

Serie di Fourier in \mathbb{R} -

Proprietà e applicazioni

claudio magno

<https://www.cm-phymath.net/>

revisione
04 aprile 2024



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

INDICE

INTRODUZIONE (CON UN PO' DI STORIA)	P. II
RICHIAMO SULLE INTEGRAZIONI DELLE FUNZIONI τ -PERIODICHE	P. 1
GLI INTEGRALI DI WERNER	P. 2
PERIODI DEI MODI ARMONICI ELEMENTARI E RIDUZIONI A FORMA ARMONICA	P. 4
LA SERIE DI FOURIER	
• RAPPRESENTAZIONI DELLA SERIE DI FOURIER (\mathcal{F} -SERIE)	P. 6
• CONDIZIONI DI CONVERGENZA PUNTUALE DELLA \mathcal{F} -SERIE	P. 6
• LA RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE DELLA \mathcal{F} -SERIE	P. 7
• IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLA \mathcal{F} -SERIE IN RAPPRESENTAZIONE GONIOMETRICA	P. 8
• \mathcal{D} -CONDIZIONI GENERALIZZATE	P. 10
• L'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL	P. 11
• LA DISUGUAGLIANZA (ATTENUATA) DI BESSEL (TEOREMA)	P. 11
• IL TEOREMA DI RIEMANN-LEBESGUE	P. 12
• LA CONVERGENZA IN MEDIA DELLA \mathcal{F} -SERIE	P. 13
• IL FENOMENO DI (WILBRAHAM)-GIBBS	P. 14
• DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE DELLE \mathcal{F} -SERIE	P. 15
• L' \mathcal{F} -INTEGRALE COME CASO LIMITE DELLA \mathcal{F} -SERIE - INDUZIONE DELLA \mathcal{F} -TRASFORMATA	P. 16
APPLICAZIONI DELLA SERIE DI FOURIER	P. 22
APPENDICE	
A. IDENTITÀ INDICIALI UTILI PER LE SOMME FINITE \SERIE ITERATIVE	P. 47
B. RAPPRESENTAZIONI FISICHE EQUIVALENTI DEGLI \mathcal{F} -ARGOMENTI GONIOMETRICI	P. 48
BIBLIOGRAFIA	P. 49

INTRODUZIONE (CON UN PO' DI STORIA)

La *Serie di Fourier* – qui abbreviata in \mathcal{F} -serie – costituisce lo strumento convenzionale per rappresentare una funzione periodica (e.g., di un segnale) come *combinazione lineare* di funzioni sinusoidali elementari, coseni e seni (o, equivalentemente, di esponenziali complessi). Tale somma può consistere di un numero sia finito o infinito di termini oscillanti semplici. L'idea di scomporre una funzione periodica in una somma di funzioni oscillanti semplici risale al 3° secolo a. C.: furono gli astronomi alessandrini che proposero un modello empirico dei moti planetari (periodici) basato sulla composizione di epicicli e deferenti.

La Trasformata di Fourier a *tempi discreti* è una funzione periodica, spesso definita per mezzo di una \mathcal{F} -serie. Come esempio ulteriore di applicazione, la \mathcal{Z} -trasformata si riduce a una \mathcal{F} -serie per il caso importante $|z| = 1$, i.e., $z = e^{i\varphi}$. La \mathcal{F} -serie entra pure nella dimostrazione classica del *Teorema del Campionamento* di Nyquist-Shannon nella Teoria dei Segnali. In generale, il tema della \mathcal{F} -serie rientra come pilastro fondante dell'*Analisi di Fourier*, capitolo essenziale dell'Analisi Matematica moderna.

Dopo le prime ricerche di Euler (L., 1707-1783), di d'Alembert (J. B. L.-R., 1717-1783) e di Bernoulli (D., 1700-1782), Fourier introdusse la \mathcal{F} -serie avviando non solo lo studio generale delle serie goniometriche ma, più specificamente, la soluzione dell'*equazione del calore* che si propaga in una piastra metallica. I primi risultati, apparsi nella sua *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (1807), furono pubblicati conclusivamente nella sua *Théorie analytique de la chaleur* (1822).

L'equazione di propagazione del calore è un'equazione differenziale a derivate parziali della funzione $T \mapsto T(t, \mathbf{r})$, la temperatura (assoluta) calcolata alla posizione $\mathbf{r} \equiv (x; y; z)$ in un solido *continuo e omogeneo* al tempo t ,

$$\partial T / \partial t = \kappa \nabla^2 T,$$

ed è caratterizzata dalla *diffusività* $\kappa := K / (C_\xi \rho)$, nella quale, la *conduttività termica* K , la *capacità termica* C_ξ (ξ è una variabile fisica *intensiva* o *estensiva* pertinente) e la *densità volumetrica* di massa, ρ , sono *uniformi* e *costanti*. Prima del lavoro di Fourier, non era nota alcuna soluzione generale dell'equazione del calore ma unicamente alcune soluzioni particolari nel caso di comportamenti periodici 'semplici' della sorgente termica. Oggi, tali soluzioni 'semplici' sono dette *auto-soluzioni* (*eigensolutions*). L'idea di Fourier fu di modellare il comportamento complicato di una sorgente termica come *sovrapposizione* (o *combinazione lineare*) di coseni o seni di argomento 'semplice' e di scrivere la soluzione sovrapponendo le auto-soluzioni corrispondenti, la \mathcal{F} -serie, appunto. Lord Kelvin onorò la visione di Fourier come 'a great mathematical poem'.

Da un punto di vista moderno, i risultati di Fourier *non* sono rigorosi, mancando ancora, all'inizio del 19° secolo, una consapevolezza precisa dei concetti di funzione e di integrazione delle equazioni differenziali, soprattutto di quelle *a derivate parziali*. Furono Dirichlet (P. G. L., 1805-1859), Riemann (G. F. B., 1826-1866) ad ancorare le intuizioni di Fourier a basi analiticamente consistenti. I contributi di personalità come Gibbs (J. W., 1839-1903), Ascoli (G., 1843-1896), Cantor (G. F. L. P., 1845-1918), Arzelà (C., 1847-1912), Lebesgue (H. L., 1875-1941), Rudin (W., 1921-2010) e Carleson (L., 1928-) hanno, poi, approfondito, raffinato e consolidato definitivamente il concetto di \mathcal{F} -serie, collegandone le implicazioni più sottili al quadro più generale dell'*Analisi Reale*, dell'Integrazione *à-la* Lebesgue e della Teoria della *Trasformata di Convulsione*.

Benché la motivazione originaria fu quella di risolvere l'equazione del calore, apparve chiaro, in seguito, che lo stesso approccio poteva essere utilizzato in una varietà più ampia di problemi fisici e matematici, in particolare, quelli risolvibili mediante equazioni differenziali *a coefficienti costanti*, per le quali, le auto-soluzioni sono di tipo goniometrico. L' \mathcal{F} -serie interviene in Elettrodinamica, in Ottica Fisica, nell'elaborazione sintetica dei Segnali e delle Laser-immagini, in Acustica e nell'Analisi delle Vibrazioni strutturali, nella Fisica Quantistica, nella Teoria delle pellicole sottili, in Gravitazione Relativistica, in Econometria, etc. .

□

Queste mie note sintetiche (e – lo ammetto – elementari) si accodano – senza alcuna pretesa di originalità – alla miriade di contributi, alcuni davvero eccellenti, reperibili nel Web, nei testi e negli eserciziari di Analisi Matematica, su un tema così fondamentale qual è la \mathcal{F} -Serie. Mi sto rivolgendo a chi è seriamente disponibile al lavoro attento, con i 'piedi-a-terra' e puntuale, con 'carta, penna' e un buon CAS. L'auto-formazione efficace poggia, anche, sulla pratica del mettersi alla prova sul 'saper fare', i.e., sul confronto con la 'verità materiale dell'idea' (l'altra 'metà del cielo' ...).

La **Bibliografia** finale – del tutto mia soggettiva e, pertanto, opinabile – è classica ma, ritengo, operativamente affidabile.

C M

1. Richiamo sull'integrazione delle funzioni τ -periodiche

È definita 'funzione τ -periodica in \mathbb{R} ', $\tau \in \mathbb{R}^+$, qualsiasi applicazione f tale che, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f : x \mapsto f(x) \equiv f(x \pm \tau). \quad (\ddagger)$$

Proposizione

Se f è τ -periodica in \mathbb{R} , si deducono, $\forall \{x_0, x_1, x_2, \tau\}$, le identità

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \equiv \int_{x_1 \mp \tau}^{x_2 \mp \tau} f(x) dx, \\ & \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \tau} f(x) dx \equiv \int_0^{\tau} f(x) dx. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Dimostrazione

- Eseguendo la traslazione $x \mapsto \xi \pm \tau$ nell'uguaglianza (1), segue, dalla proprietà di *invarianza traslazionale* dell'operatore integrale e dall'essere *muta* la variabile di integrazione, che

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_1 \mp \tau}^{x_2 \mp \tau} f(\xi \pm \tau) d(\xi \pm \tau) \equiv \int_{x_1 \mp \tau}^{x_2 \mp \tau} f(\xi \pm \tau) d\xi \\ &= \int_{x_1 \mp \tau}^{x_2 \mp \tau} f(\xi) d\xi \equiv \int_{x_1 \mp \tau}^{x_2 \mp \tau} f(x) dx, \quad \text{q. e. d. ;} \end{aligned}$$

- per l'additività dell'operatore integrale vs. l'intervallo di integrazione, si può scrivere

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0 + \tau} f(x) dx &\equiv \int_{x_0}^0 f(x) dx + \int_0^{\tau} f(x) dx + \int_{\tau}^{x_0 + \tau} f(x) dx \\ &= - \int_0^{x_0} f(x) dx + \int_0^{\tau} f(x) dx + \int_0^{x_0} f(x + \tau) dx, \quad \text{dall'Idn. (1), q. e. d. .} \end{aligned}$$

In particolare, quando $x_0 \equiv -\tau/2$, risulta che

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x) dx = \int_0^{\tau} f(x) dx. \quad (1.1)$$

Inoltre, se f è *pari* \vee *dispari*, allora, rispettivamente, si ha

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x) dx \equiv \int_0^{\tau} f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^{\tau/2} f(x) dx, & \text{se } f \text{ è pari} \\ 0, & \text{se } f \text{ è dispari} \end{cases}. \quad (1.2)$$

(\ddagger) Anche per il seguito, si ricordi che, nella scrittura dell'Eq. (1) e analoghe, sia x che τ sono numeri *puri* espressi in *radiani*, quindi, *fisicamente adimensionali*. In tal senso, τ va interpretato solo come parametro di *ripetizione* dell'argomento x di f , *non* come intervallo temporale, e.g., come il periodo \mathcal{T} di un moto periodico. Invece, x e τ , quando si voglia attribuire loro un significato *fisico*, devono essere moltiplicati entrambi per costanti *fisiche* opportune di dimensioni *inverse* (v. *Appendice, B*) al fine di renderli *adimensionali*, i.e., numeri *puri*.

2. Gli Integrali di Werner (JOHANN, 1468-1522)

Si consideri la coppia numerica ordinata $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 0\}$. Durante le semplificazioni di serie goniometriche, sono talvolta necessari gli integrali seguenti, calcolati trasformando le espressioni integrande mediante le *Formule di Werner*:

$$2.1 \quad C(x) := \int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx.$$

Dalla *formula di Werner*

$$\cos \varphi \cos \psi \equiv (1/2)(\cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi)),$$

con $\varphi \neq \pm\psi \wedge \{\varphi, \psi\} \equiv \{\alpha x, \beta x\}$, si trova

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} \int \cos((\alpha + \beta)x) dx + \frac{1}{2} \int \cos((\alpha - \beta)x) dx \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} + C; \end{aligned} \quad (2)$$

invece, se $\{\varphi, \psi\} \equiv \{\alpha x, \beta x\} (\neq \{0, 0\})$, risulta che

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (\cos \alpha x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2\alpha x)) dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos(2\alpha x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2\alpha} \sin(2\alpha x) \right) + C \equiv \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{\alpha} (\sin \alpha x) \cos(\alpha x) \right) + C; \end{aligned} \quad (2.1)$$

□

$$2.2 \quad S(x) := \int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx.$$

Dalla *formula di Werner*

$$\sin \varphi \sin \psi \equiv (1/2)(\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)),$$

con $\varphi \neq \pm\psi \wedge \{\varphi, \psi\} \equiv \{\alpha x, \beta x\}$, si calcola

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \int \cos((\alpha - \beta)x) dx - \frac{1}{2} \int \cos((\alpha + \beta)x) dx \\ &= \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + C; \end{aligned} \quad (3)$$

invece, se $\{\varphi, \psi\} \equiv \{\alpha x, \beta x\} (\neq \{0, 0\})$, si trova che

$$\begin{aligned} S(x) &= \int (\sin \alpha x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2\alpha x)) dx = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos(2\alpha x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2\alpha x)}{2\alpha} \right) + C \equiv \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \cos(\alpha x) \right) + C; \end{aligned} \quad (3.1)$$

□

$$2.3 \quad \mathcal{M}(x) := \int \cos(\alpha x) \sin(\beta x) dx.$$

Dalla formula di Werner

$$\cos \varphi \sin \psi \equiv (1/2)(\sin(\varphi + \psi) - \sin(\varphi - \psi)),$$

con $\varphi \neq \pm \psi \wedge \{\varphi, \psi\} \equiv \{\alpha x, \beta x\}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= \frac{1}{2} \int \sin((\alpha + \beta)x) dx - \frac{1}{2} \int \sin((\alpha - \beta)x) dx \\ &= -\frac{\cos(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + \frac{\cos(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} + C; \end{aligned} \quad (4)$$

invece, se $\{\varphi, \psi\} \equiv \{\alpha x, \beta x\} (\neq \{0, 0\})$, si trova che

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= \int \sin(\alpha x) \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2\alpha x) dx = -\frac{\cos(2\alpha x)}{4\alpha} + \bar{C} \\ &\equiv \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1 - \cos(2\alpha x)}{2} - \frac{1}{2} \right) + \bar{C} = \frac{(\sin \alpha x)^2}{2\alpha} + C \quad (C \equiv \bar{C} - 1/(4\alpha)). \end{aligned} \quad (4.1)$$

□

Osservazione

Con i risultati precedenti, si calcolano certi integrali *definiti*, frequenti nelle applicazioni delle *Serie di Fourier*:

$$2.4 \quad \bar{C} := \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n_1 \omega t) \cos(n_2 \omega t) dt, \quad \text{con } \{n_1, n_2\} \subset \mathbb{Z}_0^+ \wedge \{n_1, n_2\} \neq \{0, 0\} \quad (\dagger).$$

Rinominata la variabile muta di integrazione $x \equiv t$ e poste le definizioni ordinate $\{\alpha, \beta\} := \{n_1 \omega, n_2 \omega\}$, dalle Eq.i (2) e (2.1), risultano, rispettivamente,

$$\bar{C} = \left(\frac{\sin((n_1 + n_2)\omega t)}{2(n_1 + n_2)\omega} + \frac{\sin((n_1 - n_2)\omega t)}{2(n_1 - n_2)\omega} \right) \Big|_0^{2\pi/\omega} = \dots = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n_1 \neq n_2 \\ \pi/\omega & , \text{ se } n_1 \equiv n_2 \neq 0 \end{cases}; \quad (5)$$

□

$$2.5 \quad \bar{S} := \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n_1 \omega t) \sin(n_2 \omega t) dt, \quad \text{con } \{n_1, n_2\} \subset \mathbb{Z}^+.$$

Si procede come per il calcolo di \bar{C} ottenendo, dalle Eq.i (3) e (3.1),

$$\bar{S} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n_1 \neq n_2 \\ \pi/\omega & , \text{ se } n_1 \equiv n_2 \neq 0 \end{cases}; \quad (6)$$

□

$$2.6 \quad \bar{M} = \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n_2 \omega t) \sin(n_1 \omega t) dt, \quad \forall \{n_1, n_2\} \subset \mathbb{Z}_0^+.$$

Con un calcolo analogo a quello per \bar{C} e per \bar{S} , risulta, da entrambe le Eq.i (4) e (4.1),

$$\bar{M} \equiv 0. \quad (7)$$

■

(†) Nel testo, sono usati i simboli sintetici $\mathbb{Z}_0^+ \equiv \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_0^- \equiv \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, etc. .

3. Periodi dei modi armonici elementari e riduzioni a forma armonica

Poiché deve risultare, $\forall \{n, j\} \subset \mathbb{Z}^+ \wedge \omega \in \mathbb{R}^+$,

$$\cos(n\omega t + \varphi_n) = \begin{cases} \cos(n\omega(t + \tau) + \varphi_n) \equiv \cos((n\omega t + \varphi_n) + n\omega\tau), \\ \cos((n\omega t + \varphi_n) + 2j\pi), \end{cases}$$

ne viene che $n\omega\tau \equiv 2j\pi, \text{ mod}(2\pi)$. La scelta *minore* $j = 1$ definisce il parametro

$$\tau \mapsto \tau_n := \frac{2\pi}{n\omega} \equiv \frac{2\pi}{\omega_n}, \quad (8)$$

detto il *periodo* del modo armonico n -simo (o della funzione armonica n -sima). Per $n = 1$, si ottiene il periodo del modo (armonico) *fondamentale* vs. tutti i modi *superiori* ($n > 1$),

$$\tau_1 \equiv \tau \equiv \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.1)$$

Il parametro $\omega_n := n\omega$ è la *frequenza angolare* (o *ciclica*) o *pulsazione del modo* (armonico) n -simo, mentre $\omega \equiv \omega_1$ è la *frequenza angolare del modo* (armonico) o *pulsazione fondamentale*. L'angolo φ_n rappresenta la *fase iniziale* del modo armonico n -simo.

Il procedimento e la conclusione riferiti alla funzione armonica $x \mapsto \sin(n\omega t + \varphi_n)$ sono identici. Ora, la combinazione lineare di modi armonici

$$u_n(t) := a_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + b_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (9)$$

con $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n\omega := \omega_n \wedge \omega \equiv 2\pi/\tau$, è suscettibile della riduzione seguente:

$$u_n(t) \equiv C_n((a_n/C_n)\cos(n\omega t + \varphi_n) + (b_n/C_n)\sin(n\omega t + \varphi_n)),$$

avendo definito $C_n := (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$. Poiché

$$|a_n|/C_n \leq 1, \quad |b_n|/C_n \leq 1 \quad \text{e} \quad (a_n/C_n)^2 + (b_n/C_n)^2 = 1,$$

si possono porre

$$\cos \theta_n := a_n/C_n, \quad \sin \theta_n := b_n/C_n. \quad (9.1)$$

Quindi,

$$u_n(t) \equiv C_n(\cos \theta_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + \sin \theta_n \sin(n\omega t + \varphi_n)) = C_n \cos(n\omega t + \varphi_n - \theta_n), \quad \text{i.e.,}$$

$$u_n(t) \equiv C_n \cos(n\omega t + \delta_n), \quad (9.2)$$

con $n \in \mathbb{Z}$, $\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n) \in (-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$ e $\delta_n := \varphi_n - \theta_n \equiv \varphi_n - \tan^{-1}(b_n/a_n)$.

