

revisione
14 marzo 2022

Teoremi fondamentali del **Calcolo Differenziale in \mathbb{R}**

claudio magno
www.cm-physmath.net





Brook Taylor (1685-1731)

INTRODUZIONE

In questo math-notebook, decisamente ‘tascabile’, sono raccolti e ‘compressi’ in sequenza didatticamente logica (per chi scrive) alcuni ‘pilastri’ concettuali classici dell’Analisi Infinitesimale e del Calcolo Differenziale in \mathbb{R} . Riguardo alle dimostrazioni specifiche – sempre istruttive! – ci si riferisca alla **Bibliografia** finale del documento.

Particolari attenzione e dettaglio sono stati posti in una costruzione *semi-geometrica* dei Polinomi e delle Serie di Taylor-Maclaurin (il grafico della Figura 1 è importante), seguendo (o piuttosto, tentando alla meglio di seguire) le conseguenze delle intuizioni strabilianti di Newton e di Leibniz. Di queste, è superfluo sottolineare il rilievo dirompente in tutti gli ambiti delle idee e delle attività umane, attraverso i concetti dinamici di *quantità infinitesima* (i.e., tendente a 0 *indipendentemente* dalle sue ‘dimensioni’ iniziali) e di *flussione* (\sim derivata\variazione).

Altri risultati importanti dell’Analisi sono presentati e/o ricavati, alcuni con una certa ... pedanteria, nel math-notebook: **math-crumbs**, alle pp. 48-68.

Le conseguenze tecniche e tecnologiche le conosciamo dalla Storia dei quasi quattro secoli successivi fino agli eventi correnti, nell’epoca dell’Indeterminazione, dell’Informazione e delle Teorie Caotiche non-deterministiche.

Così, i riflessi socio-culturali si sono versati incontenibili dal Vaso di Pandora, con modalità e conseguenze non sempre prevedibili, anzi, piuttosto *entropiche*. Intanto, l’Analisi è lì, con i suoi strumenti di misura differenziali, locali e globali, variazionali e virtuali, dall’infinitamente piccolo all’infinitamente grande, deterministici o stocastici, nella prospettiva di mettere ‘sotto stress’ le nostre ipotesi (sempre provvisorie) sul Meccanismo ideato dal Grande Orologiaio: ce n’est qu’un debut, continuons le combat! Si vedrà (si, suppongo che qualcuno vedrà) ...

C M

Teoremi fondamentali del Calcolo Differenziale in \mathbb{R}

Siano f una funzione *reale* della variabile *reale* x e $\bar{\mathcal{X}} \equiv \mathcal{X} \cup \partial\mathcal{X}$ l'insieme-*chiusura* di \mathcal{X} .

Teorema di Weierstrass

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \bar{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{D}_f : \left\{ \begin{array}{l} |\min \bar{\mathcal{X}}| < +\infty \\ |\max \bar{\mathcal{X}}| < +\infty \end{array} \right\} \\ f: x \mapsto f(x) \wedge f \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{X}}) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \{x_1, x_2\} \subset \bar{\mathcal{X}} : \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) = \min_{\bar{\mathcal{X}}} f(x) \\ f(x_2) = \max_{\bar{\mathcal{X}}} f(x) \end{array} \right\}. \blacktriangle$$

[Nota: La scrittura $f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{E})$ indica che f ha derivata n -sima *continua* nell'insieme $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_f$; $\mathcal{C}^0 \equiv \mathcal{C}$.] ■

Teorema di Fermat

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \in (x_0, b) \text{ è estremo locale} \\ \exists f'(\xi) \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\xi) = 0. \blacktriangle$$

Dimostrazione

Sia, e.g., $f(\xi) \equiv M$, *massimo* locale (il ragionamento con $f(\xi) \equiv \mu$, *minimo* locale, è analogo). Allora, definitivamente $\forall x \in \mathcal{U}_\delta(\xi) \subset (x_0, b)$, si ha, rispettivamente,

$$\begin{aligned} x < \xi &\Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \equiv \frac{f(x) - M}{x - \xi} \geq 0, \\ x > \xi &\Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \equiv \frac{f(x) - M}{x - \xi} \leq 0. \end{aligned}$$

Dal *Teorema di Permanenza del Segno* per le funzioni continue, consegue sia che $f'_-(\xi) \leq 0$ sia che $f'_+(\xi) \geq 0$. Pertanto, poiché $\exists f'(\xi)$, ciò implica che $f'_-(\xi) = 0 = f'_+(\xi)$. ■

Teorema del Valor Medio Incrementale (o Formula di Lagrange)

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^0([x_0, b]) \\ \exists f'(x) \text{ in } (x_0, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (x_0, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}. \blacktriangle$$

Osservazione 1

Il rapporto incrementale $(f(b) - f(x_0))/(b - x_0) := m_{PB}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta r_{PB} , passante per i punti $P \equiv (x_0; f(x_0))$ e $B \equiv (b; f(b))$ di *graf*(f).

Dimostrazione

Mediante $f(x)$ e l'equazione di r_{PB} , i.e., $y_{PB} = f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0)$, si costruisce la *funzione-differenza* ausiliaria

$$x \mapsto \phi(x) := f(x) - y_{PB} \equiv f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} (x - x_0) \right),$$

per la quale, si ha $\phi(x_0) = \phi(b) = 0$. Osservato che $\phi \in \mathcal{C}^0([x_0, b])$ e che $\exists \phi'(x)$ in (x_0, b) , allora, calcolata la funzione derivata

$$x \mapsto \phi'(x) \equiv f'(x) - \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0},$$

la tesi del *Teorema di Lagrange*, riferita a $f(x)$, equivale alla proposizione, relativa a $\phi(x)$:

$$\exists \xi \in (x_0, b): \phi'(\xi) = 0.$$

La condizione ovvia $\phi \in \mathcal{C}^0([x_0, b])$ implica, per il *Teorema di Weierstrass*, che $\exists \{x_1, x_2\} \subset [x_0, b]$ tale che

- $f(x_1) := M \equiv$ massimo assoluto di f in $[x_0, b]$,
- $f(x_2) := \mu \equiv$ minimo assoluto di f in $[x_0, b]$.

Pertanto,

- se $M \equiv \mu$, allora, $\phi(x) = 0 \forall x \in [x_0, b]$ e, quindi, $\phi'(x) = 0 \forall x \in [x_0, b]$;
- se $M > \mu$, allora, essendo $\phi(x_0) = \phi(b) = 0$, almeno uno dei due punti x_1 e x_2 è interno a $[x_0, b]$, i.e., $\in (x_0, b)$. Assumendo, e.g., che tale punto sia x_1 , il *Teorema di Fermat* implica che $\phi'(x_1) = 0$.

