,x)^2)^{1/2}}$	$tanh\,x$
$sech\,x =$	$\frac{1}{cosh\,x}$	$\frac{1}{(1+(sinh\,x)^2)^{1/2}}$	$(1-(tanh\,x)^2)^{1/2}$
$csch\,x =$	$\varsigma\,\frac{1}{((cosh\,x)^2-1)^{1/2}}$	$\frac{1}{sinh\,x}$	$\frac{(1-(tanh\,x)^2)^{1/2}}{tanh\,x}$
$coth\,x =$	$\varsigma\,\frac{cosh\,x}{((cosh\,x)^2-1)^{1/2}}$	$\frac{(1+(sinh\,x)^2)^{1/2}}{sinh\,x}$	$\frac{1}{tanh\,x}$

Tabella 1

	$f \equiv sech$	$f \equiv csch$	$f \equiv coth$
$cosh\,x =$	$\frac{1}{sech\,x}$	$\tilde{\varsigma}\frac{((csch\,x)^2+1)^{1/2}}{csch\,x}$	$\tilde{\varsigma}\frac{coth\,x}{((coth\,x)^2-1)^{1/2}}$
$sinh\,x =$	$\tilde{\varsigma}\frac{(1-(sech\,x)^2)^{1/2}}{sech\,x}$	$\frac{1}{csch\,x}$	$\tilde{\varsigma}\frac{1}{((coth\,x)^2-1)^{1/2}}$
$tanh\,x =$	$\tilde{\varsigma}(1-(sech\,x)^2)^{1/2}$	$\frac{1}{((csch\,x)^2+1)^{1/2}}$	$\frac{1}{coth\,x}$
$sech\,x =$	$sech\,x$	$\tilde{\varsigma}\frac{csch\,x}{((csch\,x)^2+1)^{1/2}}$	$\tilde{\varsigma}\frac{((coth\,x)^2-1)^{1/2}}{coth\,x}$
$csch\,x =$	$\tilde{\varsigma}\frac{sech\,x}{(1-(sech\,x)^2)^{1/2}}$	$csch\,x$	$\tilde{\varsigma}((coth\,x)^2-1)^{1/2}$
$coth\,x =$	$\tilde{\varsigma}\frac{1}{(1-(sech\,x)^2)^{1/2}}$	$((csch\,x)^2+1)^{1/2}$	$coth\,x$

Tabella 2

■

B. Funzioni Inverse

Riepilogo delle rappresentazioni *logaritmiche* (nei *dominî principali* rispettivi)

$$\begin{array}{lll} \cosh^{-1} x := \ln(x + (x^2-1)^{1/2}), & \sinh^{-1} x := \ln(x + (x^2+1)^{1/2}), & \tanh^{-1} x := \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \\ \operatorname{sech}^{-1} x := \ln\left(\dfrac{1+(x^2-1)^{1/2}}{x}\right), & \operatorname{csch}^{-1} x := \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1+(x^2+1)^{1/2}}{|x|}\right), & \coth^{-1} x := \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right). \end{array} \tag{54}$$

Applicando le proprietà logaritmiche elementari alle Identità (54), si ricavano le

identità di *somma\differenza* seguenti (se ne consiglia la verifica!):

$$\begin{aligned} &\cosh^{-1} x \pm \cosh^{-1} y = \cosh^{-1}(xy \pm ((x^2-1)(y^2-1))^{1/2}), \\ &\sinh^{-1} x \pm \sinh^{-1} y = \sinh^{-1}(x(y^2+1)^{1/2} \pm y(x^2+1)^{1/2}), \\ &\tanh^{-1} x \pm \tanh^{-1} y = \tanh^{-1}\left(\frac{x \pm y}{1 \pm xy}\right); \\ &\coth^{-1} x \pm \coth^{-1} y = \coth^{-1}\left(\frac{xy \pm 1}{y \pm x}\right); \\ &\text{---} \\ &\cosh^{-1} x + \sinh^{-1} y = \sinh^{-1}(xy + ((x^2-1)(y^2+1))^{1/2}) = \cosh^{-1}(x(y^2+1)^{1/2} + y(x^2-1)^{1/2}), \\ &\cosh^{-1} x - \sinh^{-1} y = -\sinh^{-1}(xy - ((x^2-1)(y^2+1))^{1/2}) = -\cosh^{-1}(x(y^2+1)^{1/2} - y(x^2-1)^{1/2}), \\ &\tanh^{-1} x \pm \coth^{-1} y = \tanh^{-1}\left(\frac{xy \pm 1}{y \pm x}\right) = \coth^{-1}\left(\frac{y \pm x}{xy \pm 1}\right); \end{aligned} \tag{55}$$

Identità Euleriane di connessione con le Funzioni Goniometriche Circolari *Inverse*:

$$\begin{array}{ll} \cosh^{-1} x = \pm i \cos^{-1} x, & \cosh(ix) = \pm i \cos^{-1}(ix), \\ \sinh x = -i \sin^{-1}(ix), & \sinh(ix) = i \sin^{-1} x, \\ \tanh x = -i \tan^{-1}(ix), & \tanh(ix) = i \tan^{-1} x, \\ \coth x = i \cot^{-1}(ix), & \coth(ix) = -i \cot^{-1} x, \\ \operatorname{sech} x = \pm i \sec^{-1} x, & \operatorname{sech}(ix) = \pm i \sec^{-1}(ix), \\ \operatorname{csch} x = i \csc^{-1} ix, & \operatorname{csch}(ix) = -i \csc^{-1} x. \end{array} \tag{56}$$