Alternativamente, definendo

$$\eta_n := \delta_n + \pi/2 \equiv \varphi_n - \tan^{-1}(b_n/a_n) + \pi/2 \equiv \varphi_n + \cot^{-1}(b_n/a_n),$$

l'Eq. (9.2) muta nella riduzione armonica

$$u_n(t) = C_n \sin(n\omega t + \eta_n). \quad (9.3)$$

■

Problema 1

Sia $\{a, b\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \{n_1/n_2, p_1/p_2\} \subset \mathbb{Q}^+$, con $n_1, n_2 \wedge p_1, p_2$ primi tra loro; $\{\delta, \eta\} \subset \mathbb{R}$.

In termini dei parametri assegnati $a, b, n_1, n_2, p_1, p_2, \delta, \eta$, si determini il periodo *fondamentale* (o *minore*) τ della funzione

$$f : x \mapsto a \cos((n_1/n_2)x + \delta) + b \sin((p_1/p_2)x + \eta) \equiv f(x).$$

Soluzione

Poiché vs. la coppia di periodi appropriati τ_1 e τ_2 valgono le identità goniometriche

$$\cos((n_1/n_2)x + \delta) \equiv \begin{cases} \cos((n_1/n_2)x + \delta + 2\pi), \\ \cos((n_1/n_2)(x + \tau_1) + \delta) = \cos((n_1/n_2)x + \delta + (n_1/n_2)\tau_1), \end{cases} \quad (10)$$

$$\sin((p_1/p_2)x + \eta) \equiv \cos(\pi/2 - ((p_1/p_2)x + \eta)) = \cos(((p_1/p_2)x + \eta) - \pi/2), \quad (\cos \text{ è una funzione pari})$$

$$\equiv \begin{cases} \cos(((p_1/p_2)x + \eta - \pi/2) + 2\pi), & \text{vs. l'ultimo membro precedente,} \\ \cos((p_1/p_2)(x + \tau_2) + \eta - \pi/2) = \cos(((p_1/p_2)x + \eta - \pi/2) + (p_1/p_2)\tau_2), \end{cases} \quad (11)$$

allora, devono sussistere le uguaglianze *simultanee*

$$\begin{cases} (n_1/n_2)\tau_1 = 2\pi, & \text{cf/c le Eq. (10)} \\ (p_1/p_2)\tau_2 = 2\pi, & \text{cf/c le Eq. (11)} \end{cases}, \text{ dalle quali, si ottengono i periodi } \begin{cases} \tau_1 = 2\pi(n_2/n_1) \\ \tau_2 = 2\pi(p_2/p_1) \end{cases}. \quad (12)$$

Il rapporto τ_1/τ_2 è il numero *razionale*

$$\tau := \tau_1/\tau_2 = n_2 p_1 / (n_1 p_2). \quad (13)$$

Se i numeri interi $(n_2 p_1)$ e $(n_1 p_2)$ sono *primi tra loro*, allora, il periodo *fondamentale* di f è espresso da

$$\tau = (n_1 p_2)\tau_1 \equiv (n_2 p_1)\tau_2 = 2\pi n_2 p_2 \in \mathbb{Z}^+. \quad (13.1)$$

Invece, se i numeri interi $(n_2 p_1)$ e $(n_1 p_2)$ *non* sono *primi tra loro*, sia $k := \text{MCD}\{(n_2 p_1), (n_1 p_2)\}$. Poiché si ha

$$n_2 p_1 = km \quad \wedge \quad n_1 p_2 = kr,$$

con $\{m, r\} \subset \mathbb{Z}^+$, segue che m e r sono *primi tra loro*. Allora, il periodo *fondamentale* di f risulta

$$\tau = m\tau_1 = 2\pi \frac{mn_2}{n_1} \equiv r\tau_2 = 2\pi \frac{rp_2}{p_1} \in \mathbb{Q}^+. \quad (13.2)$$

Osservazioni

- a. I valori rispettivi di a, b, δ e η sono *ininfluenti* su τ . I parametri a e b modulano unicamente la variazione del valore $f(x)$ ma *non* ne determinano la *periodicità*. Questa dipende solo dai numeri (interi) n_1, n_2, p_1, p_2 .
- b. Il periodo *fondamentale* di una funzione *combinazione lineare finita* del tipo

$$x \mapsto \sum_j a_j \cos((n_{1,j}/n_{2,j})x + \delta_j) + \sum_k b_k \sin((n_{1,k}/n_{2,k})x + \eta_k)$$

può essere ottenuto iterativamente dai risultati (13.1) e (13.2) precedenti.

■

La Serie di Fourier

4. Rappresentazioni della Serie di Fourier (\mathcal{F} -Serie)

Mantenendo le varie definizioni precedenti, si associa la \mathcal{F} -Serie pertinente alla funzione g , τ -periodica – $\tau \equiv 2\pi/\omega$ – e *limitata*, avente $S_F(t)$ come *somma media* nell'intervallo $(0, \tau)$,

$$t \mapsto g(t) \doteq C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \equiv S_F(t) \quad (\doteq \text{ indica la 'uguaglianza in media associata'}) \quad (14)$$

$$\doteq C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + b_n \sin(n\omega t + \varphi_n)), \quad (15.1)$$

forma armonica estesa ordinaria

$$\doteq C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \delta_n), \quad (15.2)$$

1^a forma armonica contratta (v. Eq. (9.2),

$$\doteq C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\omega t + \eta_n), \quad (15.3)$$

2^a forma armonica contratta (v. Eq. (9.3),

dove, $C_0 := a_0/2$ e $S_F(t)$ è la *somma media puntuale* – *se esiste* – rappresentata dalla \mathcal{F} -serie.

Infatti, la *corrispondenza formale* (14) a $g(t)$ della \mathcal{F} -serie, con i coefficienti a_j e b_j calcolati in modo prescritto, *non implica* che la \mathcal{F} -serie sia convergente né, se lo è, che la sua somma sia $g(t)$. ■

5. Condizioni di convergenza puntuale della \mathcal{F} -Serie

Il teorema seguente esprime un criterio *sufficiente* per la *convergenza puntuale* della \mathcal{F} -serie:

Teorema (di Dirichlet)

Se la funzione τ -periodica $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ è, *a tratti, continua e regolare*, i.e., $\forall \bar{t} \in (a, b)$,

- a. $g \in \mathcal{C}((\bar{t}, \bar{t} + \tau))$ *generalmente*, i.e., tranne che in corrispondenza di un numero *finito* di punti t_j di discontinuità o *eliminabile* o di *1° tipo* ($\exists g(t_j^-) \wedge g(t_j^+), \forall j, \Rightarrow g \in \mathcal{C}$ a tratti),
- b. $\exists g'(t)$ *generalmente* in $(\bar{t}, \bar{t} + \tau)$, i.e., tranne che in corrispondenza di un numero *finito* di punti t_k , tali, però, che $\exists g'^*(t_k^-)$ e/o $g'^*(t_k^+), \forall k$ (g *regolare a tratti* $\Rightarrow g' \in \mathcal{C}$ a tratti),

allora, la \mathcal{F} -serie converge a $g(t)$ *in media*, $\forall t \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$g(t) \doteq S_F(t) \equiv \frac{1}{2} (g(t^-) + g(t^+)). \quad (16)$$

In particolare, se g è *continua* nell'insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, vale, in Ω , l'*uguaglianza stretta*

$$g(t) \equiv S_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + b_n \sin(n\omega t + \varphi_n)) \quad (16.1)$$

(si dice: g è \mathcal{F} -espandibile in Ω). La \mathcal{F} -serie converge *uniformemente* a g se Ω è *compatto* (i.e., se $\Omega \equiv \bar{\Omega}$).

Nella forma (15.1), la \mathcal{F} -serie converge in \mathbb{R} se *coesistono* le condizioni

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \\ \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty \end{cases} \quad (17)$$

Esse implicano, $\forall n$, che $|u_n(t)| \leq |a_n| + |b_n|$. Quindi, la \mathcal{F} -serie risulta non solo *assolutamente* ma anche *uniformemente* convergente a g in \mathbb{R} , per il *Criterio di Weierstrass*. \blacktriangle

Osservazioni

- Se g è τ -periodica ed espandibile in \mathcal{T} -serie (\therefore Taylor) in $A \subseteq \mathbb{R}$, essa è *anche* espandibile in \mathcal{F} -serie in A . In generale, l'asserto inverso è *falso*.
- Il simbolo g'^* di *pseudo-derivata unilaterale* (sinistra o destra) in $t_0 \in (t_1, t_2)$, specifica i valori-limite

$$g'^*(t_0^-) := \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{g(t) - g(t_0^-)}{t - t_0} \quad \text{e} \quad g'^*(t_0^+) := \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{g(t) - g(t_0^+)}{t - t_0}.$$

Entrambe le pseudo-derivate devono esistere finite (i.e., $\in \mathcal{C}$) affinché g sia \mathcal{F} -espandibile in (t_1, t_2) . Si noti, però, che ciò *può* avvenire se t_0 è un punto di discontinuità di 1° tipo ($|g(t_0^+) - g(t_0^-)| < +\infty$) *ma non* se t_0 è un punto di *flesso a tangente verticale* o di *cuspid*e o di *semi-cuspid*e, benché sia $g \in \mathcal{C}(U_\delta(t_0))$. \blacksquare

6. La rappresentazione esponenziale della \mathcal{F} -Serie

Risolvendo il sistema delle *Identità Euleriane*,

$$\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \\ e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha \end{cases},$$

vs. $\cos \alpha$ e a $\sin \alpha$, si ottengono le relazioni equivalenti

$$\begin{cases} \cos \alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2 \equiv (1/2)(e^{i\alpha} + e^{i(-\alpha)}) \\ \sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i) \equiv -(i/2)(e^{i\alpha} - e^{i(-\alpha)}) \end{cases} \quad (18)$$

Si consideri la funzione $g : t \mapsto g(t) \in \mathcal{C}^{(0)}$, τ -periodica ($\tau \equiv 2\pi/\omega$) e *limitata* nell'insieme *compatto* $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}$. La sostituzione delle relazioni (18) alla \mathcal{F} -rappresentazione *uniformemente convergente* (16.1) di $g(t)$, i.e., con $\alpha \equiv \omega t + \varphi_n \equiv 2\pi n t/\tau + \varphi_n := \theta_n$, dà

$$\begin{aligned} g(t) &= a_0/2 + (1/2) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n (e^{i\theta_n} + e^{i(-\theta_n)}) - i b_n (e^{i\theta_n} - e^{i(-\theta_n)})) \\ &= a_0/2 + (1/2) \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n - i b_n) e^{i\theta_n} + (a_n + i b_n) e^{i(-\theta_n)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Ora, dopo aver osservato che $\varphi_{-n} \equiv -\varphi_n$, si riconoscono le identità formali

$$\begin{aligned} -\theta_n &\equiv 2\pi(-n)t/\tau + \varphi_{-n} \equiv \theta_{-n}, \\ a_n &:= \frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(t) \cos(2\pi n t/\tau + \varphi_n) dt \equiv \frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(t) \cos(2\pi(-n)t/\tau + \varphi_{-n}) dt \equiv a_{-n}, \end{aligned}$$

$$b_n := \frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(t) \sin(2\pi n t / \tau + \varphi_n) dt \equiv -\frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(t) \sin(2\pi(-n)t / \tau + \varphi_{-n}) dt \equiv -b_{-n}.$$

Quindi, grazie alla convergenza *uniforme* della \mathcal{F} -rappresentazione di g , si può modificare la scrittura dell'espressione (19) come segue:

$$\begin{aligned} g(t) &\equiv a_0/2 + (1/2) \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n - i b_n) e^{i\theta_n} + (a_{-n} - i b_{-n}) e^{i\theta_{-n}}) \\ &\equiv a_0/2 + (1/2) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - i b_n) e^{i\theta_n} + (1/2) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{-n} - i b_{-n}) e^{i\theta_{-n}} \\ &\equiv a_0/2 + (1/2) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - i b_n) e^{i\theta_n} + (1/2) \sum_{n=-1}^{-\infty} (a_n - i b_n) e^{i\theta_n} \\ &\equiv a_0/2 + (1/2) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - i b_n) e^{i\theta_n} + (1/2) \sum_{n=-\infty}^{-1} (a_n - i b_n) e^{i\theta_n}. \end{aligned}$$

Così, definiti $c_0 := a_0/2$ e $c_n := (a_n - i b_n) e^{i\varphi_n}/2$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si arriva alla rappresentazione

$$g(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(2\pi n/\tau)t}. \quad (20)$$

■

7. Il calcolo dei coefficienti della \mathcal{F} -Serie in rappresentazione goniometrica

Nell'ipotesi che la funzione g sia τ -periodica con $\tau \equiv 2\pi/\omega$, limitata e *regolare a tratti* in \mathbb{R} , si moltiplichino i membri dell'Eq. (16.1) per $\cos(p\omega t + \varphi_p)$, $\forall p \in \mathbb{Z}_0^+$, e li si integrino, quindi, nell'intervallo *compatto* $\bar{\Omega} \equiv [-\varphi_p, -\varphi_p + \tau]$. In Ω , la \mathcal{F} -serie converge *uniformemente* e le operazioni di *integrazione* e di *somma dei termini di una serie* commutano tra loro. Pertanto, quando $p \equiv 0$, si scrive

$$\begin{aligned} \cos \varphi_0 \int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0 + \tau} g(t) dt &= \frac{a_0}{2} \cos \varphi_0 \int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0 + \tau} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \varphi_p \underbrace{\int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0 + \tau} \cos(n\omega t + \varphi_n) dt}_{\equiv 0, \forall n} + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos \varphi_p \underbrace{\int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0 + \tau} \sin(n\omega t + \varphi_n) dt}_{\equiv 0, \forall n} \\ &= (a_0/2) \tau \cos \varphi_0 \equiv a_0 (\pi/\omega) \cos \varphi_0. \end{aligned}$$

Dall'annullamento *termine-a-termine* delle due somme precedenti e dall'additività dell'operatore integrale vs. l'intervallo di integrazione risulta (qui, è $\omega \equiv 2\pi/\tau$)

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0 + \tau} g(t) dt \equiv \frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(t) dt \equiv \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} g(t) dt. \quad (21.1)$$

Invece, quando $p \in \mathbb{Z}^+$, ricorrendo agli *Integrali di Werner*, si ha

$$\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p + \tau} g(t) \cos(p\omega t + \varphi_p) dt = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p + \tau} \cos(p\omega t + \varphi_p) dt}_{\equiv 0, \forall p} + \downarrow$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} \cos(n\omega t + \varphi_n) \cos(p\omega t + \varphi_p) dt}_{\neq 0 \text{ sse } n \equiv p} \downarrow \\
 & \downarrow + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} \sin(n\omega t + \varphi_n) \cos(p\omega t + \varphi_p) dt}_{\equiv 0, \forall n, p} \\
 & = a_p(\tau/2) \equiv a_p(\pi/\omega).
 \end{aligned}$$

Quindi, $\forall p \in \mathbb{Z}^+$, risulta

$$a_p = \frac{2}{\tau} \int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} g(t) \cos(p\omega t + \varphi_p) dt \equiv \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} g(t) \cos(p\omega t + \varphi_p) dt. \quad (21.2)$$

Analogamente, si moltiplichino i membri dell'Eq. (16.1) per $\sin(p\omega t + \varphi_p)$, $\forall p \in \mathbb{Z}_0^+$, e li si integrino in $\bar{\Omega} \equiv [-\varphi_p, -\varphi_p + \tau]$, ancora specificando *provvisoriamente* che sia $\tau \equiv 2\pi/\omega$.

Quando $p \equiv 0$, si scrive

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi_0 \int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} g(t) dt &= \frac{a_0}{2} \sin \varphi_0 \int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \varphi_0 \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} \cos(n\omega t + \varphi_n) dt}_{\equiv 0, \forall n} \downarrow \\
 & \downarrow + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \varphi_0 \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} \sin(n\omega t + \varphi_n) dt}_{\equiv 0, \forall n} \\
 & = (a_0/2)\tau \sin \varphi_0 \equiv a_0(\pi/\omega) \sin \varphi_0,
 \end{aligned}$$

da cui, si ottiene ancora l'Eq. (18.1). Invece, quando $p \in \mathbb{Z}^+$, allora,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} g(t) \sin(p\omega t + \varphi_p) dt &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} \sin(p\omega t + \varphi_p) dt}_{\equiv 0, \forall p} \downarrow \\
 & \downarrow + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} \cos(n\omega t + \varphi_n) \sin(p\omega t + \varphi_p) dt}_{\equiv 0, \forall n, p} \downarrow \\
 & \downarrow + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} \sin(n\omega t + \varphi_n) \sin(p\omega t + \varphi_p) dt}_{\neq 0 \text{ sse } n \equiv p} \\
 & = b_p(\tau/2) \equiv b_p(\pi/\omega).
 \end{aligned}$$

Quindi, $\forall p \in \mathbb{Z}^+$, risulta

$$b_p = \frac{2}{\tau} \int_{-\varphi_p}^{-\varphi_p+\tau} g(t) \sin(p\omega t + \varphi_p) dt \equiv \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} g(t) \sin(p\omega t + \varphi_p) dt. \quad (21.3)$$

□

Le Eq.i (21.1), (21.2) e (21.3) definiscono gli \mathcal{F} -coefficienti a_j e b_j nel *regime armonico* anche quando g non risulta *regolare a tratti* in \mathbb{R} . Infatti, si dimostra che il *Teorema di Dirichlet* è applicabile in senso *generalizzato*, in circostanze nelle quali g non è limitata (e.g., v. [1¹]).