In entrambi i casi, la tesi del *Teorema del Valor Medio Incrementale* è provata. ■

Corollario (Teorema di Rolle)

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^0([x_0, b]) \\ f(x_0) = f(b) \\ \exists f'(x) \text{ in } (x_0, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (x_0, b): f'(\xi) = 0. \blacktriangle$$

Tenendo conto del significato geometrico di *funzione derivata*, si deduce immediatamente la proprietà *necessaria e sufficiente* seguente, valida $\forall x \in (x_0, b)$:

Condizione di monotonia per le funzioni derivabili

Se, nell'intervallo aperto (x_0, b) , f è *monotona* $\wedge \exists f'(x)$, allora, $\forall \{x_1, x_2\} \subset (x_0, b)$, con $x_1 \geq x_2$, risulta, rispettivamente,

$$f \begin{cases} \text{non-decrescente} \\ \text{non-crescente} \end{cases} \iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}.$$

Nel limite $x_2 \rightarrow x_1$, dal *Teorema di Permanenza del Segno*, per l'implicazione *sufficiente* (\Rightarrow), e dal *Teorema del Valor Medio Incrementale*, per l'implicazione *necessaria* (\Leftarrow), si conclude che

$$f \begin{cases} \text{non-decrescente} \\ \text{non-crescente} \end{cases} \iff f'(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}.$$

Ovviamente,

$$f'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (x_0, b) \iff f \text{ è costante in } (x_0, b).$$

Teorema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f, g\} \subset \mathcal{C}^0([x_0, b]) \\ \exists f'(x) \wedge g'(x) \quad \forall x \in (x_0, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (x_0, b):$$

$$(f(b) - f(x_0))g'(\xi) = (g(b) - g(x_0))f'(\xi). \blacktriangle$$

Dimostrazione

Assegnata la funzione ausiliaria

$$\psi(x) := (f(b) - f(x_0))g(x) - (g(b) - g(x_0))f(x),$$

si osserva che $\psi \in \mathcal{C}^0([x_0, b]) \wedge \exists \psi'(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$. Inoltre, è $\psi(x_0) \equiv \psi(b)$. Allora, per il *Teorema di Rolle*, $\exists \xi \in (x_0, b): \psi'(\xi) = 0 \equiv (f(b) - f(x_0))g'(\xi) - (g(b) - g(x_0))f'(\xi)$.

La tesi è dimostrata. \blacksquare

Osservazione 2

Se, e.g. $g'(x) \neq 0$ in (x_0, b) (si può ragionare in modo analogo ipotizzando che sia $f'(x) \neq 0$ in (x_0, b)), allora, il *Teorema di Rolle* implica che $g(x_0) \neq g(b)$. In tale circostanza, l'asserto del *Teorema di Cauchy* assume la forma

$$\frac{f(b) - f(x_0)}{g(b) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Inoltre, nel caso particolare in cui sia $g(x) \equiv x$, si ottiene l'asserto del *Teorema di Lagrange*.

Teorema di De l'Hôpital

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, b) \subseteq \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} |f(x)| \equiv \lim_{x \rightarrow x_0^+} |g(x)| = 0^+ \quad \vee \quad +\infty, \\ \exists f'(x) \wedge g'(x) \quad \forall x \in (x_0, b), \quad \text{con } g'(x) \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} (f'(x)/g'(x)) = l, \quad \text{con } -\infty \leq l \leq +\infty, \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x)/g(x)) = l. \blacktriangle$$

Una dimostrazione di questo teorema *sufficiente* (utilissimo nel calcolo!), facilmente adattabile ai vari casi possibili, si trova, e.g., in PAGANI, C. D. - SALSA, S., *ANALISI MATEMATICA*, VOL. 1, P. 301-306, ZANICHELLI (-MASSON).

Ovviamente, il *Teorema di De l'Hôpital* è riformulabile per $x \rightarrow b^-$ in modo analogo e immediato. \blacksquare

Il Differenziale 1° di una Funzione Derivabile

In un intorno $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ infinitesimo, la variazione *approssimata totale*, vs. il valore $f(x_0)$, del valore $f(x)$ di una funzione f , *derivabile* in x_0 , è esprimibile dalla definizione stessa di $f'(x_0)$, trascurandone il processo di limite vs. il rapporto incrementale,

$$\Delta f(x) \equiv f(x) - f(x_0) \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x, \quad (1)$$

dove, al solito, è $\Delta x := x - x_0$.

Il *modo* di approssimazione di $\Delta f(x)$ dipende da *come* viene misurato $f(x)$ vs. Δx *assegnato*. Nell'*approssimazione lineare*, il contributo *dominante* a $\Delta f(x)$ è dato dalla *variazione di ordinata lungo la retta tangente* a *graf*(f) nel punto comune $P \equiv (x_0; f(x_0))$. Convenzionalmente, tale variazione, se è riferita all'ascissa di *tangenza* x_0 , viene indicata con $df(x)$ mentre la *variazione (causale) di ascissa* è scritta dx invece che Δx . Così, quando $\Delta x \equiv dx$, risulta (v. P. 9, Fig. 1)

$$df(x) \equiv \pm \overline{RH} = (\tan(R\hat{P}H)) \cdot \overline{PH} \equiv (\tan(R\hat{P}H)) \cdot \Delta x \equiv f'(x_0) dx. \quad (2)$$

Il termine $df(x)$ è noto come il *differenziale 1°* di $f(x)$.

Ora, volendo confrontare la variazione totale $\Delta f(x)$ con quella lineare $df(x)$ quando $x \rightarrow x_0$, segue, dall'approssimazione (1) e dall'Eq. (2), che

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &\approx df(x) \\ &= f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f'(x_0) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Un modo per esprimere l'uguaglianza qualitativa *esatta* corrispondente all'approssimazione (3) è

$$\Delta f(x) = f'(x_0) dx + o(dx) \equiv df(x) + o(dx), \quad (4)$$

dove, $o(dx)$ corrisponde a una quantità infinitesima opportuna di *ordine superiore* all'infinitesimo *lineare* dx . In altre parole, fissato x_0 , la differenza tra la *variazione totale* e il *differenziale* di f ,

$$\Delta f(x) - df(x) = o(dx) \equiv \pm (\overline{SH} - \overline{RH}) = \pm \overline{SR}, \quad (5)$$

è un infinitesimo *di ordine superiore (non-lineare)* (v. Fig. 1), che, quindi, *svanisce più rapidamente* dell'infinitesimo dx .

■

Il problema dell'approssimazione polinomiale

La rappresentazione à-la Taylor della Formula di Lagrange

Il Teorema del Valor Medio Incrementale (o Formula di Lagrange) può essere posto nella forma

$$f(b) = f(x_0) + f'(\xi)(b - x_0).$$

Ora, $\forall x \in (x_0, b)$ e, quindi, con $\xi \mapsto \xi_1 < x$, vale certamente l'equazione

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x - x_0). \quad (6)$$

Se $x \rightarrow x_0$ (è sufficiente che sia $dx = \mathcal{O}(x - x_0) \equiv o(1)$, rendendo, così, dx indipendente da x), anche $\xi_1 \rightarrow x_0 \wedge f'(\xi_1) \rightarrow f'(x_0)$. Pertanto, risultando giustificata l'uguaglianza qualitativa

$$f'(\xi_1) = f'(x_0) + \alpha(x),$$

con $\alpha(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$ (α qualsiasi!), l'Eq. (6) diventa

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \\ &\equiv f(x_0) + f'(x_0)dx + o(x - x_0) \\ &:= T_{x_0}^{(1)}(x) + o(dx), \end{aligned}$$

avendo definito, con il simbolo (v. Fig. 1)

$$T_{x_0}^{(1)}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \approx f(x), \quad (7)$$

il Polinomio di Taylor lineare che approssima la funzione $x \mapsto f(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$. È evidente che $T_{x_0}^{(1)}(x)$ coincide con l'equazione della retta tangente a $\text{graf}(f)$ nel punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$.

A livello *nidificato* vs. $T_{x_0}^{(1)}(x)$, la retta passante per P e di equazione costante $y = f(x_0)$ corrisponde al Polinomio Approssimante di Taylor di Ordine 0, centrato in x_0 , della funzione f :

$$T_{x_0}^{(0)}(x) := f(x_0). \quad (8)$$

■

Costruzione del Polinomio approssimante di Taylor di ordine n

L'Eq. (5) è il punto di avvio per un raffinamento dell'approssimazione di $f(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$.

Infatti, la variazione $\pm \overline{SR} = \Delta f(x) - df(x) \equiv o(dx)$ tra $\text{graf}(f)$ e $\text{graf}(T_{x_0}^{(1)})$ corrispondente a $x = b$ esprime qualitativamente il contributo *non-lineare* complessivo alla variazione *totale* $\Delta f(x)$ in tutto l'intervallo (x_0, b) .

