

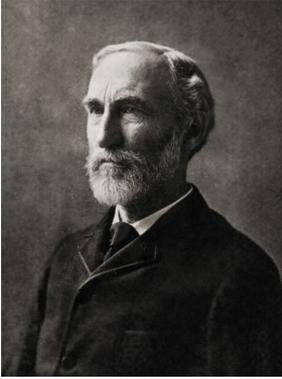
# Operazioni Vettoriali

avanzate in  $\mathbb{R}^3$

claudio magno

[www.cm-physmath.net](http://www.cm-physmath.net)

revisione  
13 agosto 2022



**Josiah Willard Gibbs (1839-1903)**

## INDICE

<b>INTRODUZIONE</b>	P. III
ALGEBRA VETTORIALE ELEMENTARE	P. IV
<b>OPERAZIONI VETTORIALI AVANZATE IN <math>\mathbb{R}^3</math></b>	P. 1
IL TRI-PRODOTTO SCALARE	P. 2
IL TRI-PRODOTTO VETTORIALE	P. 4
LA TERNA VETTORIALE RECIPROCA	P. 7
APPLICAZIONI ALGEBRICHE ULTERIORI	P. 9
ESERCIZI I	P. 10
<b>OPERAZIONI VETTORIALI DIFFERENZIALI</b>	P. 11
RICHIAMI SULLE DERIVAZIONI VS. COORDINATE VETTORIALI RELATIVE	P. 14
ESERCIZI II	P. 16
<b>OPERAZIONI VETTORIALI INTEGRALI</b>	P. 17
PRELIMINARI AI PROCEDIMENTI INTEGRO-VETTORIALI DI CALCOLO	P. 17
I. INTEGRALI CURVILINEI	P. 19
II. INTEGRALI DI SUPERFICIE	P. 18
III. INTEGRALI DI VOLUME	P. 19
IL TEOREMA DI GAUSS	P. 21
IL TEOREMA DI STOKES	P. 23
IL 1° TEOREMA DI GREEN	P. 25
IL 2° TEOREMA DI GREEN	P. 25
IL 3° TEOREMA DI GREEN	P. 27
<b>PROPRIETÀ VETTORIALI DEI CAMPI POTENZIALI</b>	P. 27
IL POTENZIALE SCALARE	P. 28
CAMPI VETTORIALI IRROTAZIONALI	P. 28
IL POTENZIALE VETTORE	P. 29
CAMPI VETTORIALI SOLENOIDALI	P. 29
CONDIZIONE SUFFICIENTE DI UNICITÀ DI UN CAMPO VETTORIALE (TEOREMA)	P. 29
IL TEOREMA DI HELMHOLTZ	P. 32
ESERCIZI III	P. 34
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	P. 36

## INTRODUZIONE

Partendo dalla percezione più immediata e spontanea di *vettore*, e.g., quella associata al *trascinamento spaziale* di un punto attraverso la sequenza *rettilenea e continua* delle sue posizioni istantanee successive, interne a un certo *volume* 3D rappresentativo, si osserva che le coordinate identificative del punto corrispondono al set di variabili indipendenti che descrivono il modello di ‘come interagisce’ un sistema e, dunque, di come le *proprietà* del sistema stesso vengono ‘trasportate’ o ‘propagate’ (nel senso di GREEN (GEORGE, 1793-1841)).

Pertanto, i vettori risultano, necessariamente, soggetti al *calcolo analitico*: limiti, differenziali, integrali, manipolazioni algebriche, tensoriali e combinazioni operatoriali conseguenti; da oggetti geometrici elementari, i segmenti rettilinei orientati, evolvono in funzioni e funzionali ‘orientati’, per i quali, e.g., concetti come *prodotto* e *ortogonalità* devono essere generalizzati in spazi opportuni (e.g., di HILBERT (DAVID, 1862-1943)) e rivisti profondamente.

Queste note cercano di offrire in forma sintetica e, sperabilmente, coerente, temi e argomenti reperibili da testi di Analisi Matematica, di Geometria Differenziale e di Fisica Teorica a livello intermedio/avanzato. Dopo un richiamo sintetico alle proprietà vettoriali elementari, la mia esposizione vorrebbe mettere in pratica (non so con quale riuscita) la lezione di stile sobrio e lucido di GIBBS (JOSIAH WILLARD, 1839-1903), fisico-chimico e ingegnere, un maestro taciturno, non popolare abbastanza come ritengo meriterebbe, ma grandissimo e, per questo, sempre (e inevitabilmente) imitato. I temi di riferimento sono quelli canonici da ricordare (e su cui esercitarsi), fino alla soglia delle teorie di Campo Classico e delle Distribuzioni (e.g., del funzionale  $\delta$  di Dirac).

## **Algebra vettoriale elementare**

### Scritture, simboli e teoremi semplici

1. *Norma* di un vettore  $\mathbf{a}$  (o *valore assoluto* o *lunghezza* o *misura* o *intensità* di  $\mathbf{a}$ ):

$$\|\mathbf{a}\|;$$

2. *retta di direzione* di un vettore  $\mathbf{a}$  (*ambiguità* del verso di  $\mathbf{a}$  vs. tale retta):

$$r_a;$$

3. prodotto di un vettore  $\mathbf{a}$  per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  (prodotto di  $\|\mathbf{a}\|$  per  $\lambda$ , *stessa* direzione di  $\mathbf{a}$  se  $\lambda > 0$ , *inversione* vs.  $\mathbf{a}$  se  $\lambda < 0$ , *norma nulla* e verso *indeterminato* se  $\lambda = 0$ ):

$$\lambda \mathbf{a};$$

4. *versori* (vettori di *norma unitaria*, puramente *geometrici*, i.e., *privi* di dimensione fisica):

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a}, \quad \|\hat{\mathbf{a}}\| = 1;$$

5. *proiezione scalare algebrica* di un vettore  $\mathbf{a}$  su una retta ( $\varphi$  convesso, i.e.,  $\varphi \in [0, \pi]$ ):

$$\|\mathbf{a}\| \cos \varphi (\geq 0);$$

6. componenti *longitudinale* e *trasversale* di un vettore  $\mathbf{a}$  vs. una retta (direzione) assegnata:

$$\mathbf{a}_{\parallel}, \quad \mathbf{a}_{\perp};$$

7. vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  *equivalenti per traslazione* (Criterio di CHASLES (MICHEL, 1793-1880)):

- $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ ,
- rette di direzione  $r_a$  e  $r_b$  *parallele* (anche *coincidenti*),
- *code* poste sulla stessa retta di *sezione* del piano  $\Pi(r_a, r_b)$ ,
- *punte* di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  poste nello *stesso* semipiano (al limite, sulla *stessa* direzione  $r$ ).