□

Adottando, definitivamente in questo math-notebook, la rappresentazione *astratta* con la variabile indipendente *adimensionale* x (cf/c **Appendice B**) e la funzione f in sostituzione di g , se valgono, secondo Dirichlet, le seguenti

\mathcal{D} -condizioni generalizzate:

- se f è τ -periodica in \mathbb{R} ,
- se \mathcal{I} è un intervallo *limitato* e $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ eccetto che in corrispondenza di un numero *finito* di punti di discontinuità di tipo *qualsiasi*,
- se $\int_0^\tau |f(x)| dx < +\infty$ è un integrale definito *ordinario* o *generalizzato* (i.e., nel contesto più profondo della *Teoria della Misura*, $f \in \mathcal{R}((0, \tau))$, indicando con $\mathcal{R}((0, \tau))$ l'insieme delle funzioni *Riemann-integrabili assolutamente* nell'intervallo *aperto* $(0, \tau)$),

allora, f rimane espandibile in \mathcal{F} -serie $\forall x$ che *non sia* un punto di discontinuità di 2° tipo, con il valore $f(x) \doteq S_{\mathcal{F}}(x)$ espresso ancora dall'Eq. (16). In corrispondenza di un punto di discontinuità di 2° tipo, il valore di f può essere assegnato *arbitrariamente* (se valgono le \mathcal{D} -condizioni a, b, c). Pertanto, gli \mathcal{F} -coefficienti continuano a corrispondere alle Eq.i (15.1), (15.2) e (15.3). Con altre parole, assegnata $x \mapsto f(x)$, le **definizioni delle loro espressioni generali**, $\forall \tau \in \mathbb{R}^+$, sono:

$$\begin{cases} a_0 := \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(x) \cos \varphi_0 dx \equiv C_0 \\ a_n := \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(x) \cos((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\ b_n := \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(x) \sin((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \quad (22)$$

□

Il cambiamento di variabile $\omega t := x$ nell'Eq. di tipo *armonico* (16.1) (per la quale, si ricordi, vale l'identità $\omega/\pi \equiv 2/\tau$) riconduce alla rappresentazione *generale astratta (canonica)* in x dell'Eq. (16.1) stessa. Con $g(t) \mapsto f(x)$, si scrive, $\forall \tau \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) + b_n \sin((2\pi n/\tau)x + \varphi_n)), \quad (22.1)$$

dove, ora, i coefficienti sono espressi, ovviamente, dalle Eq.i (22) (cf/c **Appendice B**).

□

Lo studio completo *sufficiente* di una serie di Fourier richiede, di solito, l'impiego *contemporaneo* del *Teorema di Dirichlet* e delle \mathcal{D} -condizioni *generalizzate*. A questi, va aggiunta la possibilità di una verifica di calcolo diretta.

■

8. L'Uguaglianza di Parseval

Si supponga che, oltre a valere le \mathcal{D} -condizioni generalizzate per f in $(0, \tau)$ (v. P. 11), si abbia pure che $f \in \mathcal{L}^2((0, \tau))$, essendo $\mathcal{L}^2((0, \tau))$ la classe delle funzioni a quadrato sommabile in

$(0, \tau)$, i.e., che f sia tale che $\int_0^\tau (f(x))^2 dx < +\infty$ (regime integrale *à-la Lebesgue*).

Se, moltiplicati i membri dell'Eq. (22.1) per $f(x)$, li si integra da 0 a τ (o su un qualsiasi altro intervallo di ampiezza τ), allora, tenuto conto della *continuità a tratti* di f in $(0, \tau)$ e delle Eq.i (22), risulta

$$\int_0^\tau (f(x))^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_0^\tau f(x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_0^\tau f(x) \cos((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) dx + \right. \\ \left. + b_n \int_0^\tau f(x) \sin((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) dx \right)$$

e, quindi,

$$\int_0^\tau (f(x))^2 dx = \frac{\tau}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right). \blacktriangle \tag{24}$$

L'Eq. (24) esprime la cosiddetta *Uguaglianza di PARSEVAL* (DES CHÊNES, M.-A., 1755-1836), utile, tra l'altro, nel calcolo della somma di molte serie numeriche corrispondenti a funzioni *pari*. ■

La Disuguaglianza (attenuata) di Bessel (Teorema)

Si supponga che, oltre a valere le \mathcal{D} -condizioni generalizzate per f in $(0, \tau)$, si abbia pure che $f \in \mathcal{L}^2((0, \tau))$. Al solito, siano a_n e b_n i coefficienti della \mathcal{F} -espansione di f .

Allora, vale la *Disuguaglianza (attenuata) di BESSEL*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{\tau} \int_0^\tau (f(x))^2 dx. \blacktriangle \tag{25}$$

Dimostrazione

La successione di funzioni

$$\{ S_F(x; M) \}_{M \in \mathbb{Z}^+} := \left\{ a_0/2 + \sum_{n=1}^M (a_n \cos((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) + b_n \sin((2\pi n/\tau)x + \varphi_n)) \right\}_{M \in \mathbb{Z}^+} \\ \downarrow \tag{26}$$

è quella delle *somme parziali* della \mathcal{F} -serie associata a $f(x)$. Poiché $M \in \mathbb{Z}^+$, risulta

$$0 \leq \int_0^\tau (f(x) - S_F(x; M))^2 dx \tag{27}$$

perché la funzione integranda è non-negativa e $\tau > 0$, i.e., in modo equivalente

$$2 \int_0^\tau f(x) S_F(x; M) dx - \int_0^\tau (S_F(x; M))^2 dx \leq \int_0^\tau (f(x))^2 dx. \tag{27.1}$$

Ora, se si moltiplicano per $2f(x)$ le rappresentazioni del termine generale della successione (26) in entrambi i membri, le si integrano da 0 a τ e si applicano le Eq.i (22.1) per a_n e b_n , si ottiene

$$2 \int_0^\tau f(x) S_F(x; M) dx = \tau \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right). \quad (28)$$

Inoltre, *elevando al quadrato* le quantità nei membri dell'Eq. (26) e integrandole da 0 a τ (tenendo conto delle Eq.i (22.1), se in *regime armonico* esplicito) includendo gli spostamenti di fase φ_n , del tutto ininfluenti nei calcoli, e ricordandosi degli *Integrali di Werner* (P. 2-3), si trova che

$$\int_0^\tau (S_F(x; M))^2 dx = \frac{\tau}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right). \quad (29)$$

Sostituendo le espressioni *destre* (28) e (29) nella Dsq. (27.1) e calcolando il limite $M \rightarrow +\infty$, si ottiene la *Disuguaglianza di Bessel* (25), q. e. d. (come esercizio utile, si verifichi tale processo). \square

Se vale l'uguaglianza nella disuguaglianza attenuata (27), si riottiene l'*Uguaglianza di Parseval*. Si può pensare a $S_F(x, M)$ come a una *approssimazione* di $f(t)$, mentre il membro *destro* della Dsq. (27), diviso per τ , ne rappresenta l'*errore quadratico medio*. L'*Uguaglianza di Parseval* indica che, per $M \rightarrow +\infty$, l'errore quadratico medio è *infinitesimo*, mentre la *Disuguaglianza di Bessel* indica la possibilità che tale errore quadratico medio tenda a un valore finito (positivo).

I risultati ottenuti sono connessi con il concetto fondamentale di *completezza* di un sistema di funzioni *ortonormali* generatrici atto a rappresentare una classe specifica di funzioni, e.g., quelle τ -periodiche. L'*ortonormalità* delle funzioni generatrici (di numero finito o infinito) si manifesta nei valori degli integrali, definiti su uno *stesso* intervallo *finito*, dei loro prodotti *a coppie*: gli integrali valgono 0 o 1. È il caso dell'infinità numerabile delle funzioni armoniche elementari espresse dalla terna

$$\{ \cos \varphi_0, \cos((2\pi n_1/\tau)x + \varphi_{n_1}), \sin((2\pi n_2/\tau)x + \varphi_{n_2}) \}, \quad (30)$$

$\forall \{n_1, n_2\} \subset \mathbb{Z}_0^+$, integrandone i prodotti a coppie in intervalli di ampiezza (periodicità) τ .

Il legame stretto tra *completezza* di un sistema di funzioni ortonormali generatrici e qualità della *approssimazione* della funzione f emerge dal fatto che, se si esclude *anche un solo* termine della \mathcal{F} -espansione, l'*errore quadratico medio* non può *mai* diventare infinitesimo, per quanti termini vengano comunque considerati. \blacksquare

Il Teorema di Riemann-Lebesgue

Se vale la *Disuguaglianza (attenuata) di Bessel* per f in $(0, \tau)$, allora, valgono i limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} a_n \\ b_n \end{cases} \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\tau f(x) \begin{cases} \cos((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) \\ \sin((2\pi n/\tau)x + \varphi_n) \end{cases} dx = 0. \blacktriangle$$

Dimostrazione

L'asserto è subito evidente osservando che, se $a_0^2/2 + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) < +\infty$, questo implica che $a_n = o(1) \wedge b_n = o(1)$ per $n \rightarrow +\infty$, q. e. d. \blacksquare

9. La Convergenza in Media della \mathcal{F} -Serie

La funzione f sia τ -periodica, continua a tratti in $(-\tau/2, \tau/2)$ e \mathcal{F} -espandibile.

La *Formula di Dirichlet*, Problema 10, P. 28, è scomponibile nella forma additiva simmetrica

$$S_F(x; M) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 \left(f(u+x) \frac{\sin(M+1/2)u}{\sin(u/2)} \right) du + \downarrow \\ \downarrow + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau/2} \left(f(u+x) \frac{\sin(M+1/2)u}{\sin(u/2)} \right) du \quad (\dagger) \quad (31)$$

(quando $f(u+x) \equiv 1$, si ha $S_F(x; M) = 1$, v. Eq. (66), P. 27). Se si moltiplicano, rispettivamente, l'integrale definito in $(-\tau/2, 0)$ per $f(x^-)$, quello definito in $(0, \tau/2)$ per $f(x^+)$, con $x^\mp \equiv x \mp \varepsilon$ e $0 < \varepsilon \equiv o(1)$, e si sommano le espressioni risultanti, si trova che

$$\frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) \equiv \frac{f(x^-)}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 \frac{\sin(M+1/2)u}{\sin(u/2)} du + \frac{f(x^+)}{\tau} \int_0^{\tau/2} \frac{\sin(M+1/2)u}{\sin(u/2)} du. \quad (31.1)$$

Ora, sottraendo membro-a-membro l'Eq. (31.1) dall'Eq. (31), si determina la differenza

$$S_F(x; M) - \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 \frac{f(u+x) - f(x^-)}{\sin(u/2)} \sin((M+1/2)u) du + \downarrow \\ \downarrow + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau/2} \frac{f(u+x) - f(x^+)}{\sin(u/2)} \sin((M+1/2)u) du. \quad (31.2)$$

Nell'ipotesi ulteriore di regolarità a tratti di f in $(-\tau/2, \tau/2)$, si conclude che anche la funzione

$$u \mapsto \frac{f(u+x) - f(x^-)}{\sin(u/2)} := \lambda^-(u)$$

è continua a tratti in $(-\tau/2, 0]$, essendo f , qui, regolare a tratti. Inoltre,

$$\exists! \lim_{u \rightarrow 0^-} \lambda^-(u) \equiv \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{f(u+x) - f(x^-)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{f(u+x) - f(x^-)}{u},$$

perché f , per ipotesi, è regolare a tratti in $(-\tau/2, \tau/2)$. Allora, $\exists f'_-, \forall u \in (-\tau/2, 0]$, e, da questo, consegue che $u \mapsto \lambda^-(u)$ è continua a tratti in $[-\tau/2, 0]$. □

In modo identico, si dimostra che la funzione

$$u \mapsto \frac{f(u+x) - f(x^+)}{\sin(u/2)} := \lambda^+(u)$$

è continua a tratti in $[0, \tau/2]$.

Poi, del primo addendo integrale nell'Eq. (32.1) (per il secondo addendo, valgono considerazioni completamente analoghe), si può riscrivere la funzione integranda come

(†) Il fattore integrando $D_M(u) := \frac{\sin(M+1/2)u}{\sin(u/2)}$ è il cosiddetto *nucleo (kernel) di convoluzione integrale di Dirichlet di ordine M* .

$$\lambda(u) \sin(M + 1/2)u \equiv \lambda(u) \sin(u/2) \cos Mu + \lambda(u) \cos(u/2) \sin Mu$$

e rilevare che le funzioni $u \mapsto \lambda(u) \sin(u/2)$ e $u \mapsto \lambda(u) \cos(u/2)$ sono entrambe continue a tratti in $(-\tau/2, \tau/2)$, essendo la funzione $u \mapsto \lambda^-(u)$ continua a tratti.

Quindi, in forza del *Teorema di Riemann-Lebesgue* (P. 12), entrambi gli addendi integrali nell'Eq. (32.1) sono $o(1)$ per $M \rightarrow +\infty$, portando alla proprietà fondamentale di *Convergenza in Media* per una funzione τ -periodica (cf/c Eq. (16):

se f e f' sono entrambe *continue a tratti* in $(-\tau/2, \tau/2)$, allora,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_F(x; M) \doteq \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) = \frac{\sigma}{2}. \quad (32)$$

□

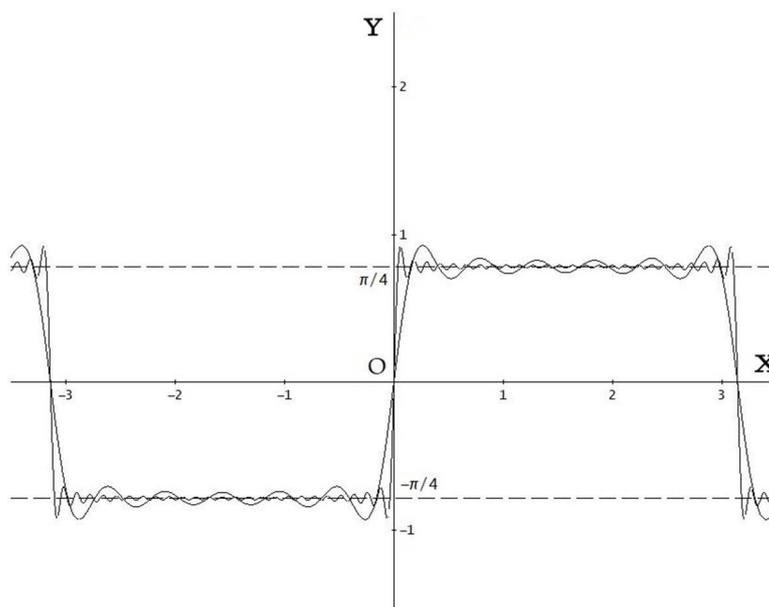
La discussione di questo paragrafo, culminata nell'Eq. (32), andrebbe confrontata accuratamente con l'Eq. (16) del *Teorema di Dirichlet*

■

10. Il fenomeno di (Wilbraham)-Gibbs

La proprietà di *uguaglianza in media*, espressa dall'Eq. (16) e verificata in modo diretto dall'Eq. (32), non è un espediente banale per 'aggiustare' la patologia di *graf*(f) in corrispondenza di un punto x_0 di discontinuità di 'salto' (i.e., di 1° tipo) ma discende dall'*impossibilità* della somma parziale $S_F(x; M)$ – costruita sovrapponendo $2M + 1$ funzioni *cos* e *sin*, *uniformemente continue* (di più, $\in \mathcal{C}^\infty$) – di convergere definitivamente al valore (32) in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ per $M \rightarrow +\infty$.

La scoperta (1848) e la prima analisi critica del comportamento di *graf*(f) in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ è dovuta al matematico inglese WILBRAHAM (H., 1835-1883): quando $x \rightarrow x_0^\pm$, *graf*($S_F(x; M)$) manifesta una *sovra\otto-elongazione* (*over\undershoot*) verticale vs. *graf*(f). Tale effetto *estremante* rimane di *ampiezza massima*, $|\Delta y|_{\max}$, *uniforme* $\forall M$, mentre, per M crescente (con il numero di addendi armonici di S_F), *tende a* x_0 *diminuendo la larghezza* $|\Delta x|$ delle oscillazioni (nel grafico qui sotto,



cf/ $M = 5$ vs. $M = 25$ nell'approssimazione all'*onda quadra* con 'salto' $\sigma = \pi/2$).

La scoperta di Wilbraham venne sostanzialmente trascurata per oltre mezzo secolo. Nel 1898, il grande fisico sperimentale MICHELSON (A. A., 1852-1931), eseguendo una ‘analisi di Fourier’ su dati di segnale di onda quadra, osservò le elongazioni oscillatorie anomale ma le attribuì a errori sistematici dell’apparato di misura. Quasi contemporaneamente, GIBBS (J. W., 1839-1903) *riscoverì* la differenza analitica cruciale tra f e $\lim_{M \rightarrow +\infty} S_F$ osservata da Wilbraham. Sia pure dopo uno studio più approfondito, BÔCHER (M., 1867-1918), al MIT (alquanto ... distratto sulle priorità e sui meriti storici oggettivi), ‘battezzò’ l’elongazione semplicemente come il *Fenomeno di Gibbs*, espressione, con la quale, è ormai conosciuta comunemente.

Il fenomeno, rilevante nella teoria dei segnali periodici, non è limitato alla \mathcal{F} -serie ma lo si riscontra anche in altre espansioni, come quelle in serie di *autofunzioni di Legendre* e di *Fourier-Bessel*. \square

Il valore massimo di sovra\ sotto-elongazione, $|\Delta y|_{\max}$, *uniforme* $\forall M$, si trova eccedere dal valore $f(x_0^\pm)$ dell’ 8.95... % $\approx 9\%$. Tale stima discende dal risultato *generale*, secondo il quale, se f è, a tratti, sia *continua* che *regolare* nell’insieme aperto $A := \mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ e $\sigma (> 0)$ è il ‘salto’ (finito) in x_0 di f , allora, in A , la sovra\ sotto-elongazione tende al valore *massimo*

$$|\Delta y|_{\max} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du - \frac{1}{2} \right) \sigma \approx (0.089489872236\dots) \sigma. \quad (33)$$

Una discussione quantitativa formale semplice del *Fenomeno di Gibbs*, basata sul valore *costante* dell’*ampiezza* $\sigma/2$ d’onda quadra e fornita di indicazioni per la quadratura numerica (gaussiana, in precisione doppia) necessaria, si trova in [7], P. 836. Si veda anche il fondamentale [1], CH. II, § 9.