Pertanto, mentre la variazione $df(x)$ tende a 0 linearmente con dx ($\equiv \Delta x$), si può ipotizzare che la parte residua *non-lineare* di $\Delta f(x)$ tenda a 0 più rapidamente di dx , e.g., almeno come dx^2 ($\equiv (dx)^2$). In tal caso, quando $x = b$, i.e., quando $dx \equiv b - x_0$, si scrive

$$\pm \overline{SR} = f(b) - T_{x_0}^{(1)}(b) \equiv f(b) - (f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0)) \approx k_2(b - x_0)^2, \quad (9)$$

dove, k_2 è una costante opportuna da determinarsi. Va osservato che $R \equiv (b; T_{x_0}^{(1)}(b))$.

Si assuma che $\exists f''(x)$ in (x_0, b) . Come per la costruzione del *Polinomio Lineare Approssimante di Taylor* centrato in x_0 , conviene definire la funzione *generatrice* ausiliaria quadratica

$$x \mapsto \phi_2(x) := f(b) - (f(x) + f'(x)(b-x)) - k_2(b-x)^2, \quad (10)$$

nella quale, la costante k_2 debba essere determinata in modo tale che sia $\phi_2(x_0) = 0$. Peraltro, si verifica che anche $\phi_2(b) = 0$.

Si osservi attentamente la struttura dell'Eq. (10), dedotta da quella dell'Eq. (9): l'ascissa finale $x \equiv b$, dove viene valutata la variazione *residuale* $\pm \overline{SR}$, è fissata come *riferimento*. Inoltre, la struttura del secondo termine a destra, (...), è quella *lineare* di $T_{x_0}^{(1)}(x)$.

Il calcolo dell'espressione della funzione derivata $x \mapsto \phi_2'(x)$ dà

$$\phi_2'(x) = (b-x)(2k_2 - f''(x)). \quad (11)$$

Ora, applicando il *Teorema del Valor Medio Incrementale* a ϕ_2 , risulta, per un certo $\xi_2 \in (x_0, b)$,

$$0 \equiv \frac{\phi_2(b) - \phi_2(x_0)}{b - x_0} = \phi_2'(\xi_2) = (b - \xi_2)(2k_2 - f''(\xi_2)), \quad (12)$$

Poiché $\xi_2 \in (x_0, b)$, l'Eq. (12) non può avere $\xi_2 = b$ come radice. L'unica alternativa è che sia

$$k_2 = f''(\xi_2)/2. \quad (13)$$

Dall'approssimazione (9), $\forall x \in (x_0, b)$ ($\Rightarrow \xi \mapsto \xi_2 < x$), si ottiene

$$f(x) \approx T_{x_0}^{(1)}(x) + (1/2) f''(\xi_2)(x - x_0)^2,$$

che, *definitivamente* in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, equivale alla rappresentazione *esatta*

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{x_0}^{(2)}(x) + o(x - x_0)^2 \\ &\equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (1/2) f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((dx)^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Il simbolo (v. Fig. 1)

$$\bullet \quad T_{x_0}^{(2)}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (1/2) f''(x_0)(x - x_0)^2 \approx f(x) \quad (15)$$

definisce il *Polinomio Quadratico di Taylor* che approssima la funzione $x \mapsto f(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$. □

La costruzione del *Polinomio Cubico di Taylor* che approssima la funzione $x \mapsto f(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ non presenta alcuna difficoltà. L'esposizione dettagliata del procedimento intende evidenziare una sequenza di operazioni necessarie che lasciano emergere gradualmente certe 'regolarità' definitive dei termini \mathcal{T} -aylor approssimanti.

Per il punto $Q \equiv (b; T_{x_0}^{(2)}(b))$, passa il grafico della parabola \mathcal{T} -approssimante (15). In analogia a quanto discusso in precedenza, è ovvio che $\overline{SQ} < \overline{SR}$. Pertanto, si assume l'andamento *cubico residuale* approssimato (cfr/c Eq. (9)),

$$\begin{aligned} \pm \overline{SQ} &= f(b) - T_{x_0}^{(2)}(b) \\ &\equiv f(b) - (f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0) + (1/2)f''(x_0)(b - x_0)^2) \approx k_3(b - x_0)^3, \end{aligned} \quad (16)$$

dove, k_3 è una costante opportuna da determinarsi. L'ipotesi della possibilità di un raffinamento ulteriore dell'approssimazione di $f(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ richiede che, almeno, $\exists f'''(x)$ in (x_0, b) .

Ispirandosi all'Eq. (10), si definisce la funzione *generatrice* ausiliaria cubica

$$x \mapsto \phi_3(x) := f(b) - (f(x) + f'(x)(b - x) + (1/2)f''(x)(b - x)^2) - k_3(b - x)^3, \quad (17)$$

nella quale, k_3 deve essere determinata in modo da avere $\phi_3(x_0) = 0$, risultando già $\phi_3(b) = 0$. La struttura del secondo termine a destra nell'Eq. (17), (...), è quella *parabolica* di $T_{x_0}^{(2)}(x)$.

Il calcolo dell'espressione della funzione derivata $x \mapsto \phi_3'(x)$ dà

$$\phi_3'(x) = (b - x)^2(3k_3 - f'''(x)/2). \quad (18)$$

Applicando il *Teorema del Valor Medio Incrementale* a ϕ_3 , risulta, per un certo $\xi_3 \in (x_0, b)$,

$$0 \equiv \frac{\phi_3(b) - \phi_3(x_0)}{b - x_0} = \phi_3'(\xi_3) = (b - \xi_3)^2(3k_3 - f'''(\xi_3)/2). \quad (19)$$

Poiché $\xi_3 \in (x_0, b)$, l'Eq. (19) non può avere $\xi_3 = b$ come radice. Quindi, deve essere

$$k_3 = f'''(\xi_3)/6. \quad (20)$$

Dall'approssimazione (16), $\forall x \in (x_0, b)$ ($\Rightarrow \xi \mapsto \xi_3 < x$), si ottiene

$$f(x) \approx T_{x_0}^{(2)}(x) + (1/6)f'''(\xi_3)(x - x_0)^3,$$

equivalente, *definitivamente* in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, alla rappresentazione *esatta*

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{x_0}^{(3)}(x) + o(x - x_0)^3 \\ &\equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (1/2)f''(x_0)(x - x_0)^2 + \downarrow \\ &\quad \downarrow + (1/6)f'''(x_0)(x - x_0)^3 + o((dx)^3). \end{aligned} \quad (21)$$

Il simbolo (v. Fig. 1)

$$\bullet \quad T_{x_0}^{(3)}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (1/2)f''(x_0)(x - x_0)^2 + \downarrow \\ \quad \downarrow + (1/6)f'''(x_0)(x - x_0)^3 \approx f(x) \quad (22)$$

definisce il *Polinomio Cubico di Taylor* che approssima la funzione $x \mapsto f(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$. Il suo grafico (curva *cubica*) passa per il punto $K \equiv (b; T_{x_0}^{(3)}(b))$ tale che $\overline{SK} < \overline{SQ} < \overline{SR}$.