Si noti che, anche in uno spazio euclideo 3-dim,  $\exists!$  *generalmente* il piano contenente  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ ;

8. *prodotto scalare* di due vettori (*code coincidenti* (!),  $\varphi \equiv \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$  convesso):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| \cos 0 = \|\mathbf{a}\|^2;$$

9. *commutatività* dei fattori vettoriali nel prodotto scalare (proiezione di un vettore sulla retta di direzione dell'altro):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\|\mathbf{a}\| \cos \varphi) \|\mathbf{b}\| \equiv (\|\mathbf{b}\| \cos \varphi) \|\mathbf{a}\| \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

10. *Teorema di Carnot* (o *del coseno*) per un triangolo vettoriale *qualsiasi* (vettori in sequenza chiusa *punta-coda*):

$$\begin{aligned} \|\pm(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})\|^2 &\equiv \|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \pm 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi \\ &\equiv \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

( $\varphi \equiv \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$  convesso e *code coincidenti*). Si osservi che  $\cos \varphi \equiv -\cos(\pi - \varphi)$ );

11. *Teorema di Euler* (o *del seno*) per un triangolo vettoriale *qualsiasi*  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  (vettori in sequenza chiusa *punta-coda*):

$$\frac{\|\mathbf{a}\|}{\sin \alpha} = \frac{\|\mathbf{b}\|}{\sin \beta} = \frac{\|\mathbf{c}\|}{\sin \gamma},$$

con  $\alpha$  opposto ad  $\mathbf{a}$ ,  $\beta$  opposto a  $\mathbf{b}$ ,  $\gamma$  opposto a  $\mathbf{c} \equiv \pm(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})$ ;

12. *Teoremi per un triangolo rettangolo vettoriale* (vettori in sequenza chiusa *punta-coda*):

Se  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \wedge \psi \equiv \sphericalangle(\mathbf{a}, \pm(\mathbf{a} + \mathbf{b}))$  nel triangolo *rettangolo* vettoriale  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \pm(\mathbf{a} + \mathbf{b})\}$ , allora,

$$\|\mathbf{a}\| = \|\pm(\mathbf{a} + \mathbf{b})\| \cos \psi = \|\mathbf{b}\| \cot \psi,$$

$$\|\mathbf{b}\| = \|\pm(\mathbf{a} + \mathbf{b})\| \sin \psi = \|\mathbf{a}\| \tan \psi;$$

13. *Norma del prodotto vettoriale equivalente all'area del parallelogramma vettoriale*  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \varphi\}$ , con  $\varphi \equiv \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$  convesso e code di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  coincidenti:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| := \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi \equiv S.$$

Da questo, segue che l'*area del triangolo vettoriale*  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \pm(\mathbf{a} - \mathbf{b})\}$  è data da

$$S/2 = (1/2) \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi \equiv (1/2) \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|;$$

14. *Rappresentazione vettoriale di una superficie piana finita qualsiasi*  $\Sigma$  di area  $S (> 0)$ :

$$\mathbf{S} = S \hat{\mathbf{n}},$$

con  $\hat{\mathbf{n}} \perp \Sigma$ ,  $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$  e verso di  $\hat{\mathbf{n}}$  definito *eretto* o *capovolto* secondo che, osservando  $\Sigma$ , il suo bordo  $\partial\Sigma$  venga percorso in senso *anti-orario* (+) od *orario* (-);

15. *Volume del parallelepipedo vettoriale*  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  come *valore assoluto* di un determinante:

$$\begin{aligned} V = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}| &\equiv |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| \equiv \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right| \\ &\equiv |\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}| \equiv |\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}|, \end{aligned}$$

I valori  $a_j, b_j$  e  $c_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sono le componenti *algebriche* degli spigoli vettoriali  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  espresse in un sistema *ordinato qualsiasi* di coordinate *ortogonali* (e.g.,  $a_1 \equiv a_x, a_2 \equiv a_y, a_3 \equiv a_z$ ;  $a_1 \equiv a_r, a_2 \equiv a_\theta, a_3 \equiv a_\varphi$ ;  $a_1 \equiv a_\rho, a_2 \equiv a_\varphi, a_3 \equiv a_z$ ).

■■■

# Operazioni Vettoriali avanzate in $\mathbb{R}^3$

## Il Tri-prodotto Scalare

Si definisce *tri-prodotto scalare* (o *prodotto misto* di vettori), in breve, *t-ps*, sulla terna *ordinata*  $\{A, B, C\}$  di vettori in  $\mathbb{R}^3$  la quantità *scalare*

$$A \cdot B \times C. \quad (1)$$

La notazione vettoriale (1) è *non-ambigua* poiché  $(A \cdot B) \times C$ , prodotto *vettoriale* di uno scalare per un vettore, *non* è definito. Pertanto, le parentesi intorno a  $B$  e  $C$  sono *superflue*.

Geometricamente, il *t-ps*  $A \cdot B \times C$  corrisponde al volume,  $V$ , del parallelepipedo di spigoli  $A$ ,  $B$  e  $C$  quando risulta  $A \cdot B \times C \geq 0$ , i.e., quando la terna vettoriale *ordinata*  $\{A, B, C\}$  è *non-negativa*, altrimenti, corrisponde al valore  $-V$ .

Infatti, definiti  $\widehat{AB}$  *convesso*,  $S := B \times C$  e  $S := \|S\| \equiv \|B \times C\| = \|B\| \|C\| |\sin \widehat{BC}|$ , l'area del parallelogramma di lati (vettoriali) adiacenti  $B$  e  $C$  vale  $S$ . Poi, se  $h$  è la misura dell'altezza del parallelepipedo, allora  $h \equiv \|A\| |\cos \widehat{AS}|$ . Quindi, il volume del parallelepipedo è dato da

$$V = hS = \|A\| \|S\| \cos \widehat{AS} \equiv |A \cdot B \times C|. \quad (2)$$

Comunque, in generale, è

$$V = |A \cdot B \times C| \equiv |\det(A, B, C)|. \quad (2.1)$$

E.g., il *volume cartesiano caratteristico* (od *orto-volume*, ottenuto dai tre versori assiali) si scrive

$$V_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}} \equiv \hat{x} \cdot \hat{y} \times \hat{z} \equiv \hat{z} \cdot \hat{x} \times \hat{y} \equiv \hat{y} \cdot \hat{z} \times \hat{x} = 1. \quad (2.2)$$

In coordinate *ortogonali qualsiasi*, si verifica la *proprietà ciclica generale*

$$A \cdot B \times C = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \equiv C \cdot A \times B \equiv B \cdot C \times A, \quad (3)$$

dall'invarianza del segno di un determinante in un numero *pari* di scambi di righe o di colonne.

Ovviamente, l'*anti-commutatività* del prodotto vettoriale ordinario genera le identità equivalenti

$$A \cdot B \times C \equiv -A \cdot C \times B \equiv -C \cdot B \times A \equiv -B \cdot A \times C. \quad (3.1)$$

Inoltre, nell'Eq. (3), poiché  $C \cdot A \times B \equiv A \times B \cdot C$ , la *commutatività* del prodotto scalare ordinario determina l'*identità fondamentale* del *t-ps*,

$$A \cdot B \times C \equiv A \times B \cdot C, \quad (4)$$

i.e., le operazioni di prodotto scalare e di prodotto vettoriale contenute in un *t-ps* commutano tra loro *conservando l'ordinamento dei vettori*. Tale invarianza operativa espressa dall'Idn. (4) è, talvolta, indicata con la notazione (scalare) sintetica,

$$A \cdot B \times C := [A B C]. \quad (4.1)$$

Quindi, le Idn. (3) e (3.1) danno luogo alla catena di rappresentazioni equivalenti di  $\pm V$ ,

$$[A B C] \equiv [C A B] \equiv [B C A] \equiv -[A C B] \equiv -[C B A] \equiv -[B A C]. \quad (4.2)$$

**Proposizione 1**

I vettori  $A, B$  e  $C$  sono complanari sse ( $\equiv se e solo se$ )

$$[A B C] = 0. \quad (5)$$

La condizione di *complanarità* (5) è ovvia, tenuto conto, dall'Eq. (2.1), che  $[A B C] = \pm V$ .

**Corollario 1**

Se *due* dei tre vettori di un t-ps sono paralleli, tale prodotto è *nullo*. Quindi,  $\forall \kappa \in \mathbb{R}$ , si ha

$$[A B \kappa B] \equiv 0. \quad (6)$$

La verifica è immediata, dalle Idn. (3) e (3.1).