Osservazione

L’analisi d’*onda quadra* e/o di *rampa* non è casuale ma *coerente* con le \mathcal{D} -condizioni generalizzate in A , dove f è anche espandibile come \mathcal{T} -polinomio *lineare* più un resto à-la Peano. Quindi, risultando in A definitivamente

$$f(x) = f(x_0^\pm) + f'(x_0^\pm)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

le analisi di gradino $\propto f(x_0^\pm)$ (*ampiezza*, ordine 0) e di rampa $\propto f'(x_0^\pm)$ (*pendenza*, ordine 1) sono criteri *sufficienti*. \blacksquare

11. Derivazione e Integrazione delle \mathcal{F} -Serie

Ovviamente, le operazioni di *derivazione* e di *integrazione* di una *Serie di Fourier* sono soggette alle stesse condizioni analitiche generali, come per *qualsiasi altra* serie di funzioni. Oltre a questo, vale la condizione *sufficiente* di integrabilità espressa dal

Teorema

Se f è τ -periodica e *generalmente* continua in $[x_0, \tau + x_0] \wedge \{\bar{x}, x\} \subseteq [x_0, \tau + x_0]$, la \mathcal{F} -serie associata a $f(x)$ è integrabile *termine-a-termine* da \bar{x} a x , generando una \mathcal{F} -serie convergente *uniformemente* verso la funzione *primitiva* di f in $[x_0, \tau + x_0]$,

$$x \mapsto \int_{\bar{x}}^x f(u) du \equiv G(x). \quad \blacktriangle$$

\blacksquare

12. L' \mathcal{F} -Integrale come caso-limite della \mathcal{F} -Serie - Induzione della \mathcal{F} -Trasformata

Nella parte conclusiva dell'INTRODUZIONE, si è accennato all'importanza fondamentale che l' \mathcal{F} -serie riveste in *problemi differenziali periodici* riformulabili come *problemi agli auto-valori*.

Posta l'equazione armonica omogenea $\phi'' + \omega^2 \phi = 0$ ($\phi \equiv \phi(x)$) nella forma *auto-aggiunta*,

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = -\omega^2 \phi(x),$$

il *problema alla frontiera* soddisfacente le condizioni *estremali* di modo n -simo ($n \in \mathbb{Z}^+$)

$$\begin{cases} \phi_n(0) = 0 \\ \phi_n(\tau/2) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

(problema di *Cauchy-Dirichlet*) ha come soluzione non-banale l'*auto-vettore* modale

$$x \mapsto \phi_n(x) = \sin((2n\pi/\tau)x), \quad (34.1)$$

associato all'unico *auto-valore* $\omega_n^2 \equiv (2n\pi/\tau)^2$.

Il sistema $\{\phi_n\}$ di auto-vettori (34.1) è *orto-normale* in $(0, \tau/2)$, i.e., dagli *Integrali di Werner* (3), (3.1) e (6), si ottiene che

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n_1}, \phi_{n_2} \rangle &\approx \int_0^{\tau/2} \phi_{n_1}(x) \phi_{n_2}(x) dx \\ &\equiv \int_0^{\tau/2} \sin((2n_1\pi/\tau)x) \sin((2n_2\pi/\tau)x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n_1 \neq n_2 \\ 1, & \text{se } n_1 = n_2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (34.2)$$

Se f è una funzione sia *continua a tratti* che *regolare a tratti* in $(0, \tau/2)$, essa può essere qui rappresentata in serie di auto-funzioni (34.1) vs. la funzione-peso *unitaria* (e.g., v. [11], § 5.7), i.e.,

$$f(w) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin((2n\pi/\tau)x). \quad (35)$$

□

Sorge la questione circa l'applicabilità della rappresentazione (35) quando $\tau \rightarrow +\infty$, limite in cui il concetto ordinario di *periodicità* perde significato. Considerando inizialmente τ finito e tenendo conto dell'*Integrale di Werner 2.2*, valgono le uguaglianze alternative

$$\frac{2}{\tau/2} \int_0^{\tau/2} \sin \alpha x \sin \beta x dx = \begin{cases} \frac{\sin((\alpha - \beta)\tau/2)}{(\alpha - \beta)\tau/2} - \frac{\sin((\alpha + \beta)\tau/2)}{(\alpha + \beta)\tau/2}, & \text{se } \alpha \neq \beta, \\ 1 - \frac{\sin \alpha \tau}{\alpha \tau}, & \text{se } \alpha = \beta, \end{cases} \quad (36)$$

dove, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}^+$. Si nota subito che il membro destro si annulla se α e β sono multipli *interi distinti* di $\pi/(\tau/2) \equiv 2\pi/\tau$ ed è uguale a 1 se α e β sono lo *stesso multiplo intero* di $2\pi/\tau$.

Ora, essendo la funzione *sin* limitata, quando $\tau \rightarrow +\infty$, il membro destro tende a 0 $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}^+ \wedge \alpha \neq \beta$ ma tende a 1 se $\alpha \equiv \beta$.

Così, scelta la famiglia di *indice (spetttrale) η continuo*,

$$\{\phi_\eta\} := \{x \mapsto \sin(\eta x)\}, \quad (37)$$

con $\eta \in \mathbb{R}^+$, si deduce, dalle Eq.i (36), che

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{4}{\tau} \int_0^{\tau/2} \phi_\alpha(x) \phi_\beta(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}. \quad (37.1)$$

Pertanto, due funzioni di indice *continuo* del tipo (37) posseggono la proprietà di *orto-normalità asintotica* nel semi-intervallo infinito $(0, +\infty)$. Questo porta a ipotizzare che una *rappresentazione massimale* di f per $x \in \mathbb{R}^+$ debba includere auto-funzioni di *modo continuo* del tipo (37) e, quindi, che la *somma infinita* (35) vs. n vada sostituita con un *integrale generalizzato* vs. η mentre tutti i coefficienti a_n , numerabili e di valore *finito*, si ‘condensino’ nel codominio *generalmente* continuo di una funzione reale $\eta \mapsto a(\eta)$ limitata in \mathbb{R}^+ :

$$f(x) := \int_0^{+\infty} a(\eta) \sin(\eta x) d\eta. \quad (38)$$

La rappresentazione (38) corrisponde a quella di un integrale *doppio generalizzato* in $(\mathbb{R}^+)^2$. Se essa esiste $\forall f$ ‘well-behaved’ (i.e., *dotata di proprietà analitiche minime generali sufficienti* per le operazioni richieste (e.g., $f \in \mathcal{C}^1$, almeno)), rimane da determinare la funzione $\eta \mapsto a(\eta)$. Analogamente ai coefficienti a_n (v. § 7), si incomincia con il moltiplicare i membri dell’Eq. (38) per $\sin(\eta_0 x)$ – $\eta_0 \in (0, \tau/2)$ è un valore *qualsiasi* – e, quindi, si integrano vs. x le espressioni in tale intervallo, assumendo la *commutabilità* delle integrazioni nell’integrale doppio *a destra*:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau/2} \sin(\eta_0 x) f(x) dx &= \int_0^{\tau/2} \sin(\eta_0 x) \left(\int_0^{+\infty} a(\eta) \sin(\eta x) d\eta \right) dx \\ &\equiv \int_0^{+\infty} a(\eta) \left(\int_0^{\tau/2} \sin(\eta_0 x) f(x) dx \sin(\eta x) \sin(\eta_0 x) dx \right) d\eta := \mathfrak{J}_{\tau/2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Per convenienza, $\mathfrak{J}_{\tau/2}$ è il simbolo sintetico del valore dell’integrale *doppio* nell’Eq. (39).

Ora, ricorrendo dell’Eq. (36) per l’integrale interno (39) quando $\eta \neq \eta_0$, si ottiene la riduzione

$$\mathfrak{J}_{\tau/2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} a(\eta) \frac{\sin((\eta - \eta_0)\tau/2)}{\eta - \eta_0} d\eta - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} a(\eta) \frac{\sin((\eta + \eta_0)\tau/2)}{\eta + \eta_0} d\eta,$$

che, definiti $v := (\eta - \eta_0)\tau/2$ nel *primo* integrale e $v := (\eta + \eta_0)\tau/2$ nel *secondo*, diventa

$$\mathfrak{J}_{\tau/2} = \frac{1}{2} \int_{-\eta_0\tau/2}^{+\infty} a(\eta) \frac{\sin v}{v} dv - \frac{1}{2} \int_{-\eta_0\tau/2}^{+\infty} a(\eta) \frac{\sin v}{v} dv. \quad (40)$$

Quindi, tenuto conto che $\eta_0 > 0$, si scrive *formalmente*, *prolungando l’integrazione a \mathbb{R}* ,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mathfrak{J}_{\tau/2} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\eta_0) \frac{\sin v}{v} dv - \cancel{\frac{1}{2} \int_{+\infty}^{+\infty} a(-\eta_0) \frac{\sin v}{v} dv} \\ &= \frac{a(\eta_0)}{\cancel{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv = a(\eta_0) \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (40.1)$$

Il valore $\pi/2$ del primo integrale è un risultato classico. In \mathcal{C} , è ottenibile con il metodo dei *residui*

(e.g. v. [22], [23]); in \mathbb{R} (procedimento più oneroso), v. [26], Es.I 292, 327-a e 340. L'evanescenza del secondo integrale corrisponde al fatto che *graf*($\sin v/v$) smorza rapidamente a 0 le ampiezze (di verso *alterno!*) delle sue oscillazioni mentre l'estremo inferiore di integrazione 'confluisce' in quello superiore ($\eta_0 \tau/2 \rightarrow +\infty$). Come ultime osservazioni, va ricordato il vincolo di *limitatezza* della funzione $a: \eta \mapsto a(\eta)$ e che $\sin(\alpha v)/(\pi v)$ è uno dei *precursori* possibili, per $\alpha \rightarrow +\infty$, del funzionale δ di Dirac.

Pertanto, quando $\tau \rightarrow +\infty$, il risultato (40.1) può essere posto nella forma

$$a(\eta_0) = \frac{2}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mathfrak{J}_{\tau/2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\eta_0 x) dx,$$

dalla quale, data l'arbitrarietà di $\eta_0 \in \mathbb{R}^+$, si può *indurre* l'espressione *generale* della funzione

$$\eta \mapsto a(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\eta x) dx. \tag{41}$$

Per chiarezza, conviene riscrivere la rappresentazione (41) vs. una variabile (muta!) di integrazione *diversa* da x , e.g., u :

$$\eta \mapsto a(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(u) \sin(\eta u) du. \tag{41.1}$$

Lo scopo è quello di distinguere i ruoli *operazionali* di x : quello di *parametro 'convolutivo'*, come nelle Eq.i (38) e (39), da quello di *variabile muta di integrazione*, Eq. (41.1). Pertanto, sostituendo l'integrale (41.1) nell'integrale (38), risulta, senza ambiguità, nel dominio $\mathfrak{D}_f \equiv \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \left(\int_0^{+\infty} f(u) \sin(\eta u) du \right) \sin(\eta x), \tag{42}$$

detta *rappresentazione \mathfrak{F} -integral-seno* di f in \mathbb{R}^+ .

Riapplicando l'intero procedimento precedente al *problema di frontiera* che soddisfa le condizioni *estremali* di modo n -simo ($n \in \mathbb{Z}_0^+$)

$$\begin{cases} \phi'_n(0) = 0 \\ \phi'_n(\tau/2) = 0 \end{cases} \tag{43}$$

e avente l'*auto-vettore modale* generale

$$x \mapsto \phi_n(x) = \cos(2n\pi x/\tau) \tag{43.1}$$

come soluzione non-banale, si determina la *rappresentazione \mathfrak{F} -integral-coseno* di f in \mathbb{R}^+ ,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \left(\int_0^{+\infty} f(u) \cos(\eta u) du \right) \cos(\eta x) \tag{44}$$

attraverso la definizione (41.1), corrispondente ad $a(\eta)$, della funzione

$$\eta \mapsto b(\eta) := \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(u) \cos(\eta u) du. \tag{41.1}$$

□

Fin qui, si è considerata $x \in \mathbb{R}^+$. Invece, se $x \in \mathbb{R}^-$, l'Eq. (42) muta solo *a sinistra*, mantenendo invariata la *forma* del membro destro:

$$-f(-x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \left(\int_0^{+\infty} f(u) \sin(\eta u) du \right) \sin(\eta x).$$

Ne segue che, se f è una funzione *dispari* e se si tiene conto del fattore iniziale $2/\pi$, si ha, in \mathbb{R} ,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin(\eta u) du \right) \sin(\eta x). \quad (45)$$

Con un ragionamento analogo, se f è una funzione *pari*, la rappresentazione \mathcal{F} -integral-coseno di f estesa a \mathbb{R} risulta, dall'Eq. (44),

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(\eta u) du \right) \cos(\eta x). \quad (46)$$

Va ricordata una proprietà importante, valida \forall funzione $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:
definite la funzione *pari*, detta 'parte pari di f ',

$$x \mapsto f_+(x) := \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) \quad (47.1)$$

e la funzione *dispari*, detta 'parte dispari di f ',

$$x \mapsto f_-(x) := \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)), \quad (47.2)$$

è immediato verificare che

$$f(x) \equiv f_+(x) + f_-(x) \quad (47.3)$$

(la lettrice/il lettore sono invitati a verificare l'Eq. (47.3) per il caso (istruttivo!) in cui $f(x) \equiv \ln x \dots$).

In tal modo, \forall funzione f , si trova prontamente, dall'Eq. (47.3), che le Eq. (45) e (46) diventano, rispettivamente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f_+(u) + f_-(x)) \sin(\eta u) du \right) \sin(\eta x) d\eta \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{\eta=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_-(u) \sin(\eta u) du \right) \sin(\eta x) d\eta \\ &\equiv f_-(x), \end{aligned} \quad (47.4)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f_+(u) + f_-(x)) \cos(\eta u) du \right) \cos(\eta x) d\eta \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{\eta=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_+(u) \cos(\eta u) du \right) \cos(\eta x) d\eta \\ &\equiv f_+(x). \end{aligned} \quad (47.5)$$

A questo punto, per sinteticità e coerenza rappresentativa, si *definisce* la coppia di integrali

$$A(\eta) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\eta x) dx, \quad (48.1)$$

$$B(\eta) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\eta x) dx. \quad (48.2)$$

Pertanto, con il supporto *implicito* generale dell'Eq. (47.3) o, nei casi di parità/disparità *esplicita*, delle Eq.i (47.4) e (47.5), si costruisce la sequenza di uguaglianze *formali* equivalenti

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} (A(\eta) \cos(\eta x) + B(\eta) \sin(\eta x)) d\eta \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) (\cos(\eta u) \cos(\eta x) + \sin(\eta u) \sin(\eta x)) du \right), \quad \forall f, \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\eta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(\eta(u-x)) du \right) \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(\eta(u-x)) du \right), \end{aligned} \quad (49.1)$$

forma *convolutiva* vs. x e parità della funzione *cos*,

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) (e^{i\eta(u-x)} + e^{-i\eta(u-x)}) du \right) d\eta, \\ &\quad \text{dalla forma in } \mathcal{C} \text{ delle Identità Euleriane,} \\ &\equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\eta(u-x)} du \right) d\eta + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\eta(u-x)} du \right) d\eta \\ &\equiv \frac{1}{4\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i(-\eta)(u-x)} du \right) d(-\eta) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\eta(u-x)} du \right) d\eta \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\eta(u-x)} du \right) d\eta. \end{aligned} \quad (49.2)$$

Le Eq.i (49.1) e (49.2) costituiscono due delle \mathcal{F} -rappresentazione integrali complete di $f(x)$ più comuni. Data l'analogia estrema con la \mathcal{F} -serie, le richieste analitiche (\mathcal{D} -condizioni integrali) su f sono, oltre alla *continuità* e alla *regolarità generali a tratti* in qualsiasi intervallo *finito*, anche l'*integrabilità assoluta* in \mathbb{R} , i.e., che $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, risultando $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. Inoltre, in un punto x_0 di 'salto' di discontinuità, f è definita *in media*, come la \mathcal{F} -serie (v. Eq. (16)). Quindi,

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\eta u} du \right) d\eta \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \tilde{f}(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (50)$$

Introdotta l'*operatore-trasformata* $\mathfrak{F}\{\dots\}$, l'integrale η -parametrico *interno* all'Eq. (50), indicato come la funzione $\eta \mapsto \tilde{f}(\eta)$, porta a definire la cosiddetta **Trasformata di Fourier** (\mathcal{F} -trasformata) della funzione $x \mapsto f(x)$,

$$\eta \mapsto \tilde{f}(\eta) \equiv \mathfrak{F}\{f\}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\eta x} dx \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\eta) - iB(\eta)) dx, \quad (51)$$

la chiave di uno dei capitoli più profondi e densi di risultati fondamentali dell'Analisi Moderna sia teorica che, soprattutto, applicata (equazioni differenziali *ordinarie* e a *derivate parziali*, *Funzioni Speciali*, Teoria della Convulsione, Fisica Statistica, Fisica Quantistica, Gravitazione Relativistica, Teoria dei Segnali, etc.).

□

La \mathcal{F} -trasformata di una funzione f , quando esiste *nulla* in \mathbb{R}^- , si riduce, *formalmente*, alla sua \mathcal{L} -trasformata (Laplace). Lo si verifichi esplicitamente come esercizio.

□

Si osservi attentamente che se la \mathcal{F} -trasformata di f , Eq. (51), è *invertibile*, essa *non è* simmetrica nel *fattore esponenziale complesso* presente in $\tilde{f}(\eta)$. Infatti, vs. la definizione (51), la definizione operatoriale appropriata (in \mathcal{C}) di **\mathcal{F} -anti-trasformata** della funzione $\eta \mapsto \tilde{f}(\eta)$ è

$$x \mapsto f(x) \equiv \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{f}\}(\eta) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\eta) e^{i\eta x} d\eta. \quad (52)$$

■

Applicazioni della Serie di Fourier

Esempio 1 Calcolo della Somma ζ di Riemann di ordine intero positivo pari.