□

Il procedimento *ricorsivo* generale di costruzione dell' r -simo *Polinomio di Taylor*, $T_{x_0}^{(r)}(x)$, centrato in x_0 e relativo a una funzione f tale che $\exists f^{(r)}(x)$ in (x_0, b) , dovrebbe emergere ormai evidente: esso si basa sull'applicazione del *Teorema del Valor Medio Incrementale* a una funzione generatrice ausiliaria b -parametrica opportuna, la quale, annullandosi agli estremi dell'intervallo

compatto $[x_0, b]$, consente di determinare la costante k_r corrispondente e, mediante questa, il polinomio approssimante $T_{x_0}^{(r)}(x)$. Il confronto immediato tra i valori parametrici $k_2 = 1/2 \equiv 1/2!$, $k_3 = 1/6 \equiv 1/3!$ e $k_4 = 1/24 \equiv 1/4!$ [quest'ultimo si ottiene definendo il polinomio quartico

$$x \mapsto \phi_4(x) := f(b) - \sum_{r=0}^3 f^{(r)}(b-x)^r - k_4(b-x)^4,$$

con $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$] suggerisce, come possibile funzione *generatrice* ausiliaria n -sima,

$$x \mapsto \phi_n(x) := f(b) - \sum_{r=0}^{n-1} f^{(r)}(x)(b-x)^r - k_n(b-x)^n, \tag{23}$$

soddisfacente le *condizioni di frontiera*

$$\begin{cases} \phi_n(x_0) = 0 & (\text{imposta vs. } k_n) \\ \phi_n(b) = 0 & (\text{naturale}) \end{cases}. \tag{23.1}$$

Con queste, determinata l'equazione risolvente attesa della forma generale (cfr/c Eq. (19))

$$(b - \xi_n)^{n-1}(nk_n - f^{(n)}(\xi_n)/(n-1)!) = 0, \tag{23.2}$$

si otterrebbe la soluzione *unica* $k_n = f^{(n)}(\xi_n)/n!$, essendo $\xi_n \in (x_0, b)$. Questa congettura risulta confermata dal teorema seguente, dimostrabile facilmente *per induzione* vs. n :

Teorema di Taylor

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^{n-1}([x_0, b]) \\ \exists f^{(n)}(x) \text{ in } (x_0, b) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = T_{x_0}^{(n)}(x) + o((dx)^n),$$

dove, $\forall x \in (x_0, b) \wedge (dx)^n = O((x - x_0)^n)$, si ha

$$T_{x_0}^{(n)}(x) := \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} (x - x_0)^r. \blacktriangle \tag{24}$$

La validità *massimale* del *Teorema di Taylor* corrisponde all'esistenza della

Serie di Taylor-Maclaurin

$$\exists f^{(\infty)}(x) \text{ in } (x_0, b) \Rightarrow \exists \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} (x - x_0)^r := T_{x_0}^{(\infty)}(x) \equiv f(x), \tag{25}$$

$\forall x \in (x_0, b)$. La proprietà conseguente, $f \in \mathcal{C}^\infty((x_0, b))$, manifesta il carattere di *analiticità* (in senso *reale*) di f in (x_0, b) .

Per $x_0 \equiv 0$, la serie (25) si riduce alla celebre **Serie di Maclaurin**, $M^{(\infty)}(x) (\equiv T_{x_0=0}^{(\infty)}(x))$.

In modo equivalente, la funzione $x \mapsto f(x)$ può essere rappresentata, nell'intorno $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, come la *funzione-limite* della successione $\{T_{x_0}^{(n)}(x)\}$ *convergente (uniformemente)* di *Polinomi di Taylor* pertinenti, centrati in x_0 ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{x_0}^{(n)}(x). \tag{25.1}$$

Tali polinomi risultano gerarchizzati iterativamente secondo la struttura *nidificata*

$$T_{x_0}^{(n)}(x) = T_{x_0}^{(n-1)}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{25.2}$$

Nel caso particolare – molto importante – dei *Polinomi di Maclaurin*, l'Eq. (25.2) diventa

$$\begin{aligned} M^{(n)}(x) &\equiv T_0^{(n)}(x) = T_0^{(n-1)}(x) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv \\ &\equiv M^{(n-1)}(x) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \end{aligned} \tag{25.3}$$

■

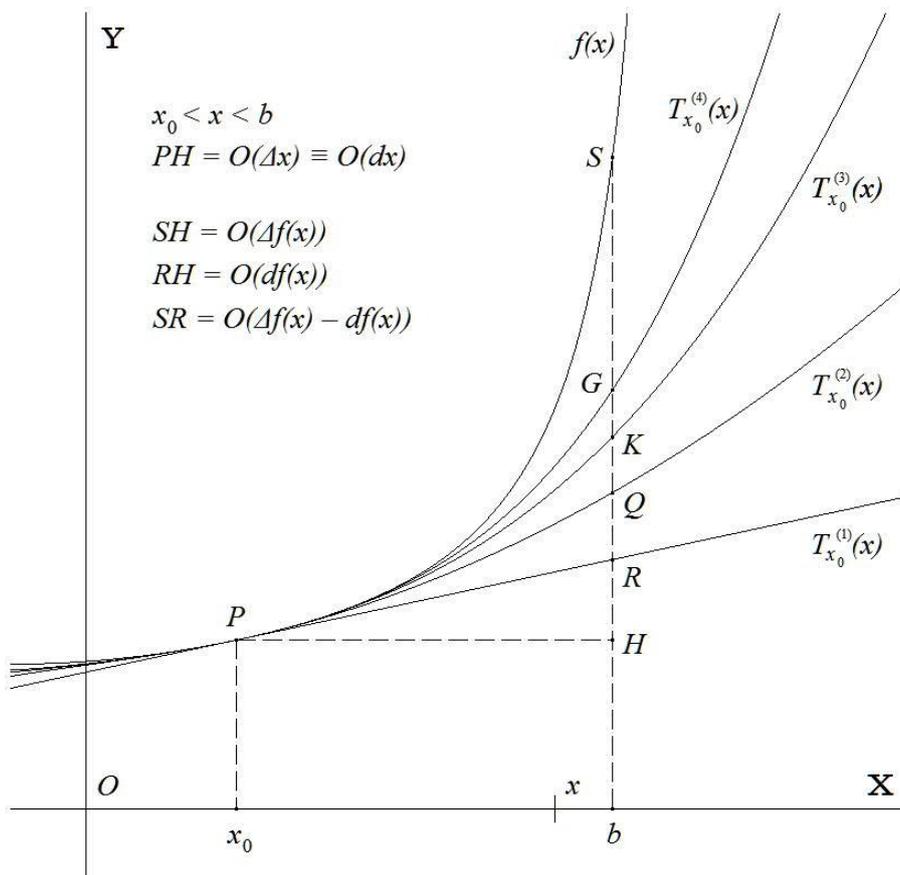


Fig. 1 – Rappresentazione grafica delle approssimazioni polinomiali à-la Taylor di $x \mapsto f(x)$ in $\mathcal{U}_{\delta^+}(x_0)$ fino al 4° ordine

Con quasi tutte le funzioni ‘fondamentali’, i *Polinomi Approssimanti di Maclaurin* $M^{(n)}(x)$ rispettivi si rivelano estremamente utili in presenza di *argomenti infinitesimi* e, quindi, nel calcolo di limiti altrimenti complicati dal carattere *razionale-fratto* o *irrazionale algebrico* o *trascendente* delle funzioni coinvolte. Infatti,

se $\alpha \equiv \alpha(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$, allora, in ogni δ -intorno (\therefore infinitesimo) $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, il *Teorema di Taylor*, Eq. (24), fissa le approssimazioni polinomiali *definitive* (asintotiche) seguenti (le sole eccezioni quasi-polinomiali (\cot , \csc , sech^{-1} , ...) richiedono *funzioni generatrici* specifiche ([†])):

$$e^\alpha \sim 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\alpha^5}{120} + \frac{\alpha^6}{720};$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^6}{6};$$

$$\cos \alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^6}{720} + \frac{\alpha^8}{40320};$$

$$\cos^{-1} \alpha \sim \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \alpha;$$

$$\sin \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^7}{5040} + \frac{\alpha^9}{362880};$$

$$\sin^{-1} \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{3}{40}\alpha^5 + \frac{5}{112}\alpha^7 + \frac{35}{1152}\alpha^9;$$

$$\tan \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\alpha^5 + \frac{17}{315}\alpha^7 + \frac{62}{2835}\alpha^9;$$

$$\tan^{-1} \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} + \frac{\alpha^9}{9};$$

$$\cot \alpha \sim \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} - \frac{2}{945}\alpha^5 - \frac{\alpha^7}{4725};$$

$$\cot^{-1} \alpha \sim \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \alpha;$$

$$\sec \alpha \sim 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{61}{720}\alpha^6 + \frac{277}{8064}\alpha^8;$$