Rappresentazioni integrali:

$$\begin{array}{ll} \cosh^{-1} x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2-1)^{1/2}}\,dt, & \tanh^{-1} x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt \quad (|x| < 1), \\ \sinh^{-1} x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{1/2}}\,dt, & \coth^{-1} x = \displaystyle\int_{sgn(x)}^x \frac{1-t}{1+t}\,dt \quad (|x| > 1). \end{array} \tag{57}$$

Altre identità possono essere dedotte combinando opportunamente le relazioni generali nelle Tabelle seguenti per le rappresentazioni di *ciascuna* Funzione Iperbolica Inversa mediante *qualsiasi altra* Funzione Iperbolica Inversa (cf/c grafici a P. 20-21, a *destra*):

	$f \equiv cosh^{-1}$	$f \equiv sinh^{-1}$	$f \equiv tanh^{-1}$
$cosh^{-1}x =$	$cosh^{-1}x$	$\tilde{\zeta}\, sinh^{-1}(x^2-1)^{1/2}$	$\tilde{\zeta}\, tanh^{-1}\dfrac{(x^2-1)^{1/2}}{x}$
$sinh^{-1}x =$	$\tilde{\zeta}\, cosh^{-1}(x^2+1)^{1/2}$	$sinh^{-1}x$	$tanh^{-1}\dfrac{x}{(x^2+1)^{1/2}}$
$tanh^{-1}x =$	$\tilde{\zeta}\, cosh^{-1}\dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$	$sinh^{-1}\dfrac{x}{(1-x^2)^{1/2}}$	$tanh^{-1}x$
$sech^{-1}x =$	$cosh^{-1}\dfrac{1}{x}$	$\tilde{\zeta}\, sinh^{-1}\dfrac{(1-x^2)^{1/2}}{x}$	$\tilde{\zeta}\, tanh^{-1}(1-x^2)^{1/2}$
$csch^{-1}x =$	$\tilde{\zeta}\, cosh^{-1}\dfrac{(x^2+1)^{1/2}}{x}$	$sinh^{-1}\dfrac{1}{x}$	$tanh^{-1}\dfrac{1}{(x^2+1)^{1/2}}$
$coth^{-1}x =$	$\tilde{\zeta}\, cosh^{-1}\dfrac{x}{(x^2-1)^{1/2}}$	$sinh^{-1}\dfrac{1}{(x^2-1)^{1/2}}$	$tanh^{-1}\dfrac{1}{x}$

Tabella 3

	$f \equiv sech^{-1}$	$f \equiv csch^{-1}$	$f \equiv coth^{-1}$
$cosh^{-1}x =$	$sech^{-1}\dfrac{1}{x}$	$\tilde{\zeta}\, csch^{-1}\dfrac{1}{(x^2-1)^{1/2}}$	$\tilde{\zeta}\, coth^{-1}\dfrac{x}{(x^2-1)^{1/2}}$
$sinh^{-1}x =$	$\tilde{\zeta}\, sech^{-1}\dfrac{1}{(x^2+1)^{1/2}}$	$csch^{-1}\dfrac{1}{x}$	$coth^{-1}\dfrac{(x^2+1)^{1/2}}{x}$
$tanh^{-1}x =$	$\tilde{\zeta}\, sech^{-1}(1-x^2)^{1/2}$	$csch^{-1}\dfrac{(1-x^2)^{1/2}}{x}$	$coth^{-1}\dfrac{1}{x}$
$sech^{-1}x =$	$sech^{-1}x$	$\tilde{\zeta}\, csch^{-1}\dfrac{x}{(1-x^2)^{1/2}}$	$\tilde{\zeta}\, coth^{-1}\dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$
$csch^{-1}x =$	$\tilde{\zeta}\, sech^{-1}\dfrac{x}{(x^2+1)^{1/2}}$	$csch^{-1}x$	$coth^{-1}(x^2+1)^{1/2}$
$coth^{-1}x =$	$sech^{-1}\dfrac{(x^2-1)^{1/2}}{x}$	$csch^{-1}(x^2-1)^{1/2}$	$coth^{-1}x$

Tabella 4

■■■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [2], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

[1] MARKUSHEVICH, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2A ED., VOL. **3**, CHELSEA PUBL. CO. (1977);

[2] WREDE, R. C. - SPIEGEL, M. R., *Advanced Calculus*, SCHAUM OUTLINE SERIES, 3RD ED., MCGRAW-HILL (2010);

[3] AUTORI VARÎ_**12**, *Testi e strumenti per il Calcolo analitico avanzato in* $\mathbb{R}$ *e per il Calcolo in* $\mathbb{C}$;

[4] CARRIER, G. F. - KROOK, M. - PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable*, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1966);

[5] CHURCHILL, R. V. - BROWN, J. W., *Complex Variables and Applications*, 4TH ED., MCGRAW-HILL BOOK CO. (1984);

[6] LEVINSON, N. - REDHEFFER, R. M., *Complex Variables*, HOLDEN-DAY, INC. (1970);

[7] SPIEGEL, M. R., ET AL., *Complex Variables*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 2ND ED., MCGRAW-HILL CO. (2009);

[8] HAUSER, A. A., *Complex Variables with Physical Applications*, SIMON & SCHUSTER TECH OUTLINE (1971);

[9] ZWILLINGER, D., ed., *Standard Mathematical Tables*, 33RD ED., CRC PRESS (2018);

[10] GRADSHTEYN, I. S. - RYZHIK, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, 7TH ED., ACADEMIC PRESS (2007).

■■■