La definizione generale, $\forall p \in \mathbb{Z}^+$, è

$$\zeta(2p) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}. \quad (53)$$

Il calcolo di $\zeta(2p)$ richiede l'applicazione dei risultati integrali seguenti:

$$\Xi_{p,0} := \int_0^\pi x^{2p} dx = \frac{\pi^{2p+1}}{2p+1}; \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{p,n} &:= \int_0^\pi x^{2p} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} x^{2p} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} (2px^{2p-1} dx) \\ &= -\frac{2p}{n} \int_0^\pi x^{2p-1} \sin nx dx = -\frac{2p}{n} \left(-\frac{\cos nx}{n} x^{2p-1} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) ((2p-1)x^{2p-2} dx) \right) \\ &= 2p\pi^{2p-1} \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2p(2p-1)}{n^2} \int_0^\pi x^{2(p-1)} \cos nx dx \\ &\equiv 2p\pi^{2p-1} \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2p(2p-1)}{n^2} \Xi_{p-1,n}, \end{aligned} \quad (55)$$

che costituisce una forma *iterativa* conveniente. □

Ora, valendo chiaramente il *Teorema di Dirichlet* in \mathbb{R} per la restrizione f , 2π -periodica, della funzione continua pari $x \mapsto x^2$, si scrive l' \mathcal{F} -espansione, nella quale, sono presenti *unicamente* componenti-coseno,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x^2 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx \right) \cos(nx).$$

Quindi, dalle Eq. (54) e (55), si calcola, per $p = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x^2 dx + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx \right) \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\pi \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2} \frac{\sin(n\pi)}{n} \Big|_0^\pi \right) \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx). \end{aligned} \quad (56)$$

Se $x \equiv \pi$, l'Eq. (56) dà

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n \equiv \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

da cui, risolvendo rispetto alla sommatoria, risulta

$$\zeta(2) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (57)$$

In modo identico al calcolo di $\zeta(2)$, anche la restrizione 2π -periodica f della funzione continua pari $x \mapsto x^4$ è \mathcal{F} -espandibile in termini di *sole* componenti-coseno, avendosi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^4 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^4 \cos(nx) dx \right) \cos(nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \cos(nx) dx \right) \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \left(4\pi^3 \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{4 \cdot 3}{n^2} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \right) \cos(nx) \right) \\ &= \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) - \frac{24}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(2\pi \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos(nx) - \\ &\quad \downarrow - \frac{48}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \left(\frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right) \cos(nx). \end{aligned} \quad (58)$$

Per $x \equiv \pi$ e tenendo conto dell'Eq. (57), l'Eq. (58) dà

$$\begin{aligned} \pi^4 &= \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \\ &= \frac{\pi^4}{5} + \frac{4}{3} \pi^4 - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \end{aligned}$$

da cui, risolvendo rispetto alla sommatoria, si trova che

$$\zeta(4) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (59)$$

Il metodo seguito nella determinazione di $\zeta(2)$ e di $\zeta(4)$ può essere applicato al calcolo di tutte le *Serie di Riemann* successive di ordine $2p$, i.e., $\zeta(6)$, $\zeta(8)$, etc., assegnando $x = \pi$ nella \mathcal{F} -espansione della restrizione periodica della funzione $x \mapsto x^{2p}$ all'intervallo $[0, 2\pi)$ e avvalendosi delle somme ottenute per le ζ -serie calcolate precedentemente.

Così, nel caso delle somme delle prime quattro ζ -serie successive all'Eq. (59), si trovano

$$\zeta(6) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad (60.1)$$

$$\zeta(8) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \quad (60.2)$$

$$\zeta(10) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad (60.3)$$

$$\zeta(12) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}. \quad (60.4)$$

□

Serie η e λ Associate della Serie di Riemann

$$\begin{aligned} \eta(2p) &:= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2p}} \equiv 1 - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} - \frac{1}{4^{2p}} + \dots \\ &\equiv \left(1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \dots\right) - 2 \left(\frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \frac{1}{6^{2p}} + \frac{1}{8^{2p}} + \dots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} - 2 \left(\frac{1}{2^{2p}} \left(1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \dots\right)\right) \equiv \zeta(2p) - 2^{1-2p} \zeta(2p) \\ &\equiv (1 - 2^{1-2p}) \zeta(2p). \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \lambda(2p) &:= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^{2p}} \equiv 1 - \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{5^{2p}} - \frac{1}{7^{2p}} + \dots \\ &\equiv \left(1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \frac{1}{6^{2p}} + \frac{1}{8^{2p}} + \dots\right) \\ &= \zeta(2p) - \frac{1}{2^{2p}} \left(1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \dots\right) \equiv \zeta(2p) - \frac{1}{2^{2p}} \zeta(2p) \\ &\equiv (1 - 2^{-2p}) \zeta(2p). \end{aligned} \quad (62)$$

□

Combinando le Eq.i (55), (59), (60.1), (60.2) e (60.3) nell'Eq. (61), quando sia $p \equiv 1, 2, 3, 4, 5$, si ottengono, ordinatamente, i valori delle somme

$$\eta(2) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (63.1)$$

$$\eta(4) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}, \quad (63.2)$$

$$\eta(6) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^6} = \frac{31\pi^6}{30240}, \quad (63.3)$$

$$\eta(8) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^8} = \frac{127\pi^8}{1209600}, \quad (63.4)$$

$$\eta(10) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{10}} = \frac{73\pi^{10}}{6842880}. \quad (63.5)$$

Analogamente, la combinazione delle stesse Eq.i (57), (59), (63.1), (63.2) e (63.3) nell'Eq. (62), corrispondenti a $p = 1, 2, 3, 4, 5$, fornisce i valori rispettivi delle cosiddette λ -serie di ordine *pari*

(v., e.g., il math-notebook: Determinazione di serie di potenze in \mathbb{R} dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler, P. 16, Esercizio 2):

$$\lambda(2) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (64.1)$$

$$\lambda(4) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad (64.2)$$

$$\lambda(6) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad (64.3)$$

$$\lambda(8) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^8} = \frac{17\pi^8}{161280}, \quad (64.4)$$

$$\lambda(10) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^{10}} = \frac{31\pi^{10}}{2903040}. \quad (64.5)$$

□

Esempio 2 Calcolo delle prime due Somme β_D di Dirichlet di ordine positivo dispari, $2p+1$

Definizione generale:

$$\beta_D(2p+1) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2p+1}}, \quad (65)$$

2.1 La funzione $x \mapsto f(x) \equiv \begin{cases} -1, & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ 1, & \text{per } x \in [0, \pi] \end{cases}$ è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$, dove,

quindi, è \mathcal{F} -espandibile. Inoltre, essendo una funzione dispari, la sua \mathcal{F} -espansione è espressa in termini di sole componenti-seno, aventi come coefficienti

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \equiv \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(n(x-\pi)) dx + \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(-nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = 0 \quad \vee \quad \frac{4}{n\pi}, \quad \text{secondo che } n \text{ sia pari o dispari.} \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} f(x) \doteq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) &\equiv \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{\sin(nx)}{n} \\ &\equiv \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}. \end{aligned} \quad (66)$$

Dalla definizione di f in $[0, \pi]$, si ha, per $x \equiv \pi/2$ e tenendo conto dell'Idn. (A.10),

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1/2)\pi)}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

i.e., risolvendo vs. la sommatoria (*Serie ciclotrica* o di GREGORY (JAMES, 1638-1675)),

$$\beta_D(1) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (\equiv \tan^{-1}1). \quad (67)$$

2.2 La funzione $x \mapsto f(x) := \begin{cases} x(\pi+x), & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ x(\pi-x), & \text{per } x \in [0, \pi] \end{cases}$, è continua in $[-\pi, \pi]$,

dove, quindi, è \mathcal{F} -espandibile. Inoltre, f è una funzione *dispari*. Infatti, osservato che $f(x) := x(\pi+x)$ in $(-\pi, 0)$, risulta $-f(-x) \equiv |x|(\pi-|x|) \equiv f(x)$ in $(0, \pi)$.

Quindi, l' \mathcal{F} -espansione di f viene espressa in termini di sole componenti-seno, che hanno come coefficienti, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \equiv \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 x(\pi+x) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} x(\pi-x) \sin(nx) dx \right) \\ &\equiv \frac{1}{\pi} (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2). \end{aligned}$$

Ora, posto $x := -u$, segue che

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\pi}^0 (-u)(\pi-u) \sin(n(-u)) d(-u) du \equiv \int_0^{\pi} u(\pi-u) \sin(nu) du \equiv \mathcal{J}_2$$

e, pertanto,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi-x) \sin(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx \equiv \frac{2}{\pi} \mathcal{J}_{1,2} \\ &= 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \left(x^2 \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right) \\ &= 2 \left(x \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) + 2\pi \frac{(-1)^n}{n} - \frac{4}{n\pi} \left(x \frac{-\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \\ &= 2 \left(-\pi \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right) + 2\pi \frac{(-1)^n}{n} + \frac{4}{n^2 \pi} \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n^3}. \end{aligned}$$

L' \mathcal{F} -espansione di f (*continua* sul suo intervallo di periodicità) si scrive

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \equiv \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \equiv \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}. \quad (68)$$

Dalla definizione di f in $[0, \pi]$, si ha, per $x \equiv \pi/2$ e tenendo presente l'Idn. (A. 5),

$$\begin{aligned} f(\pi/2) &= (\pi/2)(\pi-\pi/2) = \pi^2/4 \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi/2)}{(2n-1)^3} \equiv \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^{2n-1}-1) i^{(2n-1)\pi/2}}{2(2n+1)^3} \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-i^{2n}}{(2n+1)^3} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}, \end{aligned}$$

dalla quale, con la traslazione indiciale $n \mapsto n - 1$, si ottiene, $\forall p \in \mathbb{Z}^+$,

$$\beta_D(3) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \quad (69)$$

■

La rappresentazione generale in *forma chiusa* delle somme $\beta_D(2p+1)$, si trova, e.g., a P. 19, Eq. (63), del math-notebook: **Determinazione di serie di potenze in \mathbb{R} dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler.**

Problema 2

Si determini il valore $S_{(1)}$ della somma $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(4n-3)^3} + \frac{1}{(4n-1)^3} \right)$.

Soluzione

Osservato che $S_{(1)} \equiv \frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \dots$ e che, sostituendo $x \equiv \pi/4$ nell'Eq. (68), si scrive l'uguaglianza

$$\begin{aligned} f(\pi/4) &\equiv \frac{3}{16} \pi^2 = \frac{8}{\pi} \left(\frac{2^{-1/2}}{1^3} + \frac{2^{-1/2}}{3^3} - \frac{2^{-1/2}}{5^3} - \frac{2^{-1/2}}{7^3} + \frac{2^{-1/2}}{9^3} + \frac{2^{-1/2}}{11^3} - \frac{2^{-1/2}}{13^3} - \frac{2^{-1/2}}{15^3} + \dots \right) \\ &\equiv \frac{2^{5/2}}{\pi} S_{(1)}, \end{aligned}$$

segue immediatamente il risultato:

$$S_{(1)} = \frac{3}{2^{13/2}} \pi^3 \approx 1.0277. \quad (70)$$

■

Problema 3

Sfruttando opportunamente l'Eq. (70), si determini il valore della somma seguente:

$$S_{(2)} := \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(8n-5)^3} - \frac{1}{(8n-3)^3} \right).$$

Soluzione

Riconosciuta l'invarianza della somma della serie (convergente *assolutamente!*) del Problema 2 vs. *qualsiasi* ridisposizione dei suoi termini, è legittima la rappresentazione

$$\begin{aligned} S_{(1)} &\equiv \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \dots \\ &\quad \downarrow \dots + 2 \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} + \frac{1}{19^3} - \frac{1}{21^3} + \dots \right) \\ &\equiv \beta_D(3) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(8n-5)^3} - \frac{1}{(8n-3)^3} \right), \end{aligned}$$

si ottiene prontamente

$$\begin{aligned}
 S_{(2)} &\equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(8n-5)^3} - \frac{1}{(8n-3)^3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (S_{(1)} - \beta_D(3)) \\
 &= \left(\frac{3}{2^{15/2}} - \frac{1}{64} \right) \pi^3 \approx 0.0294.
 \end{aligned} \tag{71}$$

■

Problema 4

Dalla \mathcal{F} -espansione 2π -periodica della restrizione f della funzione $x \mapsto |\sin x|$, si determini la somma S della serie,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \equiv \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots$$

Soluzione

Poiché f è una funzione *pari*, la sua \mathcal{F} -espansione è costituita di sole componenti-coseno.

Pertanto, si ha

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} 2 \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi};$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{(\sin x)^2}{2} \Big|_0^\pi = 0;$$

poi, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$, si calcola

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} 2 \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{-\cos((n-1)x)}{n-1} \right) \Big|_0^\pi \\
 &= -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}.
 \end{aligned}$$

Segue che

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \cos(nx) \equiv \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(nx). \tag{72}$$

Ora, applicando l'*Uguaglianza di Parseval* (P. 11, Eq. (24)) all'Eq. (69), si scrive

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 \, dx = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2},$$

i.e., con il completamento del calcolo dell'integrale nel membro a sinistra,

$$\frac{1}{2} (x - \cos x \sin x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \equiv \pi$$

$$= \frac{8}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} \right).$$

Infine, risolvendo rispetto alla (somma della) serie, risulta

$$S \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \approx 0.1169. \tag{73}$$

■

Problema 5

5.1 Si determini un'espressione generale, che risulti valida $\forall p \in \mathbb{Z}^+$, per la somma della serie numerica seguente:

$$S(p) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+p)} ;$$

5.2 servendosi, dove appropriato, del risultato ottenuto al Punto 5.1 precedente, si determini la somma S della serie,

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} \equiv \sum_n u_n.$$

Soluzione

5.1 Poiché vale la scomposizione $\frac{1}{n(n+p)} \equiv \frac{1}{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right)$, allora,

$$\begin{aligned} S(p) &\equiv \frac{1}{p} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\nu} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \equiv \frac{1}{p} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + \sum_{n=p+1}^{\nu} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{n+p} \right) \\ &= \frac{1}{p} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + \sum_{n=p+1}^{\nu} \frac{1}{n} - \sum_{n=p+1}^{\nu+p} \frac{1}{n} \right) \\ &= \dots = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\nu+1} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\nu+p} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

5.2 Con il metodo di separazione in *frazioni parziali*, si scrive

$$u_n^{1/2} \equiv \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2},$$

e, quindi, in forma intera equivalente, si ha

$$1 = (A + B + C)n^2 + (3A + 2B + C)n + 2A.$$

Per il *Principio di Identità dei Polinomi*, questa uguaglianza è soddisfatta in modo univoco sse valgono le condizioni simultanee

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A + 2B + C = 0, \quad \text{i.e., sse} \\ 2A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1 \\ C = 1/2 \end{cases}.$$

Quindi, risultando $u_n^{1/2} \equiv \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$, segue che

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \equiv \sum_{k=1}^6 u_{n,k}, \end{aligned}$$

con gli addendi $u_{n,k}$ identificabili ordinatamente.

Ora, tenendo conto dell'Eq. (57), P. 23, si calcolano prontamente le somme delle serie seguenti:

$$\sum u_{n,1} \equiv \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}; \tag{75.1}$$

$$\sum u_{n,2} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \equiv \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1; \tag{75.3}$$

$$\sum u_{n,3} \equiv \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \frac{1}{4} \left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) - 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2}{24} - \frac{5}{16}. \tag{75.3}$$

Circa la valutazione delle somme delle tre serie rimanenti, l'Eq. (78) fornisce i risultati seguenti:

$$\sum u_{n,4} \equiv - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -1; \tag{75.4}$$

$$\sum u_{n,5} \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{3}{8}; \tag{75.5}$$

$$\begin{aligned} \sum u_{n,6} &\equiv - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \equiv - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}. \quad (\text{Serie di MENGOLI (PIETRO, 1626-1686)}) \end{aligned} \tag{75.6}$$

Quindi, poiché $\sum u_n$ è *uniformemente convergente*, S si ottiene elementarmente come somma delle sei somme parziali (75.1), ..., (75.6). Il risultato è

$$S = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16} \approx 0.0299. \tag{76}$$

■

Problema 6

Dalla \mathcal{F} -espansione in \mathbb{R} della restrizione 2π -periodica *dispari* f della funzione $x \mapsto \cos x$, si estraiga la serie numerica corrispondente a $x \equiv \pi/4$ e se ne calcoli la somma.

Soluzione

Poiché f è una funzione dispari 2π -periodica, la sua definizione è

$$f(x) := \begin{cases} -\cos x, & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ \cos x, & \text{per } x \in (0, \pi) \end{cases}.$$

Vale il *Teorema di Dirichlet*, con la \mathcal{F} -espansione costituita di sole componenti-seno.

Pertanto, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, si calcola

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{2\pi} x\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-\cos x) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (\sin(x+nx) + \sin(nx-x)) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x+nx) + \sin(nx-x)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{-\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{-\cos((n-1)x)}{n-1} \right) \Big|_{-\pi}^0 - \left(\frac{-\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{-\cos((n-1)x)}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \dots \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right) \equiv \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 + (-1)^n}{n+1} + \frac{1 + (-1)^n}{n-1} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} (1 + (-1)^n) \frac{n}{n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Quindi, riducendosi la somma ai soli addendi di indice *pari*, si trova che

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + (-1)^n) \frac{n}{n^2 - 1} \sin(nx) \equiv \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx). \quad (77)$$

Circa la serie numerica richiesta, l'assegnazione $x \equiv \pi/4$ nell'Eq. (77), porta all'uguaglianza

$$\begin{aligned} \frac{2^{1/2}}{2} &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(n\pi/2) = \dots = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}, \quad \text{dall'Idn. (A.4),} \\ &\equiv \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} \right), \quad \text{dalla separazione in frazioni parziali.} \end{aligned}$$

Segue immediatamente che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)}{(4n-1)(4n-3)} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} \right) = \frac{2^{1/2} \pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2^{3/2}}. \quad (78)$$

■

Problema 7

Sia f la restrizione periodica all'intervallo $[-1, 1]$ della funzione $x \mapsto |x|^{1/2}$, definita in \mathbb{R} .

- 7.1 Si giustifichi che f è \mathcal{F} -espandibile in \mathbb{R} . Quindi, si scriva la \mathcal{F} -espansione di f ;
- 7.2 specificati i valori $f(1)$ e $f(0)$, si deducano una rappresentazione in *serie doppia* di $1/6$ e una (non-banale) di $1/3$, rispettivamente.

Soluzione

7.1 La funzione pari f è regolare a tratti in $[-1, 1]$, con $f'(0)$ valore *non-definito*.

Pertanto, valendo il *Teorema di Dirichlet* per f , che risulta \mathcal{F} -espandibile in \mathbb{R} in termini di sole componenti-coseno, si ha

$$\frac{a_0}{2} \equiv \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x|^{1/2} dx \equiv \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3};$$

poi, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, si calcola

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x|^{1/2} \cos(2\pi n/\tau) dx = \frac{2}{\tau} 2 \int_0^1 x^{1/2} \cos(n\pi x) dx \\ &= 2 \left(\cancel{x^{1/2} \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1} - \int_0^1 \frac{1}{2x^{1/2}} \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \right) = -\frac{1}{(n\pi)^{1/2}} \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi x)^{1/2}} dx. \end{aligned} \quad (79.1)$$

La sostituzione $u := (n\pi x)^{1/2}$ porta al cambiamento $\int_0^1 (dx) \mapsto \int_0^{(n\pi)^{1/2}} \frac{2u}{n\pi} du$ dell'operatore integrale nell'Eq. (79.1), così da poter riscriverlo nella forma

$$a_n = -\frac{2}{(n\pi)^{3/2}} \int_0^{(n\pi)^{1/2}} \sin(u^2) du \equiv -\frac{2}{(n\pi)^{3/2}} \sigma((n\pi)^{1/2}). \quad (79.2)$$

L'integrale $\sigma((n\pi)^{1/2})$, importante in Ottica Fisica, è del tipo di *Fresnel* ed è calcolabile solo in serie di potenze; la funzione integranda è *uniformemente* convergente nel compatto $[0, (n\pi)^{1/2}]$.