$\sec^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\csc \alpha \sim \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{6} + \frac{7}{360}\alpha^3 + \frac{31}{15120}\alpha^5 + \frac{127}{604800}\alpha^7;$$

$\csc^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\cosh \alpha \sim 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\alpha^6}{720} + \frac{\alpha^8}{40320};$$

$\cosh^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\sinh \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} + \frac{\alpha^7}{5040} + \frac{\alpha^9}{362880};$$

$$\sinh^{-1} \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{3}{40}\alpha^5 - \frac{5}{112}\alpha^7 + \frac{35}{1152}\alpha^9;$$

$$\tanh \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\alpha^5 - \frac{17}{315}\alpha^7 + \frac{62}{2835}\alpha^9;$$

$$\tanh^{-1} \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \frac{\alpha^7}{7} + \frac{\alpha^9}{9};$$

$$\coth \alpha \sim \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \frac{2}{945}\alpha^5 - \frac{\alpha^7}{4725};$$

$\coth^{-1} \alpha$: \nexists espansione asintotica per $\alpha = o(1)$;

$$\operatorname{sech} \alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5}{24}\alpha^4 - \frac{61}{720}\alpha^6 + \frac{277}{8064}\alpha^8;$$

$$\operatorname{sech}^{-1} \alpha \sim \ln \frac{2}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{32}\alpha^4 - \frac{5}{96}\alpha^6 - \frac{35}{1024}\alpha^8;$$

$$\operatorname{csch} \alpha \sim \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{6} + \frac{7}{360}\alpha^3 - \frac{31}{15120}\alpha^5 + \frac{127}{604800}\alpha^7;$$

$$\operatorname{csch}^{-1} \alpha \sim \ln \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{32}\alpha^4 + \frac{5}{96}\alpha^6 - \frac{35}{1024}\alpha^8;$$

$$(1 + \alpha)^\eta \sim 1 + \eta\alpha + \frac{\eta(\eta-1)}{2}\alpha^2 + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{6}\alpha^3 + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)(\eta-3)}{24}\alpha^4 + \downarrow \\ \uparrow + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)(\eta-3)(\eta-4)}{120}\alpha^5 + \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)(\eta-3)(\eta-4)(\eta-5)}{720}\alpha^6, \quad \forall \eta \in \mathbb{R};$$

$$gd \alpha \sim \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{24} - \frac{61}{5040}\alpha^7 + \frac{277}{72566}\alpha^9;$$

$$gd^{-1} \alpha \sim \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{24} + \frac{61}{5040}\alpha^7 + \frac{277}{72566}\alpha^9.$$

■■■

([†]) Si veda, e.g., il math-notebook PDF dell'autore: *Determinazione di Serie di Potenze in \mathbb{R} dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler*.

Esempio 1

Indicata con $x \mapsto \beta(x)$ la *Funzione di Binet*, si calcoli il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \right).$$

Soluzione

Per $x \rightarrow 0$, il fattore (...) nell'espressione di $\beta(x)$ assume la forma di indecisione $[\infty - \infty]$. D'altra parte, con $\alpha(x) \equiv x \in \mathcal{U}_\delta(0)$, sussiste la rappresentazione razionale, ricavabile mediante \mathcal{M} -espansioni (Maclaurin),

$$\begin{aligned} \beta(x) &\equiv \frac{(x-2)e^x + x + 2}{2x^2(e^x - 1)} \\ &= \frac{(x-2)(1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + o(x^5)) + x + 2}{2x^2((1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)) - 1)} \\ &= \frac{(x^3/6)(1 + x/2 + 3x^2/20 + o(x^2))}{2x^3(1 + x/2 + x^2/6 + o(x^2))} \equiv \frac{1}{12} \frac{1 + x/2 + (3/20)x^2 + o(x^2)}{1 + x/2 + (1/6)x^2 + o(x^2)}. \end{aligned}$$

Quindi, poiché $3/20 < 1/6$, segue, definitivamente in $\mathcal{U}_{\delta^\pm}(0)$, con convergenza *lentissima*, che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \beta(x) = (1/12)^-.$$

Osservazione 3

Si noti che, per la determinazione del valore-limite di $\beta(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(0)$, la necessità di ricorrere all' \mathcal{M} -polinomio del 5° ordine per l'approssimazione di e^x appare sintomatica del profilo molto *appiattito* di *graf*(β).

Pertanto, una visualizzazione grafica soddisfacente di $\beta(x)$ richiede l'uso di una scala di misura per le ordinate *maggiore* che per le ascisse, come mostrato dalla Fig. 2.

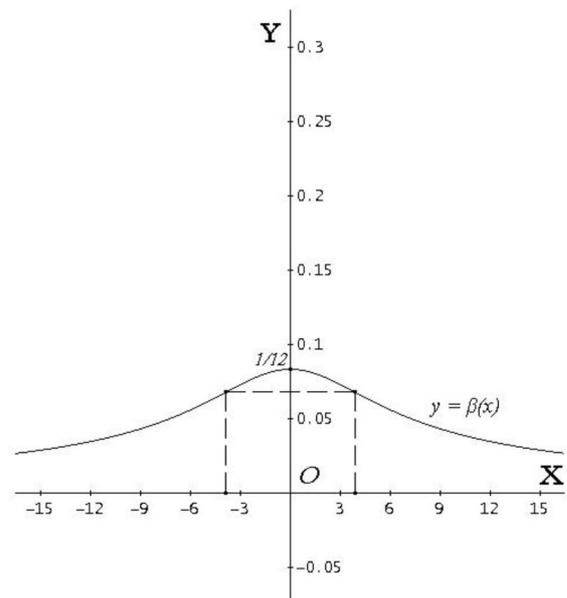
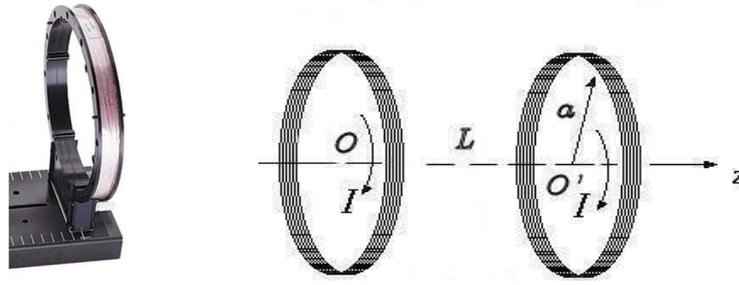


Fig. 2 – Il grafico della *Funzione di Binet*

Esempio 2

Il *Risonatore di Helmholtz* è un dispositivo costituito da due avvolgimenti solenoidali *identici* e coassiali (vs. asse Z), ciascuno formato da N ($\gg 1$) spire circolari *molto sottili* di raggio a , percorse, nello *stesso* senso, da una corrente della *stessa* intensità I . La distanza tra i centroidi dei due solenoidi è $\overline{OO'} = L$; le spire in ciascun avvolgimento sono così fitte da rendere i solenoidi sostanzialmente equivalenti ad anelli conduttori *continui* e *piatti* (v. figure seguenti).