**Teorema 1**

Siano  $A$  e  $B$  vettori *non-paralleli* in  $\mathbb{R}^3$ , i.e., sia  $|\sin \widehat{AB}| \in (0, 1]$  ( $\widehat{AB}$  convesso).

Condizione necessaria e sufficiente affinché i vettori  $A, B$  e  $C$  siano complanari è che  $C$  sia rappresentabile *in modo unico* come *combinazione lineare* di  $A$  e  $B$ , i.e., che

$$[A B C] \equiv 0 \iff \exists! \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}: C = \alpha A + \beta B. \blacktriangle \quad (7)$$

**Dimostrazione****Necessità:**

Sia la coppia numerica  $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$  (l'unica) tale che  $C = \alpha A + \beta B$ . Allora, dall'Idn. Fondamentale (4) e dal Corollario 1, risulta

$$\begin{aligned} A \cdot B \times C &\equiv A \times B \cdot (\alpha A + \beta B) \\ &\equiv A \times B \cdot \alpha A + A \times B \cdot \beta B = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

i.e., per la Proposizione 1,  $A, B$  e  $C$  sono complanari;

**Sufficienza:**

Esistono infinite scomposizioni *piane* di  $C$ , tutte costruibili *con continuità*. Allora, anche  $C = \tilde{A} + \tilde{B}$  è compresa tra esse, con  $\tilde{A} = \alpha A \wedge \tilde{B} = \beta B \wedge \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ .

Per mostrare che la coppia  $\{\alpha, \beta\}$  è unica, si supponga, per assurdo, che ne esista anche un'altra,  $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ , tale che  $C = \bar{\alpha} A + \bar{\beta} B$ .

Pertanto, si avrebbe che  $\alpha A + \beta B = C = \bar{\alpha} A + \bar{\beta} B$ , i.e., che  $(\alpha - \bar{\alpha}) A + (\beta - \bar{\beta}) B = 0$  ma, essendo  $A$  e  $B$  non-paralleli, risulta che  $\alpha \equiv \bar{\alpha} \wedge \beta \equiv \bar{\beta}$  simultaneamente, q. e. d. .

■

## Il Tri-prodotto Vettoriale

Si definisce *tri-prodotto vettoriale* o, brevemente, t-pv, sulla terna *ordinata*  $\{A, B, C\}$  di vettori in  $\mathbb{R}^3$  sia l'una che l'altra delle quantità *vettoriali*

$$A \times (B \times C) \equiv (C \times B) \times A, \quad (8)$$

$$(A \times B) \times C \equiv C \times (B \times A). \quad (9)$$

La specificazione *doppia* per il t-pv sta nella sua *non-associatività*, i.e., nel fatto che, in generale,

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C. \quad (10)$$

Per questa ragione, quando sia necessario distinguerli, il t-pv (8) può essere indicato come *destro*, i.e., t-pvd, mentre il t-pv (9) come *sinistro*, i.e., t-pvs. Comunque, si può passare dall'una all'altra rappresentazione *invertendo l'ordinamento iniziale* della terna mediante lo scambio  $A \rightleftharpoons C$ .

### Proposizione 2

Per il t-pvd (in  $\mathbb{R}^3$ ), vale l'*identità fondamentale*

$$A \times (B \times C) \equiv (A \cdot C)B - (A \cdot B)C. \quad \blacktriangle \quad (11)$$

*Dimostrazione*

Se uno qualsiasi dei vettori  $A, B$  o  $C$  è il vettore  $0$ , allora, l'Idn. (11) è banalmente vera. Se  $B$  e  $C$  sono paralleli, allora,  $B = \kappa C$ , con  $\kappa \in \mathbb{R}$ , e l'Idn. (11) è ancora soddisfatta, riducendosi a  $0 \equiv 0$  anche in questo caso.

Pertanto, è sufficiente assumere che  $A, B$ , e  $C$  siano vettori *non-nulli* e che  $B$  e  $C$  *non* siano paralleli.

Si costruisca il t-ps, *nullo* per il Corollario 1,

$$0 \equiv (B \times C) \cdot A \times (B \times C) \equiv B \times C \cdot [A \times (B \times C)],$$

dove, la seconda forma associativa equivalente indica che i vettori  $B, C$  e  $A \times (B \times C)$  sono complanari. Allora, il Teorema 1 stabilisce l'esistenza di un'unica coppia numerica  $\{\mu, \nu\} \subset \mathbb{R}$  tale che

$$A \times (B \times C) = \mu B - \nu C. \quad (12)$$

Eseguendo il prodotto scalare per  $A$  dei termini nei membri dell'uguaglianza (12), si ha

$$A \cdot (\mu B - \nu C) = A \cdot A \times (B \times C) = 0, \quad (13.1)$$

ancora per il Corollario 1. Dunque,

$$\mu A \cdot B - \nu A \cdot C = 0. \quad (13.2)$$

Circa l'Eq. (13.2), se  $A$  è ortogonale a  $B$  (i.e.,  $A \cdot B = 0$ ), segue l'ortogonalità di  $A$  anche con  $C$ , e viceversa. In altri termini,  $A$  risulta ortogonale al piano generato da  $B$  e da  $C$  o, in modo equivalente,  $A$  è parallelo a  $B \times C$ . Tale circostanza implica che  $A \times (B \times C) = 0$ , così che l'Idn. (11) risulta ancora banalmente verificata.

Invece, siano  $A \cdot B \neq 0 \wedge A \cdot C \neq 0$ . Allora, l'Eq. (13.2) definisce il parametro

$$\eta := \mu / (A \cdot C) = \nu / (A \cdot B),$$

con il quale, dalle uguaglianze  $\mu = \eta A \cdot C$  e  $\nu = \eta A \cdot B$ , si riscrive l'Eq. (12) nella forma

$$A \times (B \times C) = \eta((A \cdot C)B - (A \cdot B)C). \quad (14)$$

Per determinare il valore di  $\eta$ , si scelga il vettore ausiliario  $Z$ , ortogonale a  $C$  (i.e.,  $C \cdot Z \equiv 0$ ) e *complanare* a  $B$  e a  $C$  (i.e.,  $[B C Z] = 0$ ), tale da definire la terna *ordinata, ciclica e positiva* di vettori  $\{C, B \times C, Z\}$  e selezionare  $\widehat{BC} \in (0, \pi)$  ( $\widehat{BC}$  indica sia l'*angolo* che la sua *misura*). Costruendo il prodotto scalare per  $Z$  di ciascuno dei termini nei membri dell'Eq. (14), si ottiene

$$(A \times (B \times C)) \cdot Z = \eta((A \cdot C)(B \cdot Z) - \cancel{(A \cdot B)(C \cdot Z)})$$

e, quindi, per la *proprietà fondamentale* del t-ps, Eq. (4), risulta

$$A \times (B \times C) \cdot Z \equiv A \cdot (B \times C) \times Z = \eta(A \cdot C)(B \cdot Z). \quad (15)$$

Poiché  $[B C Z] = 0$  (complanarità vettoriale), si ha che  $(B \times C) \times Z$  è *complanare* a  $B$  e a  $C$  ed è *ortogonale* a  $Z$ . Dunque,  $(B \times C) \times Z$  è parallelo a  $C$ ; inoltre,  $\{C, B \times C, Z\}$  è una terna costituita da vettori *mutuamente ortogonali*. Allora,  $\exists \omega \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$(B \times C) \times Z = \omega C. \quad (16)$$