La \mathcal{F} -espansione di $f(x)$ si scrive

$$f(x) := \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma((n\pi)^{1/2})}{n^{3/2}} \cos(n\pi x). \quad (80)$$

7.2 Per $x \equiv 1$, l'Eq. (80) dà il risultato notevole

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} \sigma((n\pi)^{1/2}) = \frac{\pi^{3/2}}{6}. \quad (81)$$

Poiché l' \mathcal{M} -espansione (\therefore Maclaurin) $\sin(u^2) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2(2k+1)}$ converge *uniformemente* in tutto \mathbb{R} , dall'Eq. (79.2), risulta corretta la scrittura

$$\sigma((n\pi)^{1/2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{(n\pi)^{1/2}} u^{2(2k+1)} du = (n\pi)^{3/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (n\pi)^{2k}}{(2k+1)!(4k+3)}. \quad (82)$$

Infine, sostituendo nell'Eq. (85) espressione (86) di $\sigma((n\pi)^{1/2})$ e semplificando, si trova che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k ((n+1)\pi)^{2k}}{(2k+1)!(4k+3)} = \frac{1}{6}. \quad (83)$$

Analogamente, sostituendo $x = 0$ nell'Eq. (84) e procedendo come con l'Eq. (87), si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k ((n+1)\pi)^{2k}}{(2k+1)!(4k+3)} = \frac{1}{3}. \quad (84)$$

È interessante notare come le rappresentazioni delle somme (83) e (84) differiscano per il solo fattore di *segno alterno* $(-1)^n$, sufficiente a rendere la somma (84) doppia della (83). ■

Presentazioni classiche della Teoria delle *Serie di Fourier* premettono due risultati semplici alla cosiddetta *Formula di Dirichlet* (v. **Problema 10**). Essi sono riportati, qui di seguito, come

Problema 8

8.1 Si ricavi, $\forall \{n, M\} \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}^+ \wedge n \in [1, M]$, il valore della somma

$$S := 1/2 + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos Mu \equiv 1/2 + \sum_{n=1}^M \cos nu;$$

8.2 si verifichino i valori integrali (cf/c (†), P. 13)

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 \frac{\sin((M+1/2)u)}{\sin(u/2)} du = \frac{1}{\tau} \int_a^{\tau/2} \frac{\sin((M+1/2)u)}{\sin(u/2)} du = \frac{1}{2}. \quad (85)$$

Soluzione

8.1 L'identità goniometrica

$$\cos nu \sin(u/2) \equiv (1/2)(\sin((n+1/2)u) - \sin((n-1/2)u)),$$

ricavata dalle *Identità di Werner*, quando sia sommata vs. l'indice $n \in [1, M]$, dà

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^M \cos(nu) \right) \sin(u/2) = \\ & = (1/2) ((\cancel{\sin(3u/2)} - \sin(u/2)) + (\cancel{\sin(5u/2)} - \cancel{\sin(3u/2)}) + \dots \\ & \quad + (\cancel{\sin(7u/2)} - \cancel{\sin(5u/2)}) + \dots + (\sin(M+1/2)u - \cancel{\sin(M-1/2)u})) \\ & = \frac{1}{2} (\sin((M+1/2)u) - \sin(u/2)). \end{aligned} \quad (86)$$

Dividendo i membri estremi dell'Eq. (86) per $\sin(u/2) \neq 0$ (i.e., con $u \neq 2k\pi$) e sommando $1/2$ a entrambi, si ottiene (v., anche, dell'autore: *Esercizi di Calcolo Integrale in \mathbb{R}* , MR-11)

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos(nu) = \frac{1}{2} \frac{\sin((M+1/2)u)}{\sin(u/2)}. \quad (87)$$

8.2 La funzione integranda – identica nei due integrali – è *pari*. Quindi, la sua integrazione in intervalli simmetrici vs. $u = 0$ dà lo stesso risultato. Dall'Eq. (91), questo è $\tau/2$, essendo *nulli* gli integrali definiti in $(-\tau/2, \tau/2)$ di tutti gli addendi-coseno. Segue l'asserto. ■

Problema 9

9.1 Si consideri la coppia numerica $\{n, M\} \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}^+$.

Sommando da 1 a M vs. l'indice variabile n l'identità *di Werner* relativa al *prodotto* tra un *coseno* e un *seno*,

$$\cos(nu) \sin(u/2) \equiv (1/2)(\sin((n+1/2)u) - \sin((n-1/2)u)),$$

si ricavi, mediante la formula di *prostaferesi* della *differenza tra seni*, con $u \neq 2k\pi$, l'identità seguente:

$$\sum_{n=1}^M \cos(nu) = \frac{\cos((M+1)u/2) \sin(Mu/2)}{\sin(u/2)}. \quad (88.1)$$

9.2 In modo analogo, iniziando dall'identità di Werner relativa al prodotto tra due seni,

$$\sin(nu) \sin(u/2) \equiv (1/2)(\cos((n-1/2)u) - \cos((n+1/2)u)),$$

si determini, con la formula di *prostaferesi* della differenza tra coseni, con $u \neq 2k\pi$,

$$\sum_{n=1}^M \sin(nu) = \frac{\sin((M+1)u/2) \sin(Mu/2)}{\sin(u/2)}. \quad (88.2)$$

Le Idn. (88.1) e (88.2), attribuite a DIRICHLET (J. P. G. L., 1805-1859) ma note, sembrerebbe, anche a EULER (L., 1707-1783), si rivelano utili nell'integrazione delle *Serie di Fourier*. ■

Problema 10

Sia f una funzione τ -periodica, alla quale, sia associata un' \mathcal{F} -espansione appropriata. Di questa, si consideri la *somma ridotta* M -sima (cf/c Eq. (26)),

$$S_F(x; M) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n \cos(nx + \varphi_n) + b_n \sin(nx + \varphi_n)).$$

Si dimostri la *Formula di Dirichlet* di nucleo (kernel) $D_M(u)$ di convoluzione integrale (v. P. 13)

$$S_F(x; M) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(u+x) \frac{\sin((M+1/2)u)}{\sin(u/2)} du \equiv \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(u+x) D_M(u) du. \quad (89)$$

Soluzione

Esplicitando gli \mathcal{F} -coefficienti corrispondenti a $n \in \mathbb{Z}^+$, si scrive

$$\begin{aligned} a_n \cos(nx + \varphi_n) + b_n \sin(nx + \varphi_n) &= \\ &= \left(\frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) \cos(nw + \varphi_n) dw \right) \cos(nx + \varphi_n) + \\ &\quad + \left(\frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) \sin(nw + \varphi_n) dw \right) \sin(nx + \varphi_n) \\ &= \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) (\cos(nw + \varphi_n) \cos(nx + \varphi_n) + \sin(nw + \varphi_n) \sin(nx + \varphi_n)) dw \\ &= \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) \cos(n(w-x)) dw. \end{aligned}$$

Inoltre, $a_0/2 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) dw$. Quindi, tenendo conto del risultato (68),

$$S_F(x; M) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) dw + \frac{2}{\tau} \sum_{n=1}^M \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) \cos(n(w-x)) dw$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos(n(w-x)) \right) dw \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(w) \frac{\sin((M+1/2)(w-x))}{\sin((w-x)/2)} dw.
 \end{aligned}$$

La dimostrazione termina ponendo $u \equiv u(w) := w - x (\Rightarrow du \equiv dw)$ e ricordando le Eq.i (1) e (1.1), P. 1, quando f è una funzione *periodica*. ■

Nella Teoria della *Funzione Γ* , una dimostrazione in \mathbb{R} (\dagger) della *2^a Proprietà Fondamentale*, detta *di Riflessione* (o *di Complementazione*), caratterizzata dalla simmetria vs. lo scambio tra argomenti nell'intervallo $(0, 1)$, può essere ottenuta per mezzo di una \mathcal{F} -espansione opportuna.

Problema 11

Proposizione

Sia $x \in (0, 1)$. Allora (*Proprietà di Riflessione della Funzione Γ*),

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \equiv \pi \operatorname{csc}(\pi x). \quad \blacktriangle \tag{90}$$

Dimostrazione

Dalla rappresentazione integrale di Legendre, si scrive, $\forall x \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \left(\int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-s} ds \right) \left(\int_0^{+\infty} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt \right) \\
 &\equiv \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} s^{x-1} t^{-x} e^{-(s+t)} ds dt \equiv \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} g(s, t) ds dt. \tag{91}
 \end{aligned}$$

La rappresentazione integrale doppia (91) è convergente poiché la sua separabilità moltiplicativa vs. le variabili di integrazione dà luogo a rappresentazioni parziali convergenti *uniformemente*, quelle del Γ -integrale di Legendre. □

In generale, le tre condizioni seguenti:

- a. il dominio (di integrazione) $\Omega \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$ è PJ -misurabile (i.e., di misura μ_{PJ} , à-la Peano-Jordan);
- b. $g: \Omega \mapsto \mathbb{R}$;
- c. $\exists \{\Omega_j\}$ ($j \in \mathbb{Z}^+$), una successione di sotto-dominî *nidificati* di Ω che costituiscono una *copertura* di Ω (e.g., l'insieme dei *quadrati* $\{\Omega_{x,y;j}\} \equiv \{(x; y) \in [0, j] \times [0, j]\}$ o l'insieme dei *quarti di cerchio* $\{\Omega_{\varphi,\rho;j}\} \equiv \{(\varphi; \rho) \in [0, \pi/2] \times [0, j]\}$), i.e., tale che, $\forall j$,
 - Ω_j è limitata, PJ -misurabile e $\mu_{PJ}(\Omega_j) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \mu_{PJ}(\Omega)$,
 - $\Omega_j \subset \Omega_{j+1} \wedge \Omega_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \Omega \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$,
 - $|g(s, t)| \in \mathcal{R}(\Omega_j)$ (i.e., $|g|$ è Riemann-integrabile in Ω_j),
 - $\lim_{j \rightarrow +\infty} \iint_{\Omega_j} |g(s, t)| ds dt < +\infty$,

sono *sufficienti* a garantire che, se $\Omega \equiv (\mathbb{R}^+)^2$, allora, $\exists! \lim_{j \rightarrow +\infty} \iint_{\Omega_j} g(s, t) ds dt = \iint_{\Omega} g(s, t) ds dt$.

□

Al cambiamento di variabili

$$\begin{cases} s := uv/(v+1) \equiv s(u, v) \\ t := u/(v+1) \equiv t(u, v) \end{cases}, \quad (92)$$

corrisponde il determinante jacobiano $\partial(s, t)/\partial(u, v) \equiv s'_u t'_v - s'_v t'_u = u/(v+1)^2 > 0$, sul dominio trasformato di u, v -integrazione, come è verificabile prontamente controllando il segno di u con la trasformazione inversa,

$$\begin{cases} u = s + t \equiv u(s, t) \\ v = s/t \equiv v(s, t) \end{cases}, \quad (92.1)$$

e ricordando che $\{s, t\} \subset \mathbb{R}^+$. Quindi, mediante le Eq.i (91) e (92), si scrive

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &\equiv \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} dv \left(\frac{uv}{v+1}\right)^{x-1} \left(\frac{u}{v+1}\right)^{-x} e^{-u} \frac{u}{(v+1)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} du \int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{v+1} dv = \int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{v+1} dv. \end{aligned} \quad (93)$$

La rappresentazione integrale (93), per $x \in (0, 1)$, è convergente; la si può scomporre come

$$\int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{v+1} dv = \int_0^1 \frac{v^{x-1}}{1+v} dv + \int_1^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{1+v} dv \equiv \mathfrak{I}_1(x) + \mathfrak{I}_2(x). \quad (94)$$

Se si pone $v := 1/w$ in $\mathfrak{I}_2(x)$, si ottiene il cambiamento $\int_1^{+\infty} (dv) \equiv \int_1^0 (-dw/w^2) \equiv \int_0^1 (dw/w^2)$ dell'operatore di integrazione e, da questo, risulta che

$$\mathfrak{I}_2(x) = \int_0^1 \frac{w^{-x}}{1+w} dw \equiv \int_0^1 \frac{v^{-x}}{1+v} dv, \quad (95)$$

avendo *ridefinito* come v la variabile (*muta*) di integrazione. Allora, dalle Eq.i (94) e (95), si trova che vale la rappresentazione integrale

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) \equiv \int_0^1 \frac{v^{x-1} + v^{-x}}{1+v} dv. \quad (96)$$

Nella funzione integranda, il fattore $(1+v)^{-1}$ è la somma della Serie Geometrica di ragione $-v$, sull'intervallo $[0, 1]$, dove, risultando l'espressione integranda maggiorata dalla funzione limitata e integrabile $x \mapsto v^{x-1} + v^{-x}$, è lecita l'integrazione termine-a-termine

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^1 (v^{x-1} + v^{-x}) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n v^n \right) dv \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 (v^{n+x-1} + v^{n-x}) dv \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+1-x} \right) = \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{-2x}{n^2 - x^2} \\
 &= \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2}. \tag{97}
 \end{aligned}$$

Ora, si consideri l' \mathcal{F} -espansione della restrizione della funzione 2π -periodica *pari* $u \mapsto \cos xu$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, con il parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la quale risulta esprimibile mediante soli termini-coseno. I coefficienti necessari,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(xu) du = \frac{2 \sin(\pi x)}{\pi x}, \\
 a_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(xu)) \cos(nu) du}{\int_{-\pi}^{\pi} 1 du} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos((x-n)u) + \cos((x+n)u)) du \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((x-n)\pi)}{x-n} + \frac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} \right) = -\frac{2x \sin(\pi x)}{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2},
 \end{aligned}$$

determinano l'espansione

$$\cos(xu) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \left(\frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2} \cos(nu) \right). \tag{98}$$

Se si assegnano $u \equiv 0$ e $x \in (0, 1)$ nell'Eq. (98) e, quindi, si moltiplicano i membri di questa per $\pi/\sin(\pi x)$, dal confronto con l'Eq. (97), si trova, transitivamente, la **Proposizione (90)**, q. e. d. .

(†) E.g., si veda il math-notebook: Proprietà e applicazioni in \mathbb{R} della Funzione Gamma, CAP. 1, P. 7-9.

I quattro problemi che seguono, e che costituiscono esempî di *temi d'esame*, provengono da lezioni o esercitazioni di Analisi Matematica 2 tenute dall'autore presso la Facoltà di Ingegneria dell'UniBG e sono accompagnati da soluzioni. Sta al buon senso di chi legge ottenerne una soluzione *personale e dettagliata*, resistendo, per quanto ... umanamente possibile, alla tentazione di sbirciare troppo sbrigativamente le soluzioni accluse.

Problema 12

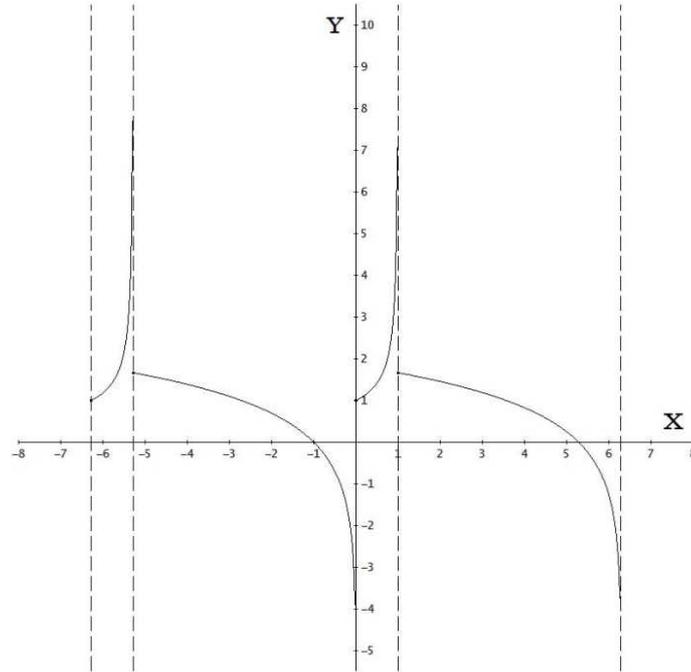
Del prolungamento 2π -periodico in \mathbb{R} della restrizione all'intervallo $[0, 2\pi)$ definita come

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} (1-x)^{-1/2}, & \text{per } x \in [0, 1), \\ \ln(2\pi - x), & \text{per } x \in [1, 2\pi), \end{cases} \tag{99}$$

- 12.1 si tracci il grafico di f prolungato all'insieme $[-2\pi, 2\pi]$;
- 12.2 si giustifichi che f è \mathcal{F} -espandibile in \mathbb{R} e se ne scriva l' \mathcal{F} -espansione;
- 12.3 applicando le *\mathcal{D} -condizioni generalizzate*, si indichino i punti dell'intervallo $[0, 2\pi]$ di convergenza della \mathcal{F} -serie, scrivendone la somma.

Soluzione

- 12.1 $\text{graf}(f)$, nel dominio $[-2\pi, 2\pi]$, mostra l'aspetto seguente:



12.2 la restrizione f è *generalmente* continua, con $|f(x)|$ integrabile nell'intervallo $[0, 2\pi]$, dove è *infinita*, vs. l'infinito principale $1/(2\pi - x)$, di ordine $1/2 (< 1)$ quando $x \rightarrow 1^-$ e di ordine $< \mu, \forall \mu \in (0, 1)$, quando $x \rightarrow 2\pi^-$ (punti di discontinuità di 2° tipo).