Il calcolo della z -componente del campo vettoriale \mathbf{B} di induzione magnetica, concatenato con una corrente *stazionaria* I che fluisce in N spire circolari di raggio $r = a$, strettamente serrate e concentriche all'asse Z , è un problema standard (e.g., v. ALONSO, M., FINN, E. J., **Fundamental University Physics**, VOL. 2, P. 524, ADDISON-WESLEY PUBL. CO.). Nel caso in cui le spire sono 'sufficientemente' serrate ($\Delta z \ll a$) e l'origine del riferimento è posto nel centroide O del primo solenoide (v. le figure), per *sovrapposizione* degli effetti dei due solenoidi, si trova, in un punto $(0; 0; z)$ qualsiasi di OO' , sull'asse Z di simmetria del *risonatore*,

$$B_z(0, 0, z) \equiv B_z(z) \approx \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left(\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{((L - z)^2 + a^2)^{3/2}} \right). \quad (1.1)$$

Ora, se si assume che la funzione $z \mapsto B_z(0, 0, z) \equiv B_z(z)$ sia *derivabile* vs. z in tutto OO' quante volte necessario (nel regime non-relativistico di campi *lentamente variabili nel tempo*, tale assunzione è, in generale, corretta),

1. si approssimi $B_z(z)$ con il *polinomio di Taylor* di 4° grado, privo delle potenze di 1° , di 2° e di 3° grado (!), intorno alla posizione simmetrica $z = L/2$, 'aggiustando' il valore L vs. a (v. immagine del risonatore *a slitta*) così che risulti $B_z(z) \approx B_z(L/2)$. In altre parole, con il valore L appropriato, si trova che le correnti I generano in OO' , sull'asse di simmetria, un campo di induzione magnetica sostanzialmente *uniforme*, quasi uguale a quello generato nel punto medio di OO' ;
2. eseguiti, per comodità, i *cambiamenti di scala* $a \equiv L = 1$ e $\mu_0 N I \equiv 2$, si tracci il grafico del campo scalare $B_z(z)$ rispetto all'origine traslata nel punto medio di OO' .
Perché tale grafico appare alquanto *appiattito* in un intorno del suo *punto estremante*?

■

Soluzione

1. La \mathcal{T} -approssimazione di $B_z(z)$ al 4° ordine in un intorno di $z = L/2$,

$$B_z(z) \approx \sum_{k=0}^4 c_k (z - L/2)^k, \quad (2)$$

nella quale, i coefficienti c_k sono della forma solita

$$c_k := \frac{1}{k!} \frac{d^k B_z(z)}{dz^k}, \quad (3)$$

si scrive, esplicitamente,

$$B_z(z) \approx \frac{1}{0!} B_z(z) \Big|_{z=L/2} + \frac{1}{1!} \frac{dB_z(z)}{dz} \Big|_{z=L/2} (z-L/2) + \frac{1}{2!} \frac{d^2B_z(z)}{dz^2} \Big|_{z=L/2} (z-L/2)^2 + \downarrow \\ \downarrow + \frac{1}{3!} \frac{d^3B_z(z)}{dz^3} \Big|_{z=L/2} (z-L/2)^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4B_z(z)}{dz^4} \Big|_{z=L/2} (z-L/2)^4. \quad (4)$$

Ora, bisogna determinare il \mathcal{T} -polinomio *specifico*, nel quale siano $c_1 \equiv c_2 \equiv c_3 = 0$.

Eseguendo il calcolo formale dei coefficienti c_k necessari, si trova, *sovrapponendo gli effetti dei due avvolgimenti*,

$$c_0 \equiv \frac{1}{0!} B_z(z) \Big|_{z=L/2} = \frac{8\mu_0 N I a^2}{(L^2 + 4a^2)^{3/2}}; \quad (5)$$

$$\frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left(\frac{z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{L-z}{((L-z)^2 + a^2)^{5/2}} \right), \quad \text{da cui, risulta}$$

$$\frac{dB_z(z)}{dz} \Big|_{z=L/2} = 0, \quad \forall \{L, a\}. \quad \text{Quindi, in ogni caso, si ha}$$

$$c_1 = 0; \quad (6)$$

$$\frac{d^2B_z(z)}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left(\frac{a^2 - 4z^2}{(z^2 + a^2)^{7/2}} + \frac{a^2 - 4(L-z)^2}{((L-z)^2 + a^2)^{7/2}} \right), \quad \text{da cui, si calcola}$$

$$\frac{d^2B_z(z)}{dz^2} \Big|_{z=L/2} = 192\mu_0 N I a^2 \frac{L^2 - a^2}{(L^2 + 4a^2)^{7/2}}. \quad \text{Qui, il solo vincolo geometrico } L \equiv a \text{ dà}$$

$$c_2 = 0. \quad (7)$$

Pertanto, posto definitivamente $L \equiv a$, si determinano

$$c_0 = \frac{8\mu_0 N I}{5^{3/2} a}, \quad (8)$$

$$\frac{d^3B_z(z)}{dz^3} = \frac{15\mu_0 N I a^2}{2} \left(\frac{z(3a^2 - 4z^2)}{(z^2 + a^2)^{9/2}} - \frac{(a-z)(3a^2 - 4(a-z)^2)}{((a-z)^2 + a^2)^{9/2}} \right), \quad \text{che fornisce, } \forall a,$$

$$\frac{d^3B_z(z)}{dz^3} \Big|_{z=a/2} = 0 \quad \text{e, quindi,}$$

$$c_3 = 0. \quad (9)$$

Infine, da

$$\frac{d^4B_z(z)}{dz^4} = \frac{45\mu_0 N I a^2}{2} \left(\frac{8z^4 - 12a^2z^2 + a^4}{(z^2 + a^2)^{11/2}} + \frac{8(a-z)^4 - 12a^2(a-z)^2 + a^4}{((a-z)^2 + a^2)^{11/2}} \right), \quad \text{si calcola}$$

$$\frac{d^4B_z(z)}{dz^4} \Big|_{z=a/2} = -\frac{27648}{5^{11/2}} \frac{\mu_0 N I}{a^5} \equiv -\frac{2^{10} \cdot 3^3}{5^{11/2}} \frac{\mu_0 N I}{a^5} \equiv c_4 \cdot 4!, \quad \text{ricavando}$$

$$c_4 = -\frac{2^7 \cdot 3^2}{5^{11/2}} \frac{\mu_0 N I}{a^5}. \quad (10)$$

Pertanto, il \mathcal{T} -polinomio approssimante richiesto, soggetto al *vincolo geometrico* $L \equiv a$, si scrive

$$B_z(z) \approx B_z(a/2) + \frac{1}{4!} \frac{d^4 B_z(z)}{dz^4} \Big|_{z=a/2} (z - a/2)^4 =$$

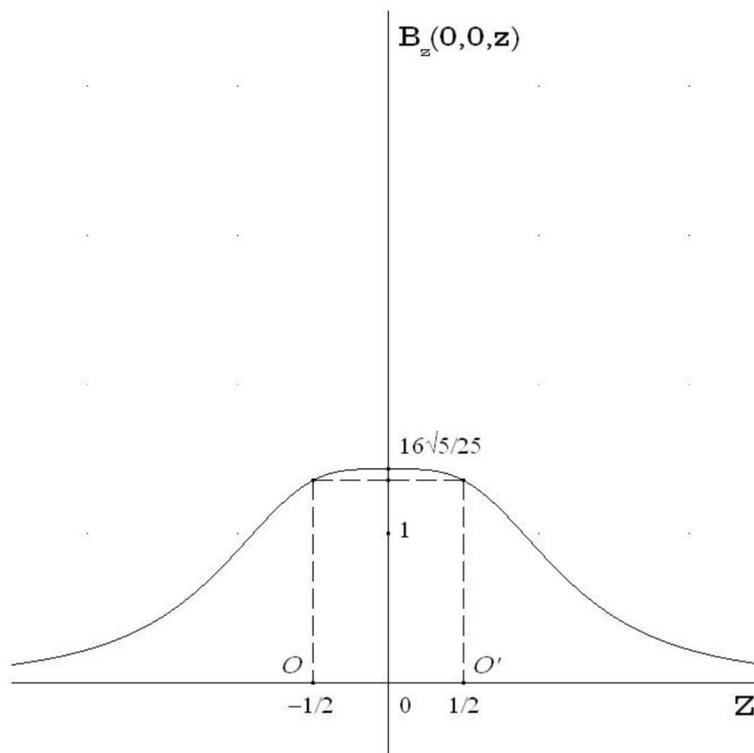
$$= \frac{8\mu_0 NI}{5^{3/2} a} - \frac{2^7 \cdot 3^2 \mu_0 NI}{5^{11/2} a^5} (z - a/2)^4 = \frac{8\mu_0 NI}{5^{3/2} a} \left(1 - \frac{144}{125} (z/a - 1/2)^4 \right). \quad (11)$$

L'assenza delle variazioni di campo di ordine 1, 2 e 3 consente una precisione notevole nel controllo di $B_z(z)$ che, sostanzialmente, appare variabile in modo significativo (in OO') solo attraverso il valore di I . È difficile sottovalutare l'importanza sperimentale dell'effetto!