A sua volta, all'Eq. vettoriale (16) corrisponde lo scalare equivalente

$$\|(B \times C) \times Z\| = \|B\| \|C\| \|Z\| \sin \widehat{BC} = \omega \|C\|$$

( $\widehat{BC}$  *convesso*), da cui si deduce sequenzialmente che

$$\omega = \|B\| \|Z\| \sin \widehat{BC} = \|B\| \|Z\| \cos(\pi/2 - \widehat{BC}) = \|B\| \|Z\| \cos \widehat{BZ} \equiv B \cdot Z.$$

Dunque, l'Eq. (16) si riduce alla forma

$$(B \times C) \times Z = (B \cdot Z)C. \quad (17)$$

Sostituendo il termine destro dell'uguaglianza (17) nell'Eq. (15), risulta

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) \times Z &= \eta(A \cdot C)(B \cdot Z) \\ &= A \cdot (B \cdot Z)C \equiv (A \cdot C)(B \cdot Z). \end{aligned}$$

Dal confronto tra il secondo e l'ultimo termine scritti qui sopra, si conclude immediatamente che deve essere  $\eta = 1$  e, quindi, che l'Eq. (14) coincide con la **Proposizione 2**, q. e. d. .

### Proposizione 3

Per il t-pvs in  $\mathbb{R}^3$  (cf/c Eq.i (8) e (9)), vale l'*identità fondamentale*, analoga all'Idn. (11),

$$(A \times B) \times C \equiv (A \cdot C)B - (B \cdot C)A. \quad \blacktriangle \quad (18)$$

#### Dimostrazione

Poiché  $(A \times B) \times C \equiv -C \times (A \times B)$ , dallo scambio  $A \rightleftharpoons C$  nell'Idn. *fondamentale* (11), si ottiene  $C \times (A \times B) = (C \cdot B)A - (C \cdot A)B$ . Quindi, per la *commutatività* del prodotto scalare e l'*anti-commutatività* di quello vettoriale, si scrive

$$(A \times B) \times C \equiv -((C \cdot B)A - (C \cdot A)B) \equiv (A \cdot C)B - (B \cdot C)A, \quad \text{q. e. d. .}$$

Con una combinazione opportuna tra le operazioni di t-ps e di t-pv, si genera un'estensione al cosiddetto *quadri-prodotto vettoriale* – q-pv –  $(A \times B) \times (C \times D)$ , caratterizzato dalla

**Proposizione 4**

Valgono le identità *alternative* in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$(A \times B) \times (C \times D) = [A B D]C - [A B C]D, \quad (19)$$

$$(A \times B) \times (C \times D) = [C D A]B - [C D B]A. \quad \blacktriangle (20)$$

Le Idn. (19) e (20) saranno indicate, rispettivamente, *quadri-prodotto vettoriale destro*, q-pvd, e *sinistro*, q-pvs, a seconda della combinazione vettoriale rappresentativa,  $\{C, D\}$  o  $\{B, A\}$ .

**Dimostrazione**

Definito  $E := A \times B$  per comodità, mediante l'Idn. *fondamentale* (11) per il t-pvd, si ha

$$\begin{aligned} (A \times B) \times (C \times D) &\equiv E \times (C \times D) = (E \cdot D)C - (E \cdot C)D \\ &= (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D \equiv [A B D]C - [A B C]D. \end{aligned}$$

Analogamente, definito  $F := C \times D$ , dalla l'Idn. *fondamentale* (18) per il t-pvs, risulta

$$\begin{aligned} (A \times B) \times (C \times D) &\equiv (A \times B) \times F = (F \cdot A)B - (F \cdot B)A \equiv (C \times D \cdot A)B - (C \times D \cdot B)A \\ &= (C \cdot D \times A)B - (C \cdot D \times B)A \equiv [C D A]B - [C D B]A. \end{aligned}$$

□

Al q-pv, è utile affiancare il *tri-prodotto scalare anulare*,  $(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A)$ , indicato brevemente come t-psa. Per la sua relativa simmetria, esso è riducibile mediante la

**Proposizione 5**

Assegnata la terna *ordinata*  $\{A, B, C\}$  di vettori in  $\mathbb{R}^3$ , vale l'identità per il t-psa

$$(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = [A B C]^2. \quad \blacktriangle (21)$$

**Dimostrazione**

Poiché, dall'Idn. (19) e dal Corollario 1, si deduce che

$$(B \times C) \times (C \times A) = [B C A]C - \cancel{[B C C]A} \equiv [A B C]C,$$

risulta, dall'Idn. *fondamentale* (4) del t-ps, che

$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) &= (A \times B) \cdot [A B C]C \\ &\equiv [A B C](A \times B) \cdot C \equiv [A B C]^2, \text{ q. e. d. } \end{aligned}$$

■

## La Terna Vettoriale Reciproca

Il t-ps trova un'applicazione di grande interesse e importanza in Fisica, i.e., la rappresentazione del *reticolo cristallino reciproco* di un solido. Lo spazio matematico dove tale reticolo reciproco è definito è detto *k-spazio* o *spazio dei momenti* o *spazio di Fourier*. Quest'ultima denominazione si riferisce alle proprietà di periodicità caratteristiche dell'*Analisi di Fourier*, soprattutto in problemi riguardanti la diffusione (scattering) ondulatoria *armonica* quantistica dai piani di un cristallo.

Si rappresenti, la *cella elementare periodica* (quindi, parallelepipedale) di un cristallo con la *terna primitiva ordinata*  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  di vettori-spostamento, non-necessariamente ortogonali tra loro ma *non-complanari*, i.e.,  $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] \neq 0$ . Quindi, definita la terna vettoriale *ordinata* dedotta

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} := \left\{ \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}, \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}, \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} \right\}, \quad (22)$$

vale la *proprietà di ortonormalità*

$$\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_n = \delta_{mn}, \quad (23)$$

dove  $\delta_{mn}$ , il simbolo *delta di Kronecker*, è dato da

$$\delta_{mn} := \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}.$$

Infatti, dalla definizione (1) di t-ps e dal Corollario 1, si ottengono i valori scalari

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} \equiv \frac{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} = 1, & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 &= \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} \equiv \frac{0}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} = 0, \\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 &= \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} \equiv \frac{0}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} = 0, \end{aligned}$$

come pure, calcoli analoghi danno

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \equiv \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 = 1, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 \equiv \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \equiv \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 \equiv \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 = 0.$$

Un risultato successivo è fornito dal

### Teorema 2

I vettori della terna ordinata  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  *non* sono complanari, i.e.,

$$[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3] \neq 0. \blacktriangle \quad (24)$$

### Dimostrazione

Se, *per assurdo*, fosse  $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3] = 0$ , allora, dal Teorema 1,  $\exists! \{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$  tale che

$$\mathbf{b}_3 = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2. \quad (25)$$

Eseguendo il prodotto scalare per  $\mathbf{a}_3$  dei termini nei membri dell'Eq. (25), risulta, dall'Eq. (23),

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 &= 1 \\ &= c_1 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 = 0. \end{aligned}$$

L'*incompatibilità* dei risultati implica l'*assurdità* dell'assunzione  $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3] = 0$ , q. e. d. .