Pertanto, in $[0, 2\pi]$, $f(x)$ può essere espansa in \mathcal{F} -serie, con coefficienti

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 (1-x)^{-1/2} dx + \int_1^{2\pi} \ln(2\pi-x) dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \left(-2(1-x)^{1/2} \Big|_0^\alpha \right) + \lim_{\beta \rightarrow 2\pi^-} \left((x-2\pi) \ln(2\pi-x) - x \Big|_{t=\alpha}^\beta \right) \right) \\
 &= \frac{3}{\pi} - 2 + \left(2 - \frac{1}{\pi} \right) \ln(2\pi - 1); \tag{100}
 \end{aligned}$$

$$a_{n \geq 1} = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 \frac{\cos(nx)}{(1-x)^{1/2}} dx + \int_1^{2\pi} \ln(2\pi-x) \cos(nx) dx \right), \tag{101}$$

$$b_{n \geq 1} = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{(1-x)^{1/2}} dx + \int_1^{2\pi} \ln(2\pi-x) \sin(nx) dx \right). \tag{102}$$

Espressioni (approssimate) di $a_{n \geq 1}$ e di $b_{n \geq 1}$ si possono determinare con integrazioni per serie in intervalli *compatti* opportuni, contenuti in $[0, 2\pi]$. Dalle Eq.i (100), (101) e (102), si scrive

$$\begin{aligned}
 f(x) \doteq S_F(x) &= \frac{3}{2\pi} - 1 + \left(1 - \frac{1}{2\pi} \right) \ln(2\pi - 1) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\int_0^1 \frac{\cos(nx)}{(1-x)^{1/2}} dx + \int_1^{2\pi} \ln(2\pi-x) \cos(nx) dx \right) \cos(nx) + \downarrow \right.
 \end{aligned}$$

$$\downarrow + \left(\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{(1-x)^{1/2}} dx + \int_1^{2\pi} \ln(2\pi-x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx) \Bigg); \quad (103)$$

12.3 le \mathcal{D} -condizioni generalizzate sono applicabili *generalmente* in $[0, 2\pi]$, i.e., eccetto che per $x = 0, 1, 2\pi$, dove, f è *essenzialmente* discontinua (i.e., di 2° tipo). Altrove nell'intervallo, f è continua e, pertanto, *coincide* con $S_F(x)$. Detto con altre parole, f è \mathcal{F} -rappresentabile *puntualmente* con la serie (103). ■

Problema 13

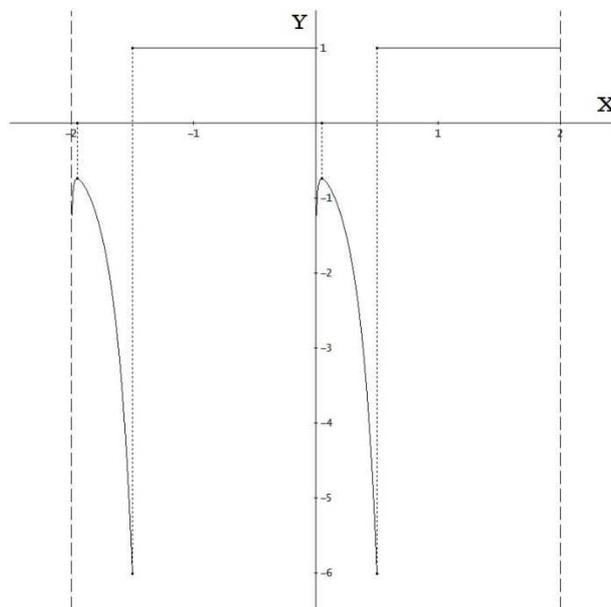
Dato il prolungamento in \mathbb{R} , di periodo $\tau = 2$, della funzione ristretta

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1/(x(\ln x)^3), & \text{per } x \in [0, 1/2), \\ 1, & \text{per } x \in [1/2, 2), \end{cases} \quad (104)$$

- 13.1 se ne tracci il grafico nell'insieme $[-2, 2]$;
 13.2 si verifichi se f è \mathcal{F} -espandibile in \mathbb{R} e se ne scriva l' \mathcal{F} -espansione;
 13.3 rispetto alle \mathcal{D} -condizioni generalizzate, si individuino i punti dell'intervallo $[0, 2]$ dove la \mathcal{F} -serie converge, scrivendone la somma.

Soluzione

13.1 I punti $(e^{-3} \pm n; -e^{-3}/3)$ sono di *massimo* relativo. La restrizione di $\text{graf}(f)$ a $[-2, 2]$ è



13.2 Riguardo a $x = 1/2 + 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$), punti di discontinuità di 1° tipo per f corrispondenti a un 'salto' $|\Delta y| = 1 + 2/(\ln 2)^3$, \exists finite le (pseudo)-derivate *unilaterali* $f'^*(x^-)$ e $f'^*(x^+)$,

$$f'^*(1/2^-) = (4\ln 2 - 3)/(\ln 2)^4, \quad f'^*(1/2^+) = 0.$$

Nel dominio di periodicità $[0, 2)$, la funzione f possiede due punti di discontinuità di 2° tipo in corrispondenza degli asintoti verticali $x = 0$ e $x = 2$. Quando $x \rightarrow 0^+$ (più in generale, quando

$x \rightarrow 2n^+$), f diventa infinita di ordine < 1 ma non di ordine $\leq \mu < 1$ ($\mu \in \mathbb{R}^+$) vs. l'infinito principale $1/x$. Pertanto, si è obbligati a verificare in modo *diretto* se l'integrale *generalizzato*

$\int_0^{1/2} |f(x)| dx$ sia convergente o no. Il calcolo di controllo dà esito affermativo:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{1/2} |f(x)| dx &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{d(\ln x)}{(-\ln x)^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(1/(2(\ln x)^2) \right) \Big|_{\varepsilon}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2(-\ln 2)^2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(-\ln \varepsilon)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Poiché esistono *finite* entrambe le pseudo-derivate *unilaterali* in $x = 1/2$ ($+ 2n$) e le \mathcal{D} -condizioni *generalizzate* in $[0, 2)$ risultano soddisfatte, $f(x)$ è espandibile in \mathcal{F} -serie in \mathbb{R} , con i coefficienti seguenti ($\tau = 2 \iff 2/\tau = 1$):

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^3} + \int_{1/2}^2 1 \cdot dx = \int_0^{1/2} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^3} + x \Big|_{1/2}^2 = -\frac{1}{2(\ln x)^2} \Big|_0^{1/2} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(\ln \varepsilon)^2} = \frac{3(\ln 2)^2 - 1}{2(\ln 2)^2} \approx 0.4593, \end{aligned} \tag{105}$$

$$a_{n \geq 1} = \int_0^{1/2} \frac{\cos(n\pi x)}{x(\ln x)^3} dx + \int_{1/2}^2 \cos(n\pi x) dx = \int_0^{1/2} \frac{\cos(n\pi x)}{x(\ln x)^3} dx - \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}, \tag{106}$$

$$b_{n \geq 1} = \int_0^{1/2} \frac{\sin(n\pi x)}{x(\ln x)^3} dx + \int_{1/2}^2 \sin(n\pi x) dx = \int_0^{1/2} \frac{\sin(n\pi x)}{x(\ln x)^3} dx + \frac{1}{\pi n} (\cos(n\pi/2) - \cos(2n\pi)).$$

La differenza $\cos(n\pi/2) - \cos(2n\pi)$ nell'espressione preliminare di $b_{n \geq 1}$ è riducibile per *prostaferesi*:

$$\begin{aligned} \cos(n\pi/2) - \cos(2n\pi) &= -2 \sin \frac{n\pi/2 - 2n\pi}{2} \sin \frac{n\pi/2 + 2n\pi}{2} = 2 \sin(n\pi - n\pi/4) \sin(n\pi + n\pi/4) \\ &= 2((\cancel{\sin n\pi})^2 - (\sin(n\pi/4))^2) = -2(\sin(n\pi/4))^2 \\ &= \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ -2, & \text{se } n \text{ è pari } \wedge n/2 \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } n \wedge n/2 \text{ sono pari,} \end{cases} \quad \text{dall'Idn. (A.6).} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$b_{n \geq 1} = \int_0^{1/2} \frac{\sin(n\pi x)}{x(\ln x)^3} dx + \begin{cases} -1/(n\pi), & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \begin{cases} -2/(n\pi), & \text{se } n \text{ è pari } \wedge n/2 \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } n \wedge n/2 \text{ sono pari.} \end{cases} \end{cases} \tag{107}$$

e, dunque,

$$f(x) \doteq S_F(x) = \frac{3(\ln 2)^2 - 1}{2(\ln 2)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\int_0^{1/2} \frac{\cos(n\pi x)}{x(\ln x)^3} dx - \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) + \downarrow \right)$$

$$\hookrightarrow + \left(\int_0^{1/2} \frac{\sin(n\pi x)}{x(\ln x)^3} dx + \left\{ \begin{array}{ll} -1/(n\pi) & (n \text{ dispari}), \\ -2/(n\pi) & (n \text{ pari} \wedge n/2 \text{ dispari}), \\ 0 & (n \wedge n/2 \text{ pari}), \end{array} \right\} \sin(n\pi x) \right); \quad (108)$$

13.3 per $x = 0$ e $x = 2$, $S_F(x)$ non è definita, essendo f discontinua di 2° tipo. Per $x = 1/2$, punto di discontinuità di 1° tipo per f , risulta, dall'Eq. (16), $S_F(1/2) = 1/2 - 1/(\ln 2)^3$.
 Altrove nell'intervallo $[0, 2]$, f è continua e, pertanto, coincide puntualmente con $S_F(x)$, i.e., è \mathcal{F} -rappresentabile mediante la serie (108). ■

Problema 14

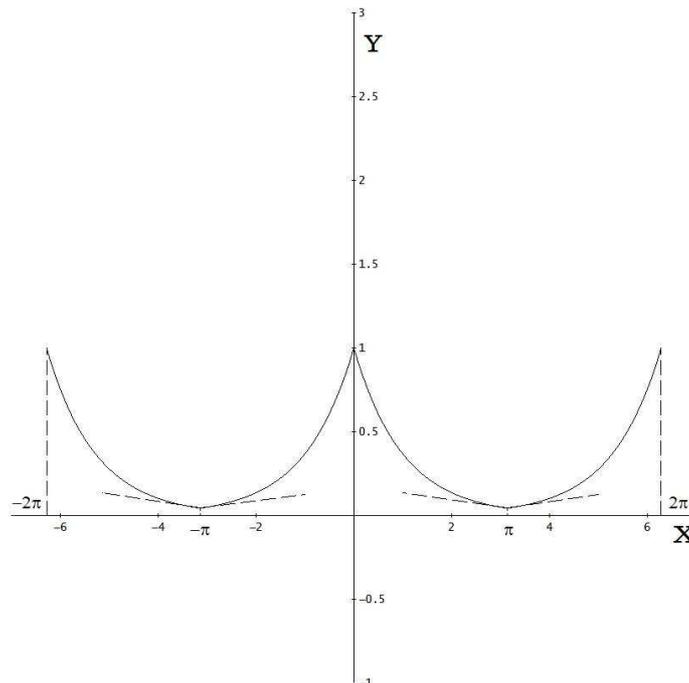
Si espanda in \mathcal{F} -serie la restrizione 2π -periodica, pari, che, nel semi-intervallo principale destro di periodicità, $[0, \pi]$, è definita come

$$x \mapsto e^{-x} \equiv f(x). \quad (109)$$

- 14.1 si tracci il prolungamento di $graf(f)$ a $[-2\pi, 2\pi]$;
- 14.2 si determini se la \mathcal{F} -serie ottenuta sia uniformemente convergente in \mathbb{R} ;
- 14.3 si utilizzi la \mathcal{F} -serie stessa per calcolare $I := \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx$.

Soluzione

14.1 Il grafico, riportato qui sotto, del prolungamento di f all'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ è continuo e mostra la presenza di tre punti angolosi, di coordinate $(-\pi; e^{-\pi})$, $(0; 1)$ e $(\pi; e^{-\pi})$.
 Prolungando $graf(f)$ a tutto \mathbb{R} , ne risultano due insiemi numerabili di punti angolosi, $\{(2n\pi; 1)\}_{\mathbb{Z}}$, massimi relativi, e $\{((2n+1)\pi; e^{-\pi})\}_{\mathbb{Z}}$, minimi relativi non-stazionari;



14.2 nel suo dominio (principale) di *periodicità* e di *parità*, $[-\pi, \pi]$, il prolungamento di f è *regolare* a tratti, con pseudo-derivate $f^{*}(0^{\mp}) = \pm 1$ e $f^{*}(\mp\pi^{\pm}) = \pm e^{-\pi}$. Pertanto, f è, in $[-\pi, \pi]$, \mathcal{F} -espandibile mediante i soli coefficienti-coseno.

Sfruttando la *parità* di f (v. Eq.i (22) e (1.2)), si calcola, integrando due volte *per-parti*,

$$a_{n \geq 0} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cos(nx) dx \equiv \frac{2}{\pi} \mathcal{J}_n(x) \Big|_0^{\pi} \quad (110.1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{-x} \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} d(e^{-x}) \right) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(-\frac{e^{-x} \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n} d(e^{-x}) \right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \left(1 - (-1)^n e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \cos(nx) dx \right) \equiv \frac{2}{n^2\pi} \left(1 - (-1)^n e^{-\pi} - \mathcal{J}_n(x) \Big|_0^{\pi} \right). \quad (110.2)$$

Uguagliando le espressioni (110.1) e (110.2) e risolvendo vs. il numero $\mathcal{J}_n(x) \Big|_0^{\pi}$, risulta

$$\mathcal{J}_n(x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{n^2 + 1}, \quad \text{da cui,} \quad a_{n \geq 0} = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{n^2 + 1}, \quad (110.3)$$

quindi, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, si ottiene

$$S_F(x) \doteq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{n^2 + 1} \cos(nx). \quad (111)$$

Ora, poiché

$$|a_n \cos nx| \leq |a_n| \leq \frac{2(1 + e^{-\pi})/\pi}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6 < +\infty$, ne segue che la \mathcal{F} -serie converge *uniformemente* a f nel *compatto*, per il *Teorema di Dirichlet*. Quindi, per traslazione, il prolungamento di f a tutto \mathbb{R} converge *uniformemente* (prolungamento *pari*). Comunque, la convergenza *assoluta* della \mathcal{F} -serie (111) implica quella *uniforme*, secondo il *Criterio di Weierstrass*.

14.3 valendo nel prolungamento a \mathbb{R}^+ *tutte* le proprietà analitiche della restrizione f , si può assegnare un compatto *parametrico* $[0, \lambda] - \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ – nel quale applicare il Teorema di *Integrazione in serie*:

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} e^{-x} f(x) dx &\equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{\lambda} e^{-x} \cos(nx) dx = \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{n \sin(nx) - \cos(nx)}{n^2 + 1} e^{-x} \right) \Big|_0^{\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(n \sin(n\lambda) - \cos(n\lambda)) e^{-\lambda}}{n^2 + 1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2 + 1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

Circa il termine generale della serie parametrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$, si ha, definitivamente, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$,

$$|\alpha_n| \leq a_n \frac{n+1}{n^2+1} \leq a_n$$

e, quindi, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ converge *uniformemente* (Criterio di Weierstrass), con $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Per il *teorema dello scambio tra le operazioni di limite e di somma di una serie uniformemente convergente*, risulta

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-x} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{(n^2+1)^2}.$$

■

Problema 15

Della funzione f *dispari*, 2π -periodica, definita a tratti in $(0, \pi)$ da

$$x \mapsto \begin{cases} x^{-1/2}, & \text{per } x \in (0, 1], \\ -1, & \text{per } x \in (1, \pi), \end{cases} \tag{112}$$

- 15.1 si determini l' \mathcal{F} -espansione associata in $(0, \pi)$, calcolandone i coefficienti esplicitamente. Si calcoli il 1° coefficiente numericamente, con un errore *assoluto* $< 10^{-4}$.
- 15.2 si tracci il prolungamento del grafico all'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$. Si specifichi la natura delle discontinuità/continuità di f circa la convergenza verso la somma $S_F(x)$;
- 15.3 si determini, da f , la funzione integrale 2π -periodica $\Phi: x \mapsto \int_0^x f(u) du$ e se ne tracci il grafico, prolungato anch'esso a $(-2\pi, 2\pi)$;
- 15.4 si ricavi la \mathcal{F} -espansione associata a Φ , determinandone i coefficienti;
- 15.5 si confronti *criticamente* la serie degli integrali dei termini dell' \mathcal{F} -espansione associata a f con l' \mathcal{F} -espansione associata a Φ .

Soluzione

15.1 Poiché f è *dispari*, la sua \mathcal{F} -espansione associata nel semi-intervallo principale $(0, \pi)$ di periodicità si riduce ai soli termini-seno:

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = S_F(x), \tag{113}$$

$$\begin{aligned} \text{con } b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 x^{-1/2} \sin(nx) dx + \int_1^\pi (-1) \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 x^{-1/2} \sin(nx) dx + \frac{1}{n} ((-1)^n - \cos n) \right). \end{aligned} \tag{113.1}$$

Il 1° coefficiente della \mathcal{F} -serie può essere approssimato numericamente mediante un'espansione 'nidificata' ulteriore, in serie di potenze:

$$b_1 \equiv \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 x^{-1/2} \sin x dx - (1 + \cos 1) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} dx - 2(\cos(1/2))^2 \right)$$

$$\equiv \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 x^{1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} dx - 2(\cos(1/2))^2 \right).$$

Lo scambio tra le operazioni di *somma-di-una-serie* e di *integrazione* è, qui, ammissibile poiché la funzione $x \mapsto x^{1/2}$ esiste continua e limitata nell'intervallo *compatto* $[0, 1]$, dove, quindi, la serie di potenze risultante converge *uniformemente* e può essere integrata termine-a-termine.