2. Con i *cambiamenti di scala* suggeriti, $a = L = 1$ e $\mu_0 NI \equiv 2$, e la traslazione dell'origine delle coordinate nel punto medio di OO' , l'espressione di $B_z(z)$ diventa

$$B_z(z) \approx \frac{1}{((z + 1/2)^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{((z - 1/2)^2 + 1)^{3/2}},$$

prevedibilmente, quella di una funzione *pari*, il cui grafico, normalizzato vs. il complesso dei parametri circuitali, è mostrato qui di seguito:



L'effetto di appiattimento del grafico in corrispondenza del suo punto di massimo stazionario, l'origine, manifesta l'annullamento delle derivate 1^a, 2^a e 3^a nel suo intorno di diametro 1. Così, il \mathcal{T} -termine di ordine 0 – *costante* – contribuisce in modo *dominante* alla definizione *locale* della funzione, appiattendone il grafico.

■■■

Convessità\Concavità (Curvatura) di $\text{graf}(f)$ Punti di Flesso e Punti Cuspidali

La discussione di eventuali, cosiddetti, *punti di flesso* di $\text{graf}(f)$ a tangente *non-verticale* (i.e., *obliqua* od *orizzontale*) trova un ambito naturale nella teoria dei \mathcal{T} -*Polinomi approssimanti*. Il punto di partenza è l'Eq. (14):

1. sia $f''(x_0) \geq 0$.

Allora, in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, $\exists T_{x_0}^{(2)}(x)$ e, dall'Eq. (14), risulta *definitivamente* (v. Fig. 5-a)

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

i.e., $f(x)$ è *convessa* in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, poiché $\text{graf}(f)$ si trova, localmente, *non al di sotto* di quello della sua retta tangente in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ (retta corrispondente a $y = T_{x_0}^{(1)}(x)$).

Analogamente,

2. sia $f''(x_0) \leq 0$.

Allora, in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, $\exists T_{x_0}^{(2)}(x)$ e, dall'Eq. (14), risulta *definitivamente* (v. Fig. 5-b)

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

i.e., $f(x)$ è *concava* in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, poiché $\text{graf}(f)$ si trova, localmente, *non al di sopra* di quello della sua retta tangente in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ (retta corrispondente a $y = T_{x_0}^{(1)}(x)$).

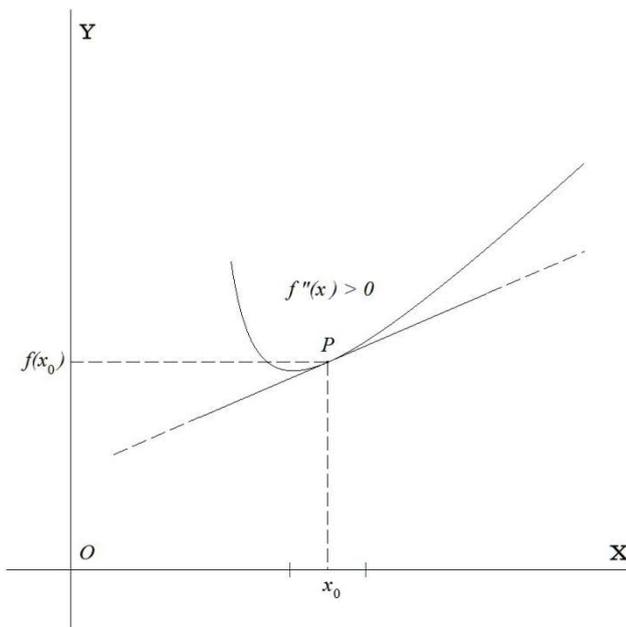


Fig. 5-a – Convessità di $\text{graf}(f)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$

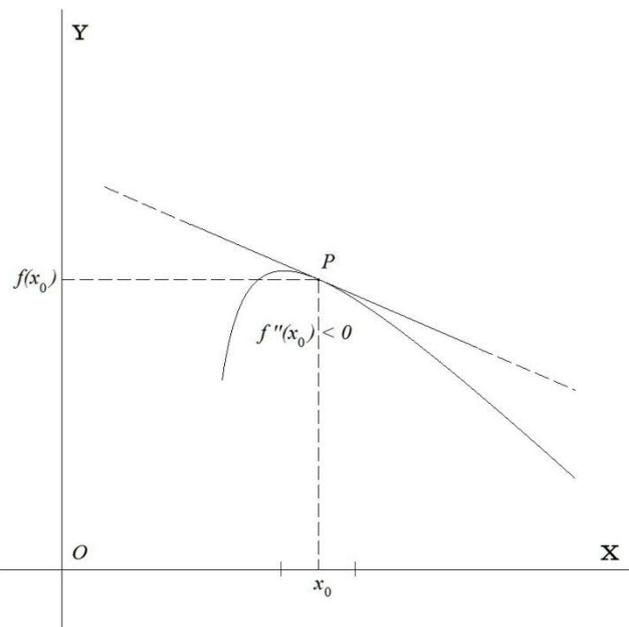


Fig. 5-b – Concavità di $\text{graf}(f)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$

Anche dall'esemplificazione grafica precedente, trova fondamento il teorema seguente, molto utile nelle applicazioni allo studio di funzioni:

Teorema

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists f''(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \\ f \text{ convessa } \underline{\vee} \text{ concava in } \mathcal{U}_\delta(x_0) \end{array} \right\} \iff f''(x) \geq 0 \underline{\vee} \leq 0, \text{ rispettivamente, in } \mathcal{U}_\delta(x_0). \blacktriangle$$

I *punti di flesso* di $\text{graf}(f)$ corrispondono al cambiamento *locale* di concavità \Leftrightarrow convessità di $\text{graf}(f)$. Se, attraverso $x = x_0$, $\text{graf}(f)$ passa

- da *convesso* a *concavo*, i.e., $f''(x)$ passa da > 0 a < 0 , allora, $x = x_0$ è un punto di flesso *discendente* di $\text{graf}(f)$;
- da *concavo* a *convesso*, i.e., $f''(x)$ passa da < 0 a > 0 , allora, $x = x_0$ è un punto di flesso *ascendente* di $\text{graf}(f)$.