Inversamente, sia assegnata la terna *ordinata*  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  mediante le Eq. (22) e la *proprietà di ortonormalità* (23). Allora, vale la

**Proposizione 6**

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \equiv \left\{ \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]}, \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]}, \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} \right\} . \blacktriangle \quad (26)$$

**Dimostrazione**

Poiché  $\mathbf{a}_1$  è ortogonale sia a  $\mathbf{b}_2$  che a  $\mathbf{b}_3$  ma è parallelo a  $\mathbf{b}_1$ , segue, dall'Eq. (23), che  $\exists! \lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{a}_1 = \lambda(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)$ , così che

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1 &= 1 \\ &= \lambda \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \equiv \lambda [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]. \end{aligned}$$

È immediato concludere che deve essere

$$\lambda = \frac{1}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]}, \quad (27)$$

e, quindi, che  $\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]}$ , q. e. d. .

In modo analogo e ciclico vs. gli indici, si trovano le espressioni rispettive di  $\mathbf{a}_2$  e di  $\mathbf{a}_3$ .

Le terne vettoriali (22) e (26), indicate come **terne vettoriali reciproche**, sono legate tra loro attraverso l'ulteriore importante proprietà seguente, prevedibile dal contesto:

**Proposizione 7**

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = \frac{1}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} . \blacktriangle \quad (28)$$

**Dimostrazione**

Espandendo il t-ps  $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]$  nella **Proposizione 1** e avvalendosi della sua ciclicità, v. Eq. (3), e dell'Iden. (21) per il t-psa, risulta

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] &\equiv \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} \cdot \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} \times \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} \equiv \frac{(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]^3} \\ &= \frac{(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1)}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]^3} = \frac{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]^2}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]^3} = \frac{1}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]}, \quad \text{q. e. d. .} \end{aligned}$$

## Applicazioni algebriche ulteriori

I risultati fin qui ottenuti sono sufficienti per la più generale rappresentazione in  $\mathbb{R}^3$  di un vettore qualsiasi. Precisamente, si ha la

### Proposizione 8

Ogni vettore  $D$  in  $\mathbb{R}^3$  è esprimibile come combinazione lineare dei vettori *non-complanari* di una terna ordinata  $\{A, B, C\}$ . Un'espressione di  $D$  è

$$D = \frac{1}{[A B C]} ([D B C]A + [D C A]B + [D A B]C). \blacktriangle \quad (29)$$

Dimostrazione

Uguagliando i membri destri delle Idn. (19) e (20), si scrive

$$[A B D]C - [A B C]D = [C D A]B - [C D B]A.$$

Poiché  $A, B$  e  $C$ , sono non-complanari, allora,  $[A B C] \neq 0$ . Risolvendo algebricamente rispetto al vettore  $D$ , si ottiene, dalle rappresentazioni equivalenti (4.2),

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{[A B C]} ([C D B]A - [C D A]B + [A B D]C) \\ &= \frac{1}{[A B C]} ([D B C]A + [D C A]B + [D A B]C), \text{ q. e. d. .} \end{aligned}$$

■

L'Idn. (29) trova un'applicazione interessante in presenza di due terne reciproche di vettori.

### Proposizione 9

Siano assegnate, in  $\mathbb{R}^3$ , le due terne *reciproche* di vettori  $\{a_1, a_2, a_3\}$  e  $\{b_1, b_2, b_3\}$  e sia  $w$  un vettore generico. Allora,  $w$  è esprimibile come

$$w = (w \cdot b_1)a_1 + (w \cdot b_2)a_2 + (w \cdot b_3)a_3. \blacktriangle \quad (30)$$

Dimostrazione

Identificando  $A \equiv a_1$ ,  $B \equiv a_2$ ,  $C \equiv a_3$  e  $D \equiv w$  nell'Eq. (29), si scrive

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{[a_1 a_2 a_3]} ([w a_2 a_3]a_1 + [w a_2 a_3]a_2 + [w a_1 a_2]a_3) \\ &\equiv \frac{1}{[a_1 a_2 a_3]} (w \cdot (a_2 \times a_3)a_1 + w \cdot (a_3 \times a_1)a_2 + w \cdot (a_1 \times a_2)a_3) \\ &= w \cdot \frac{a_2 \times a_3}{[a_1 a_2 a_3]} a_1 + w \cdot \frac{a_3 \times a_1}{[a_1 a_2 a_3]} a_2 + w \cdot \frac{a_1 \times a_2}{[a_1 a_2 a_3]} a_3 \\ &\equiv (w \cdot b_1)a_1 + (w \cdot b_2)a_2 + (w \cdot b_3)a_3, \text{ q. e. d. .} \end{aligned}$$

Ovviamente, vale la rappresentazione *reciproco-simmetrica* di  $w$ :

$$w = (w \cdot a_1)b_1 + (w \cdot a_2)b_2 + (w \cdot a_3)b_3. \quad (30.1)$$

■

## Esercizi-I

### Esercizio 1

Si verifichi l'*Identità di Lagrange*

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}),$$

dalla quale, segue immediatamente che

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 \equiv (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.$$

### Esercizio 2

Si mostri che

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0.$$

### Esercizio 3

Data la terna ordinata arbitraria  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  di vettori, si verifichi l'*Identità di Jacobi*

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}.$$

### Esercizio 4

Data la terna ordinata arbitraria  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  di vettori, si dimostri che  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  sse risulta  $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

### Esercizio 5

Data la terna ordinata arbitraria  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  di vettori *non-complanari* e tali che

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{0},$$

allora,  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  è una terna di vettori *reciprocamente ortogonali*.

### Esercizio 6

Date le due terne *reciproche* di vettori  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  e  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , si provi che, anche

$$\{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\} \text{ e } \{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\}$$

sono terne *reciproche*.

### Esercizio 7

Date le due terne *reciproche* di vettori  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  e  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , si provi che

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}.$$

■

## Operazioni Vettoriali Differenziali

È sempre necessaria una certa cautela in tutte le operazioni che coinvolgono il *vettore del* (o **nabla**),  $\nabla$ , poiché esso è, al tempo stesso, un *operatore di derivazione* (parziale) o, più informalmente, *differenziale*. Pertanto,  $\nabla$  obbedisce, in modo *simultaneo*, sia alle regole dell'Algebra Vettoriale fin qui discusse sia a quelle del Calcolo Differenziale.

Come prima osservazione,  $\nabla$  opera in modalità *moltiplicativa generalizzata* con quantità sia scalari che vettoriali. Con le prime, genera una funzione vettoriale *gradiente*; con le seconde, attraverso sia il prodotto scalare sia quello vettoriale, genera una funzione scalare *divergenza* o una funzione vettoriale *rotore*, rispettivamente. Gli effetti risultanti sono radicalmente diversi non solo a livello formale ma anche per implicazioni possibili di significato fisico. In tal senso, l'uso consapevole di parentesi separatrici può aiutare ad evitare errori o ambiguità.

Dunque, l'*ordine* dei simboli in espressioni che contengono  $\nabla$  è *cruciale*. In ogni caso,  $\nabla$  agisce solo sul *primo termine*, o *primo gruppo di termini* racchiuso tra parentesi, posto alla sua *destra*. Nella disuguaglianza

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)G \neq G(\mathbf{F} \cdot \nabla),$$

il termine a sinistra è una *quantità vettoriale numericamente ben-definita* mentre il termine a destra costituisce un *operatore differenziale puro*, privo di operando.