Completando il calcolo di b_1 , risulta

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \left(-(\cos(1/2))^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(4k+3)} \right) \quad (113.2)$$

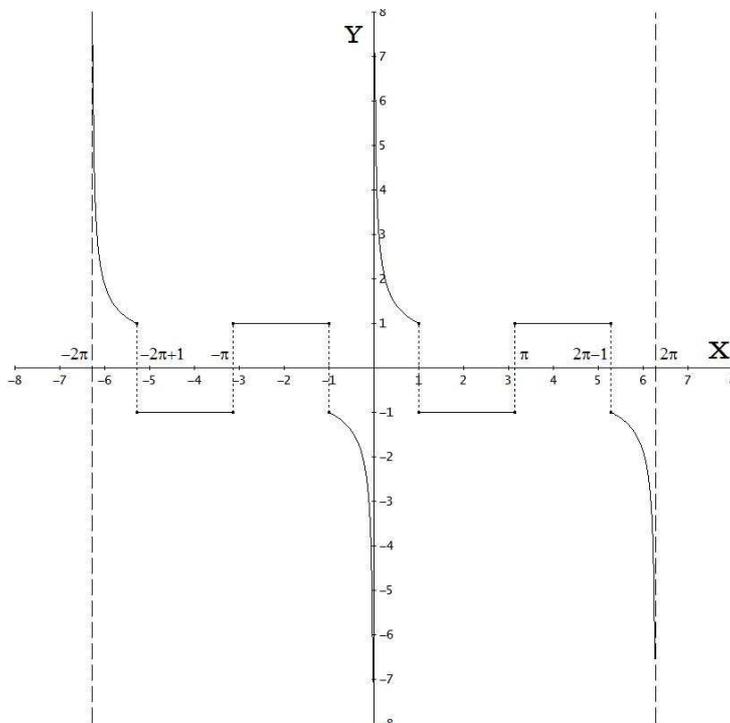
$$\approx \frac{4}{\pi} \left(-(\cos(1/2))^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{5!11} - \frac{1}{7!15} \right) \approx -0.5855. \quad (113.2.1)$$

Dal confronto tra i *valori assoluti* degli ultimi due addendi scritti, trovando che

$$\frac{4/\pi}{7!15} < 10^{-4} < \frac{4/\pi}{5!11},$$

si conclude che il valore (113.2.1) approssima *per difetto*, a meno di 10^{-4} , il valore *esatto* (113.2) di b_1 , secondo il *Criterio di Leibniz* per le serie numeriche a termini di segno alterno;

15.2 il prolungamento del grafico di f a $(-2\pi, 2\pi)$ evidenzia la *simmetria centrale* tipica dei grafici delle funzioni *dispari*:



Nell'insieme *principale* di simmetria e di periodicità, $(-\pi, \pi)$, f possiede tre discontinuità: *due* di 1° tipo, in $x = \pm 1$, e *una* di 2° tipo, in $x = 0$. Con riferimento all'Eq. (113),

- per i punti di discontinuità di 1° tipo, con 'salto' $|\Delta y| = 2$, si hanno i risultati seguenti:

$$\begin{aligned}
 f(\pm 1) &= \pm 1, \quad S_F(\pm 1) \doteq 0, \\
 f(\pm \pi) &= \$, \quad S_F(\pm \pi) \doteq 0 \quad (\$:= \text{valore non definito}), \\
 f'^*(\mp 1^\mp) &= f'^*(\mp \pi^\mp) = 0, \\
 f'^*(\mp 1^\pm) &= -1/2;
 \end{aligned}$$

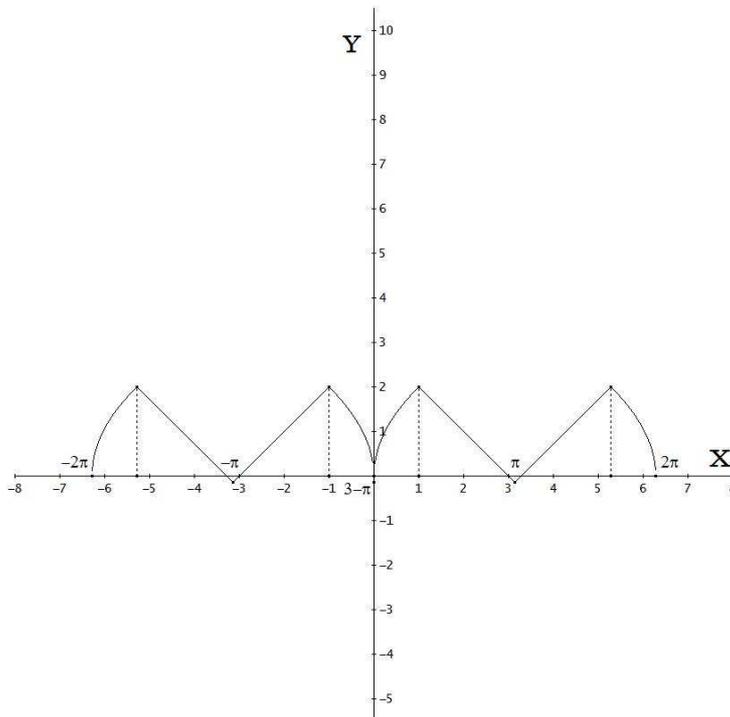
- per il punto di discontinuità di 2° tipo, corrispondente alla posizione di un asintoto verticale, $f(0) = \$, \quad S_F(0) \doteq 0$.

Come conclusione, $S_F(x)$ – funzione *continua*, in quanto somma di funzioni continue – converge solo *puntualmente* a $f(x)$ in $(-\pi, \pi)$, *mai* uniformemente, perché $f \notin \mathcal{C}((-\pi, \pi))$;

15.3 la funzione integrale 2π -periodica Φ è la funzione primitiva, necessariamente *pari*,

$$x \mapsto \begin{cases} \int_0^x u^{-1/2} du \equiv 2x^{-1/2}, & \text{per } x \in (0, 1] \\ \int_0^1 u^{-1/2} du + \int_1^x (-1) du \equiv 3 - x, & \text{per } x \in (1, \pi) \end{cases}, \quad (114)$$

anch'essa definita a tratti in $(0, \pi)$. Il suo grafico, *simmetrico* vs. l'asse Y , prolungabile a \mathbb{R} , è mostrato nella figura seguente:



Si osserva immediatamente che $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Inoltre, Φ è derivabile ovunque, *eccetto* che in *tre* infinità numerabili di estremanti *cuspidali*, due di massimi relativi e una di minimi relativi. Infatti, $\forall \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{Z}$, risultano le pseudo-derivate unilaterali

$$\Phi'^*(1^\mp + 2v_1\pi) = \pm 1, \quad \Phi'^*(\pi^\mp + 2v_2\pi) = \mp 1, \quad \Phi'^*((2\pi - 1)^\mp + 2v_3\pi) = \pm 1;$$

15.4 essendo Φ una funzione pari, ad essa è associata un' \mathcal{F} -espansione di soli termini-coseno:

$$\Phi(x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = S_F(x), \quad (115)$$

convergente per $x \neq 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Le espressioni dei coefficienti dell'espansione di S_F sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 2x^{1/2} dx + \int_1^\pi (3-x) dx \right) = \frac{16 - 3(3-\pi)^2}{3\pi} \approx 1.6913; \quad (115.1)$$

$$\begin{aligned} a_{n \geq 1} &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 2x^{1/2} \cos(nx) dx + \int_1^\pi (3-x) \cos(nx) dx \right), \text{ da cui, con integrazioni per-parti,} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left(2x^{1/2} \frac{\sin(nx)}{n} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^{-1/2} \frac{\sin(nx)}{n} dx + \left((3-x) \frac{\sin(nx)}{n} \right) \Big|_1^\pi - \int_1^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\cancel{\frac{2 \sin n}{n}} - \frac{1}{n} \int_0^1 x^{-1/2} \sin(nx) dx - \cancel{\frac{2 \sin n}{n}} + \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_1^\pi \right) \\ &= -\frac{2}{\pi n} \left(\int_0^1 x^{-1/2} \sin(nx) dx + \cos(nx) \Big|_1^\pi \right) \\ &= -\frac{1}{n} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 x^{-1/2} \sin(nx) dx + \frac{1}{n} ((-1)^n - \cos n) \right) \equiv -\frac{b_n}{n}. \end{aligned} \quad (115.2)$$

15.4 la determinazione della serie delle funzioni integrali (*à-la Lagrange-Picard*) sul compatto variabile $[0, x]$, generata dagli addendi dell' \mathcal{F} -espansione (113) associata a f , si ottiene da $S_F(x)$, tenendo conto che, $\forall n$, b_n è costante:

$$\begin{aligned} \int_0^x S_F(u) du &\equiv \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^x \sin(nu) du = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(-(\cos(nu))/n \Big|_0^x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \right) (\cos(nu)) \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \right) \left((\cos(nu))/n \Big|_0^x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \right) \cos(nx) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) := I_{S_F}(x). \end{aligned} \quad (116)$$

Mentre, per $n \in \mathbb{Z}^+$, i termini di $I_{S_F}(x)$ e quelli di $S_F(x)$ coincidono, risulta, invece,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{16 - 3(3-\pi)^2}{6\pi} \approx 0.8456 \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} = +\infty,$$

per la mancata convergenza uniforme di S_F – somma di funzioni continue – a f in $(0, \pi)$. Tale circostanza, che non soddisfa le condizioni del Teorema di integrabilità delle \mathcal{F} -espansioni (P. 16), è, comunque, estranea al Teorema di Dirichlet e alle \mathcal{D} -condizioni generalizzate, quindi, non può essere affermata a priori ma solo dopo un controllo diretto. ■

Appendice

I. Identità indiciali utili per le somme finite\serie iterative

$$\cos n\pi \equiv \sin((n+1/2)\pi) \equiv \binom{-1}{n} \equiv (-1)^n; \quad (\text{A.1})$$

$$\cos((n+1/2)\pi) \equiv \sin n\pi \equiv 0; \quad (\text{A.2})$$

$$\cos((n-1/2)\pi/2) \equiv \sin((n+1/2)\pi/2) \equiv (-1)^{n(n+3)/2}/2^{1/2}; \quad (\text{A.3})$$

$$\cos(n\pi/2) \equiv (1+(-1)^n)i^n/2 \equiv \delta_{1,(-1)^n} i^n \quad (i^2 = -1); \quad (\text{A.4})$$

$$\sin(n\pi/2) \equiv (1-(-1)^n)i^{n-1}/2 \equiv \delta_{-1,(-1)^n} i^{n-1}; \quad (\text{A.5})$$

$$\sin(n\pi/4) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(n^2+4n+11)/8}}{2^{1/2}}, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \begin{cases} (-1)^{(n-2)/4}, & \text{se } n \text{ è pari } \wedge n/2 \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } n \wedge n/2 \text{ sono pari;} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

- somma di addendi di indice *pari* (v. Eq. (A.4)):

$$\sum_{n=0,2,4,6,\dots,M} u_n \equiv \sum_{n=0}^M ((1+(-1)^n)/2)u_n \equiv \sum_{n=0}^M \delta_{1,(-1)^n} u_n; \quad (\text{A.7})$$

- somme di addendi di indice *pari* e di segno *alterno* (v. Eq. (A.4)):

$$\sum_{n=0}^M (-1)^n u_{2n} \equiv \sum_{n=1}^{M+1} (-1)^{n-1} u_{2(n-1)} \equiv \sum_{n=0}^M u_n \cos(n\pi/2); \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{n=1}^M (-1)^n u_{2n} \equiv \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^{n+1} u_{2(n+1)} \equiv \sum_{n=1}^M u_n \cos(n\pi/2); \quad (\text{A.9})$$

- somma di addendi di indice *dispari* (v. Eq. (A.5)):

$$\sum_{n=1,3,5,7,\dots,M} u_n \equiv \sum_{n=1}^M ((1-(-1)^n)/2)u_n \equiv \sum_{n=1}^M \delta_{-1,(-1)^n} u_n; \quad (\text{A.10})$$

- somme di addendi di indice *dispari* e di segno *alterno* (v. Eq. (A.5)):

$$\sum_{n=0}^M (-1)^n u_{2n+1} \equiv \sum_{n=1}^{M+1} (-1)^{n-1} u_{2n-1} \equiv \sum_{n=0}^M u_n \sin(n\pi/2); \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_{n=1}^M (-1)^{n-1} u_{2n-1} \equiv \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n u_{2n+1} \equiv \sum_{n=1}^M u_n \sin(n\pi/2). \quad (\text{A.12})$$

■

II. Rappresentazioni fisiche equivalenti degli \mathcal{F} -argomenti goniometrici

Si consideri la propagazione ondulatoria viaggiante, piana, *monocromatica* e *stazionaria*, di velocità $v = v \hat{x}$ (i.e., v è costante). Poi, sia $\lambda := 2\pi/k$ ($\equiv \lambda_1$) la sua *lunghezza d'onda fondamentale*, associata al *modo* periodico (o *frequenza ciclica*) o alla *pulsazione fondamentale* ω ($\equiv \omega_1$), con *numero d'onda fondamentale* k ($\equiv k_1$) (si ricordi che $\mathbf{k} = k \hat{x}$ è il *vettore di propagazione* del fronte d'onda piana, *parallelo* alla velocità ($\mathbf{k} \parallel v$)).

Tenuto conto del richiamo ([‡]) a piè di pag. 1, la \mathcal{F} -rappresentazione dell'argomento goniometrico in *regime meccanico* di spostamento *rettilineo* x è, all'ordine fondamentale, espressa da

$$\frac{2\pi}{\lambda} x \equiv \frac{\pi}{\lambda/2} x \equiv kx. \quad (\text{A.13})$$

λ può ben essere interpretata come il *periodo di ripetizione spaziale* del profilo dell'onda mentre T ne specifica il *periodo di ripetizione temporale* (nell'Eq. (A.13), si è eseguita la 'realizzazione fisica' ($\tau \mapsto T \mapsto \lambda$)).

Ora, introdotta la *frequenza oscillatoria fondamentale* ν ($\equiv \nu_1 \equiv 2\pi\omega_1$), è nota la sequenza di identità *stazionarie*

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{A.14})$$

All'ordine armonico n -simo, l'analisi di Fourier fornisce l'argomento di *tipo-spazio*

$$\frac{2n\pi}{\lambda} x = \frac{2\pi}{\lambda/n} x \equiv \frac{2\pi}{\lambda_n} x, \quad (\text{A.15})$$

quindi, la lunghezza d'onda n -sima, prevedibilmente *minore* di quella fondamentale, vale

$$\lambda_n = \lambda/n. \quad (\text{A.15.1})$$

Inoltre, poiché v è *costante*, dalla sequenza (A.14), si determinano, tra le combinazioni numerose possibili,

$$v = \frac{\lambda/n}{T/n} := \frac{\lambda_n}{T_n}, \quad (\text{A.16})$$

dalla quale, risulta il periodo temporale n volte *minore* di quello fondamentale (ovvio!)

$$\bullet \quad T_n = T/n \quad (\equiv T_1/n). \quad (\text{A.16.1})$$

Ancora, da $v = \lambda\nu \equiv (\lambda/n)(n\nu) := \lambda_n\nu_n$, si ottiene

$$\bullet \quad \nu_n = n\nu \quad (\equiv n\nu_1), \quad (\text{A.16.2})$$

i.e., $\lambda\nu = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \lambda_n \frac{n\omega}{2\pi} = \lambda_n \frac{\omega_n}{2\pi}$. Da questa, seguono

$$\bullet \quad \omega_n = n\omega \quad (\equiv n\omega_1) = 2\pi/T_n \equiv 2\pi\nu_n, \quad (\text{A.16.3})$$

così che, mediante la (A.14), si ricava $\frac{\omega}{k} = \frac{\omega_n}{nk} := \frac{\omega_n}{k_n}$, che dà, immediatamente,

$$\bullet \quad k_n = nk \quad (\equiv nk_1). \quad (\text{A.16.4})$$

L'intensità k_n è n volte *maggiore* di k_1 , mantenendo la *sincronia* di propagazione con il modo fondamentale.

Infine, essendo $x = vt$ in generale, l'equivalenza tra le rappresentazioni *spaziale* e *temporale* degli argomenti può essere ricavata, e.g., aiutandosi, anche, con le Eq.i (A.16) e (A.16.3):

$$\frac{2n\pi}{\lambda} x = \frac{2\pi}{\lambda_n} vt = \frac{2\pi}{\lambda_n} \left(\lambda_n \frac{\omega_n}{2\pi} \right) t = \omega_n t \equiv 2\pi\nu_n t. \quad (\text{A.16})$$

■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: https://www.cm-phymath.net/libr_page.html.

Riferimenti generali

- [1] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series*, VOL.S I & II, 3RD ED., CAMBRIDGE UN. PRESS (2002);
- [2] TOLSTOV, G. P., *Fourier Series*, DOVER PUBL., INC. (1976);
- [3] CARSLAW, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3RD ED., DOVER PUBNS. INC. (1952);
- [4] CHURCHILL, R. V. - BROWN, J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3RD ED., MCGRAW-HILL BOOK CO. (1978);
- [5] WHITTAKER, E. T. - WATSON, G. N., *A Course of Modern Analysis*, 4TH ED., CH. IX, CAMBRIDGE UN. PRESS (1927; REPR., 1973);
- [6] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2ND ED., CH.S 5, 8, 9, PRENTICE-HALL, INC. (1976);
- [7] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7TH ED., CH. 19, ACADEMIC PRESS (2013);
- [8] JEFFREYS, H. - JEFFREYS, B. S., *Methods of Mathematical Physics*, 3RD ED., CAMBRIDGE UN. PRESS (1966);
- [9] DETTMAN, J. W., *Mathematical Methods in Physics and Engineering*, 2ND ED., DOVER PUBNS. (2003).
- [10] WIDDER, D. V., *Advanced Calculus*, 2ND ED., CH. 12, PRENTICE-HALL, INC. (1961; REPR. 1964);
- [11] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, VOL. 2, P. 170 E SEGG., ZANICHELLI (-MASSON) (1991; RIST. 1998);
- [12] GIUSTI, E., *Analisi Matematica 2*, 2^A ED., CAP. II, § 5, 6, 7, BOLLATI-BORINGHERI (1989; RIST. 1995);
- [13] BERG, P. W. - MCGREGOR, J. L., *Elementary Partial Differential Equations*, CH. 6, HOLDEN-DAY, INC. (1969).
- [14] CAROTHERS, N. L., *Real Analysis*, CH. 15, CAMBRIDGE UN. PRESS (2000).

Applicazioni

- [15] DEMIDOVIĆ, B. P., *Esercizi e problemi di Analisi Matematica*, 4^A ED., CAP. VIII, § 4, ED. RIUN.-MIR (RIST. 1994);
- [16] GIUSTI, E., *Esercizi e complementi di Analisi Matematica*, VOL. II, CAP. II, § 4, BOLLATI-BORINGHERI (1994);
- [17] SALSA, S. - SQUELLATI, A., *Esercizi di Analisi Matematica 2*, PARTE I, P. 202, ED. MASSON (1993);
- [18] VAGHI, C., *Esercizi di Analisi Matematica II*, PARTE I, P. 209-235, ED. CITTÀSTUDI (1994);
- [19] SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, CH. 3, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL. (1978);
- [20] SPIEGEL, M. R., *ADVANCED MATHEMATICS for Engineers and Scientists*, CH. 7, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1971);
- [21] HSU, H. P., *Applied Fourier Analysis*, CH.S 1 & 5, BOOKS FOR PROFESSIONALS, INC. (1984);
- [22] SPIEGEL, M. R., et al., *Complex Variables, w/ etc.*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 2ND ED., MCGRAW-HILL (2009);
- [23] HAUSER, A. A., *Complex Variables, w/ etc.*, SIMON & SCHUSTER (1971);
- [24] WREDE, R. C., - SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of Advanced Calculus*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 3RD ED., MCGRAW-HILL (2010);
- [25] DUCHATEAU, P. - ZACHMANN, D. W., *Theory and Problems of PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1986);
- [26] BONONCINI, V. E., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. 2, 10^A ED., C.E.D.A.M. (1974).