Quanto precede è riassumibile, formalmente, nella

Proposizione

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^\mp} f''(x) = 0^\mp$ o 0^\pm , allora, $x = x_0$ è un'ascissa, rispettivamente, di flesso *ascendente* o *discendente* a tangente *non-verticale* (obliqua od orizzontale). \blacktriangle

Nel trattamento dei *punti di flesso* a tangente *verticale*, come pure dei *punti cuspidali*, di $\text{graf}(f)$, il Teorema precedente, vs. il passaggio di x attraverso x_0 , va modificato nel modo seguente:

Teorema*

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}_\delta(x_0)) \\ \exists f'(x) \text{ in } \mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^\mp} f'(x) = \infty \text{ (dell'uno o dell'altro segno)} \end{array} \right\} \iff f''(x) \underset{x_0}{\gtrless} 0 \iff f''(x) \begin{cases} \lesssim 0 & \text{(flesso)} \\ \gtrsim 0 & \text{(cuspidale)} \end{cases} \cdot \blacktriangle$$

Chiaramente, poiché $x_0 \notin \mathcal{D}_{f'}$, allora, $x_0 \notin \mathcal{D}_{f''}$. Un controllo della *curvatura* (\dagger) di $\text{graf}(f)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, dal *segno* dei valori-limite *infiniti* di $f'(x)$, porta alle conclusioni appropriate, i.e., a riconoscere se $x = x_0$ sia un'ascissa di *flesso* a tangente *verticale* o un'ascissa di *minimo* o di *massimo cuspidale* locale.

Entrando nei dettagli e assumendo che $f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}_\delta(x_0))$, sono quattro le condizioni *necessarie* e *sufficienti* che possono presentarsi per $\text{graf}(f)$:

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty \quad \wedge \\ f''(x) \text{ cambia da } > 0 \text{ a } < 0 \text{ attraverso } x_0 \end{array} \right\} \iff x = x_0 \text{ è un'ascissa di flesso discendente a tangente verticale;}$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty \quad \wedge \\ f''(x) \text{ cambia da } < 0 \text{ a } > 0 \text{ attraverso } x_0 \end{array} \right\} \iff x = x_0 \text{ è un'ascissa di } \textit{flesso ascendente} \text{ a}$$

tangente *verticale*;

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty \quad \wedge \\ f''(x) < 0 \text{ in } \mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \end{array} \right\} \iff x = x_0 \text{ è un punto di } \textit{minimo cuspidale} \text{ locale;}$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty \quad \wedge \\ f''(x) > 0 \text{ in } \mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \end{array} \right\} \iff x = x_0 \text{ è un punto di } \textit{massimo cuspidale} \text{ locale.}$$

Le considerazioni precedenti trovano un adattamento immediato al caso di un *punto angoloso* di $\textit{graf}(f)$ per $x = x_0$, dove, *solo uno* dei valori unilaterali, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ o $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ sia $\pm\infty$.

■

(†) La funzione *curvatura* di f , in rappresentazione *cartesiana*, è definita da $x \mapsto \kappa(x) := \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$.

È evidente che $\textit{sgn}(\kappa(x)) \equiv \textit{sgn}(f''(x)) \quad \forall x$, in accordo completo con la proprietà di *convessità*\con*cavità*.

Proposizione

La retta *tangente* in un punto di flesso di $\text{graf}(f)$ o di cuspide è, *necessariamente*, anche *secante* a $\text{graf}(f)$ in tale punto, v. Fig. 6-a e 6-b. ▲

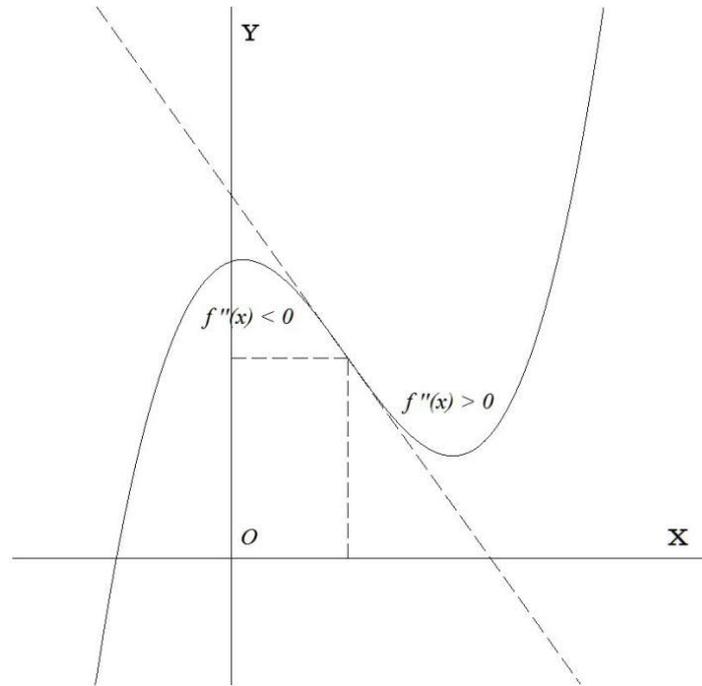


Fig. 6-a – La retta *tangente*\secante a $\text{graf}(f)$ in un *punto di flesso*

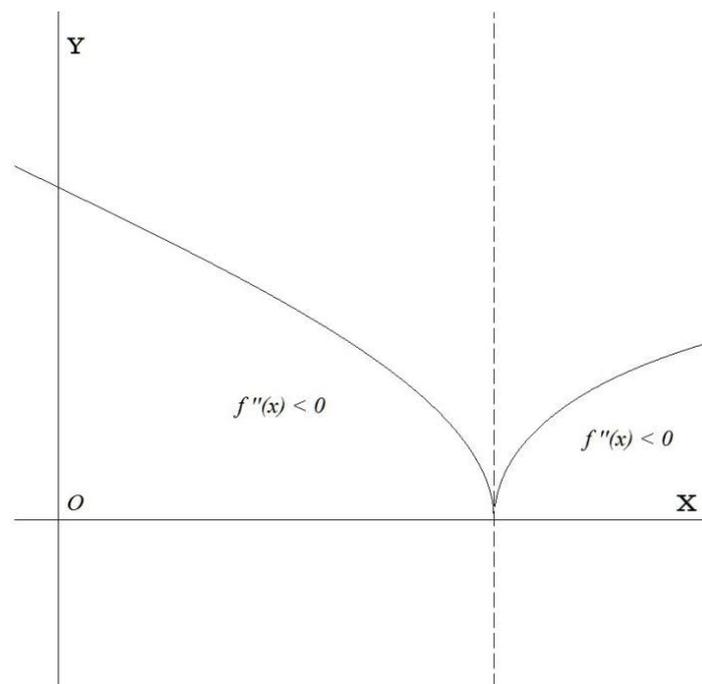


Fig. 6-b – La retta *tangente*\secante a $\text{graf}(f)$ in un *punto di cuspide*

■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [4], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: https://www.cm-phymath.net/libr_page.html.

- [1] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, **1**, ZANICHELLI (-MASSON) (1991; RIST. 1998);
- [2] GIUSTI, E., *Analisi Matematica*, **1**, 2^A ED., BOLLATI-BORINGHERI (1989; RIST. 1995);
- [3] BAROZZI, G. C. - MATARASSO, S., *Analisi Matematica 1*, ZANICHELLI (1986; 8^A RIST. 1997);
- [4] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3RD ED., MCGRAW-HILL, INC. (1976);
- [5] LOOMIS, L. H. - STERNBERG, S., *Advanced Calculus*, 2ND ED., JONES & BARTLETT PUBL.S (1990);
- [6] APOSTOL, T. M., *Calculus*, 2ND ED., VOL. **I**, P. 180-188, JOHN WILEY & SONS, INC. (1969);
- [7] WIDDER, D. V., *Advanced Calculus*, 2ND ED., CH. 12, PRENTICE-HALL, INC. (1961; REPR. 1964);
- [8] THOMAS, G. B., JR. - WEIR, M. D. - HASS, J., *Thomas' CALCULUS: Early Transcendentals*, 12TH ED., PEARSON (ADDISON-WESLEY PUBL. CO.) (2004);
- [9] WREDE, R. C. - SPIEGEL, M. R., *Advanced Calculus*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 3RD ED., MCGRAW-HILL (2010). □
- [10] KLINE, M., *Storia del pensiero matematico*, VOLL. **I** & **II** [*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (1972)], EINAUDI, 3^A ED. (1999). □

■■■