L'espressione  $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\phi$  va interpretata come il prodotto scalare di  $\mathbf{F}$  con il gradiente di  $\phi$ , i.e.,

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\phi \equiv \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \equiv (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F}.$$

D'altra parte, espressioni come  $\nabla \cdot \phi$ ,  $\nabla \times \phi$  o  $\nabla \mathbf{F}$  *non* hanno alcun significato vettoriale operativo. La situazione diventa un po' più delicata quando  $\nabla$  opera in prodotto scalare o vettoriale su un termine vettoriale complessivo costituito da un fattore scalare e uno vettoriale o da due quantità vettoriali legate, a loro volta, in un prodotto scalare o vettoriale. In tali circostanze, il carattere *differenziale* fa agire  $\nabla$  sulla prima quantità tenendo fissa la seconda e, poi, lo fa agire sulla seconda tenendo fissa la prima. Al tempo stesso, però, le proprietà *algebriche vettoriali formali continuano a valere indipendentemente*.

Qualche applicazione tipica dovrebbe chiarire la questione:

### Identità 1

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) \equiv \nabla_\phi \cdot (\phi \mathbf{F}) + \nabla_{\mathbf{F}} \cdot (\phi \mathbf{F}). \quad (31)$$

Il prodotto scalare  $\nabla_\phi \cdot (\phi \mathbf{F})$  indica che  $\nabla$  opera su  $\phi$  mentre  $\mathbf{F}$  resta *estraneo* all'operazione di derivazione, pur *conservando* tutte le sue proprietà vettoriali formali. Vale il significato analogo per  $\nabla_{\mathbf{F}} \cdot (\phi \mathbf{F})$ . Quindi, trascurando i pedici, si ottiene

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F}) \equiv \mathbf{F} \cdot (\nabla\phi) + (\nabla \cdot \mathbf{F})\phi. \quad (31.1)$$

### Identità 2

Circa il rotore  $\nabla \times (\phi \mathbf{F})$ , si ha, come per l'Idn. 1 precedente

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi \mathbf{F}) &\equiv \nabla_\phi \times (\phi \mathbf{F}) + \nabla_{\mathbf{F}} \times (\phi \mathbf{F}) \\ &= (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F}) \equiv (\nabla \times \mathbf{F})\phi - \mathbf{F} \times \nabla\phi. \end{aligned} \quad (32)$$

**Identità 3**

Per quanto riguarda la divergenza di un prodotto vettoriale,  $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$ , si incominci dall'identità differenziale

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \equiv \nabla_{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) + \nabla_{\mathbf{G}} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}).$$

Ora, si proceda in modo *puramente algebrico e formale* applicando la proprietà *ciclica* (3) del t-ps ma *trascurando*, momentaneamente, la *sensatezza numerica* dell'espressione risultante. Così, si scrive

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \equiv \mathbf{G} \cdot (\nabla_{\mathbf{F}} \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \nabla_{\mathbf{G}}),$$

una proposizione il cui secondo termine a destra è *privo di significato numerico*, a meno che, in esso, si commutino i fattori  $\mathbf{G}$  e  $\nabla_{\mathbf{G}}$ , mantenendo l'*anti-commutatività* del prodotto vettoriale.

Eliminati i pedici, il risultato *numericamente significativo* è, dunque,

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}). \quad (33)$$

**Identità 4**

Dall'Idn. *fondamentale* (11) per il t-pvd, si scrive

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = (\nabla \cdot \mathbf{F})\nabla - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F},$$

con il primo termine a destra *privo di significato numerico*,

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}, \quad (34)$$

risultato *corretto* perché *numericamente significativo*.

Si noti che l'Eq. (34) fornisce un'espressione per  $\nabla^2 \mathbf{F}$  (i.e., per il vettore le cui componenti sono i *laplaciani* delle componenti (scalari) di  $\mathbf{F}$ ):

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}). \quad (34.1)$$

**Identità 5**

Analogamente a quanto fatto in precedenza, si incominci dall'identità *differenziale*

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \equiv \nabla_{\mathbf{F}} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) + \nabla_{\mathbf{G}} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}). \quad (i)$$

Con le identificazioni  $\mathbf{A} \equiv \nabla$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{F}$  e  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{G}$ , l'Idn. *fondamentale* (11) per il t-pvd dà le espressioni *formali ordinate*

$$\nabla_{\mathbf{F}} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F})\mathbf{G}, \quad (ii)$$

$$\nabla_{\mathbf{G}} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F})\mathbf{G}. \quad (iii)$$

In esse, si nota che le forme scalari  $\nabla_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{G}$  e  $\nabla_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}$  sono *prive di significato numerico*, risultando operatori differenziali puri. Infatti, e.g., se volesse considerare il vettore  $\mathbf{F}$  *soltanto* soltanto come una quantità uniforme vs.  $\nabla_{\mathbf{G}}$ , risulterebbe, allora, che  $\nabla_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F} \equiv 0, \forall \mathbf{F}$ .

Invece, se la proprietà *algebrica* di *commutatività* del prodotto scalare *deve continuare a valere*, si è costretti a concludere che *non* esiste alcuna ragione *generale* per assumere che,  $\forall \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ , siano

$$\mathbf{G} \cdot \nabla_{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{G}} \equiv \hat{O}$$

i.e., operatori *nulli*, soprattutto riguardo all'*unico* significato numerico attribuibile lasciando agire

*analiticamente* – verso destra –  $\nabla_F$  su  $F$  e  $\nabla_G$  su  $G$ .

Pertanto, sostituiti, nelle Idn. (ii) e (iii), le forme scalari  $G \cdot \nabla_F$  e  $F \cdot \nabla_G$ , le sole *compatibili* con il calcolo *analitico*, e trascurando i pedici, l'Idn. (i) diventa

$$\nabla \times (F \times G) \equiv (G \cdot \nabla)F - (\nabla \cdot F)G + (\nabla \cdot G)F - (F \cdot \nabla)G. \quad (35)$$

### Identità 6

Se si vuole determinare l'espansione del gradiente di un prodotto scalare,  $\nabla(F \cdot G)$ , si scomponga

$$\nabla(F \cdot G) \equiv \nabla_F(F \cdot G) + \nabla_G(F \cdot G). \quad (i)$$

Poi, si riscriva l'Idn. (11) per il t-pvd nella forma  $B(A \cdot C) \equiv A \times (B \times C) + (A \cdot B)C$ . Da questa, con le identificazioni *formali*  $B \equiv \nabla_G$ ,  $A \equiv F$  e  $C \equiv G$ , risulta

$$\nabla_G(F \cdot G) = F \times (\nabla_G \times G) + (F \cdot \nabla_G)G, \quad (ii)$$

che è numericamente significativa.

Ora, eseguendo lo scambio  $F \rightleftharpoons G$  nell'Eq. (i), si ottiene l'identità simmetrica

$$\nabla_F(G \cdot F) \equiv \nabla_F(F \cdot G) = G \times (\nabla_F \times F) + (G \cdot \nabla_F)F, \quad (iii)$$

anch'essa numericamente significativa.

Infine, sostituendo gli sviluppi (ii) e (iii) nella scomposizione (i) e trascurando i pedici, risulta

$$\nabla(F \cdot G) \equiv G \times (\nabla \times F) + (G \cdot \nabla)F + F \times (\nabla \times G) + (F \cdot \nabla)G. \quad (36)$$

■

### Richiami sulle derivazioni vs. coordinate vettoriali relative

Sia  $\mathbf{R} := \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  la coordinata vettoriale *relativa* costruita a partire da una *coordinata-sorgente*  $\mathbf{r}' \equiv (x'; y'; z')$  e da una *coordinata di campo*  $\mathbf{r} \equiv (x; y; z)$  vs. un'origine  $O$  assegnata. La coordinata di campo  $\mathbf{r}$  è quella di un punto di osservazione/misura di una proprietà  $f$  che, da  $\mathbf{r}'$ , si propaga in un dominio  $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Poi, sia  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}_f)$  rappresentabile come una funzione *scalare* del vettore  $\mathbf{R}$ :

$$f : \mathbf{R} \mapsto f(\mathbf{R}) \equiv f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(x - x', y - y', z - z') \equiv f(X, Y, Z), \quad (\ddagger.1)$$

dove,  $X := x - x'$ ,  $Y := y - y'$  e  $Z := z - z'$ .

Con le regole di derivazione composta, si calcolano

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial X}, \quad (\ddagger.2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot (-1) = -\frac{\partial f}{\partial X}, \quad (\ddagger.2.2)$$

come pure le espressioni analoghe vs. le altre due coppie di coordinate di campo e di sorgente,  $\{y, y'\}$  e  $\{z, z'\}$ .

Ne segue sinteticamente che

$$\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial \xi} \equiv -\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial \xi'}. \quad (\ddagger.3)$$

essendo  $\xi \in \{x, y, z\}$  e, ordinatamente,  $\xi' \in \{x', y', z'\}$ .

Ora, definito l'operatore *gradiente* vs. le coordinate della sorgente  $\mathbf{r}'$ ,

$$\nabla' := \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z'} \quad (\ddagger.4)$$

(la terna-base orto-normale  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$  è *invariante* nella traslazione  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ), si ottiene immediatamente che

$$\nabla f(\mathbf{R}) = -\nabla' f(\mathbf{R}), \quad (\ddagger.5.1)$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{R}) = \nabla'^2 f(\mathbf{R}), \quad (\ddagger.5.2)$$

i.e., con riferimento a una funzione scalare delle *coordinate relative*, gli operatori  $\nabla$  e  $\nabla'$ , sono scambiabili tra loro *anti-simmetricamente* mentre gli operatori  $\nabla^2$  e  $\nabla'^2$  sono chiaramente *equivalenti*.

Come passo successivo, se  $f \equiv f_\xi$  è una delle componenti scalari di una funzione *vettoriale* della coordinata vettoriale relativa,  $\mathbf{F} : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{R})$ , discendono prontamente i risultati:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{R}), \quad (\ddagger.6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{R}), \quad (\ddagger.6.2)$$

L'*intensità* (*norma*) del vettore posizione relativa/spostamento relativo richiede un'analisi un po' accurata. Dalla forma pitagorica

$$R := \|\mathbf{R}\| \equiv \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{1/2},$$

si calcolano

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x - x'}{R} = \frac{\partial R}{\partial x'}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y - y'}{R} = \frac{\partial R}{\partial y'}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z - z'}{R} = \frac{\partial R}{\partial z'}. \quad (\ddagger.7)$$

Combinando linearmente le Eq.i (\ddagger.7), risulta

$$\nabla R = -\nabla' R = \mathbf{R}/R \equiv \hat{\mathbf{R}}. \quad (\ddagger.8)$$

Considerata una funzione  $\phi : R \mapsto \phi(R)$ ,  $\phi \in \mathcal{C}^2(A)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}_0^+ \wedge A$  insieme *aperto*, generalmente, si ottengono

$$\frac{\partial \phi(R)}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial R} \hat{R}_x, \quad \frac{\partial \phi(R)}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial R} \hat{R}_y, \quad \frac{\partial \phi(R)}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial R} \hat{R}_z, \quad (\ddagger.9)$$

dove,  $\hat{R}_x \equiv dR/\partial x$ ,  $\hat{R}_y \equiv dR/\partial y$  e  $\hat{R}_z \equiv dR/\partial z$  sono le componenti scalari (algebriche) rettangolari di  $\hat{\mathbf{R}}$  (i.e., i *coseni direttori* di  $\mathbf{R}$ ) espresse dalle Eq.i (\ddagger.7). Quindi, con le Eq.i (\ddagger.9), si costruiscono

$$\nabla \phi(R) \equiv -\nabla' \phi(R) = \frac{\partial \phi(R)}{\partial R} \hat{\mathbf{R}}, \quad (\ddagger.10)$$

$$\nabla^2 \phi(R) \equiv \nabla \cdot \nabla \phi(R) = (-\nabla') \cdot (-\nabla') \phi(R) \equiv \nabla'^2 \phi(R) = \frac{\partial^2 \phi(R)}{\partial R^2}. \quad (\ddagger.11)$$

□

Un caso di interessante è quello in cui  $\phi(R) \equiv R^n$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Dal risultato generale

$$\nabla R^n = nR^{n-1} \hat{\mathbf{R}} \equiv -\nabla' R^n, \quad (\ddagger.12)$$

segue, per  $n = -1 \wedge R \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \equiv -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \equiv -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \equiv -\frac{x - x'}{R^3} \hat{\mathbf{x}} - \frac{y - y'}{R^3} \hat{\mathbf{y}} - \frac{z - z'}{R^3} \hat{\mathbf{z}}. \quad (\ddagger.13)$$

Inoltre, tenendo conto dell'equivalenza operatoriale tra  $\nabla^2$  e  $\nabla'^2$ , segue, con  $R \in \mathbb{R}^+$ , che

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) &\equiv \nabla'^2 \left( \frac{1}{R} \right) = \nabla \cdot \left( \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) = \nabla' \cdot \left( \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \right) && \text{(v. Eq. (R.13))} \\ &= \left( -\frac{1}{R^3} + \frac{3(x-x')^2}{R^5} \right) + \left( -\frac{1}{R^3} + \frac{3(y-y')^2}{R^5} \right) + \left( -\frac{1}{R^3} + \frac{3(z-z')^2}{R^5} \right) \\ &= -3 \left( \frac{1}{R^3} - \frac{R^2}{R^5} \right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (\ddagger.14)$$

Infine, poiché,  $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(A)$ , vale il *Teorema di Schwarz*, di *invertibilità dell'ordine di derivazione parziale doppia*, si ha che l'operatore  $\nabla \times \nabla$  corrisponde all'operatore *nulla*  $\hat{O}$ ,

$$\nabla \times \nabla \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{O} \equiv (-\nabla') \times (-\nabla'). \quad (\ddagger.15)$$

La nullità del determinante vettoriale simbolico si esprime attraverso l'*uguaglianza* della 2<sup>a</sup> con la 3<sup>a</sup> riga. Pertanto, tenendo conto anche dell'Eq. (\ddagger.13), si conclude che ( $R \in \mathbb{R}^+$ )

$$\nabla \times \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) \equiv \nabla \times \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \equiv -\nabla \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \equiv -\nabla' \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right). \quad (\ddagger.16)$$

■

## Esercizi-II

### Esercizio 8

È data una funzione scalare *qualsiasi*  $\phi \in \mathcal{C}^2(A)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $A$  è un insieme *aperto*.  
Si verifichi, dalla rappresentazione mediante il determinante vettoriale simbolico, che

$$\nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0},$$

una generalizzazione evidente del prodotto vettoriale elementare  $c_1 \mathbf{v} \times c_2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , con  $c_1 c_2 \neq 0$ .

### Esercizio 9

Assegnato un vettore (campo) arbitrario *uniforme*  $U$ , si verifichino le relazioni seguenti:

- 9.1  $\nabla(U \cdot \mathbf{r}) = U$ ;
- 9.2  $\nabla \cdot (U \times \mathbf{r}) = 0$ ;
- 9.3  $\nabla \times (U \times \mathbf{r}) = 2U$ ;
- 9.4  $\nabla(U \cdot \mathbf{r}/r^3) + \nabla \times (U \times \mathbf{r}/r^3) = \mathbf{0}$ ;
- 9.5  $\nabla(U \cdot \nabla(1/r)) + \nabla \times (U \times \nabla(1/r)) = \mathbf{0}$ .

### Esercizio 10

Nell'insieme di esistenza di *tutte* le derivate 2<sup>e</sup> dei campi scalari  $\phi$  e  $\psi$ , si provi che

$$\nabla^2(\phi\psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi.$$

■

## Operazioni Vettoriali Integrali

### Preliminari ai procedimenti integro-vettoriali di calcolo

L'integrazione ordinaria di un campo vettoriale,  $\mathbf{F}$ , funzione di una sola variabile scalare,  $t$ , separato nei suoi vettori componenti *cartesiani*,  $\mathbf{F}(t) \equiv F_x(t)\hat{\mathbf{x}} + F_y(t)\hat{\mathbf{y}} + F_z(t)\hat{\mathbf{z}}$ , e integrabile nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ , non presenta alcun problema formale, poiché  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  sono *totalmente invarianti* vs.  $t$ . Quindi, è ammissibile la rappresentazione

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt \equiv \hat{\mathbf{x}} \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt + \hat{\mathbf{y}} \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt + \hat{\mathbf{z}} \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt. \quad (37)$$

Una situazione più generale è quella in cui  $\mathbf{F}(t)$  è dato separato in componenti vettoriali non-cartesiani, e.g., *sferici*,  $\mathbf{F}(t) \equiv F_r(t)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(t)\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ . Poiché le *direzioni* e i *versi* di  $\hat{\mathbf{r}}$ , di  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  e di  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  possono *dipendere* da  $t$ , in tale circostanza, anche questi versori *entrano* nell'operazione di integrazione. Specificamente, ricorrendo alle formule di rappresentazione *rettangolare*

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} , \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

si scrive, per la proprietà di linearità dell'integrale,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt &\equiv \int_{t_1}^{t_2} F_r(t)\hat{\mathbf{r}} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_\theta(t)\hat{\boldsymbol{\theta}} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_\varphi(t)\hat{\boldsymbol{\phi}} dt \\ &= \hat{\mathbf{x}} \int_{t_1}^{t_2} (F_r(t)\sin \theta \cos \varphi + F_\theta(t)\cos \theta \cos \varphi - F_\varphi(t)\sin \varphi)dt + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \hat{\mathbf{y}} \int_{t_1}^{t_2} (F_r(t)\sin \theta \sin \varphi + F_\theta(t)\cos \theta \sin \varphi + F_\varphi(t)\cos \varphi)dt + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \hat{\mathbf{z}} \int_{t_1}^{t_2} (F_r(t)\cos \theta - F_\theta(t)\sin \theta)dt. \end{aligned} \quad (38)$$

Ora, l'esecuzione delle integrazioni richiede le rappresentazioni delle variabili  $t$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  in termini di una variabile comune,  $s$ , i.e.,  $t \equiv t(s)$ ,  $\theta \equiv \theta(s)$  e  $\varphi \equiv \varphi(s)$ . Il calcolo per via analitica, non sempre immediato, può semplificarsi in presenza di una simmetria *polare* del campo (i.e., con  $F_\theta(t) \equiv \kappa_\theta$ , *costante*,  $\forall \theta \in [0, \pi]$ ) o *azimutale* (i.e., con  $F_\varphi(t) \equiv \kappa_\varphi$ , *costante*,  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ ) o *sferica* (i.e., con  $F_\theta(t) = F_\varphi(t) \equiv 0$ ,  $\forall t$ ) oppure quando  $s \equiv t \equiv \theta$  o quando  $t \equiv \varphi$ , etc. .

□

La discussione relativa a un campo espresso in un qualsiasi altro sistema di coordinate ortogonali è del tutto analoga. Come esempio, nel sistema delle coordinate *cilindriche*, l'espressione integrale generale di partenza è

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt &\equiv \int_{t_1}^{t_2} F_\rho(t)\hat{\boldsymbol{\rho}} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_\varphi(t)\hat{\boldsymbol{\phi}} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)\hat{\mathbf{z}} dt \\ &= \hat{\mathbf{x}} \int_{t_1}^{t_2} (F_\rho(t)\cos \varphi - F_\varphi(t)\sin \varphi)dt + \hat{\mathbf{y}} \int_{t_1}^{t_2} (F_\rho(t)\sin \varphi + F_\varphi(t)\cos \varphi)dt + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \hat{\mathbf{z}} \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt, \end{aligned} \quad (39)$$

corrispondente alle formule di rappresentazione cartesiana dei versori

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \\ \hat{z} \equiv \hat{z} \end{cases}$$

In questo caso, simmetrie di campo semplificatrici sono quella *radiale*, o *cilindrica* (i.e., con  $F_\varphi(t) \equiv \kappa_\varphi$ , costante,  $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$ ), e quella cosiddetta *assiale* (i.e., con  $F_z(t) \equiv F_{-z}(t)$ ,  $\forall t$ ).

□

La discussione molto sintetica che segue può risultare più significativa quando si possiede un minimo di conoscenza operativa della Geometria Differenziale in  $\mathbb{R}^3$  sia delle *linee* e degli *integrali curvilinei* sia delle *superfici* e degli *integrali di superficie*. Un'esposizione adeguata di tali argomenti è contenuta, e.g., in [7], CAP. 1 e 6.

□

Se lo spazio geometrico associato a  $\mathbb{R}^3$  è quello euclideo-cartesiano ordinario,  $X \times Y \times Z$ , gli elementi differenziali *generici* di linea e di area sono rappresentabili, rispettivamente, come

$$d\mathbf{r} \equiv \hat{\mathbf{t}} ds = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz, \quad (40)$$

$$d\mathbf{S} \equiv \hat{\mathbf{n}} dS = \mathbf{r}'_\lambda \times \mathbf{r}'_\mu d\lambda d\mu, \quad (41)$$

essendo  $\hat{\mathbf{t}} \equiv d\mathbf{r}/ds$  il versore locale *tangente* a  $C$ , con  $ds \approx ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2)^{1/2}$ , e facendo coincidere la coppia *ordinata* delle *coordinate parametriche*  $\{\lambda, \mu\}$  di *superficie* con  $\{x, y\}$  o con  $\{y, z\}$  o con  $\{z, x\}$  opportunamente, così che, e.g.,  $\mathbf{r}'_\lambda \equiv \mathbf{r}'_x \equiv \partial\mathbf{r}/\partial\lambda|_{\lambda=z}$  e  $\mathbf{r}'_\mu \equiv \mathbf{r}'_y \equiv \partial\mathbf{r}/\partial\mu|_{\mu=x}$ .

In particolare, assumendo le coordinate cartesiane *sempre* in *sequenza ciclica*  $\{\lambda, \mu, \nu\}$ , fissata a partire dalla terna *ordinata* consueta  $\{x, y, z\}$ , se  $(\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda, \mu) \equiv \nu$  è l'equazione scalare *esplicita* della superficie  $\sigma$  di integrazione, il cui versore normale locale *uscende* è  $\hat{\mathbf{n}}$ , allora, definita la forma  $g(\mathbf{r}) := \nu - f(\lambda, \mu)$ , risulta, nell'Eq. (41), che

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(x, y, z) \equiv \lambda \hat{\lambda} + \mu \hat{\mu} + \nu \hat{\nu} \equiv \lambda \hat{\lambda} + \mu \hat{\mu} + f(\lambda, \mu) \hat{\nu} \equiv \mathbf{r}(\lambda, \mu), \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}'_\lambda(\lambda, \mu) \times \mathbf{r}'_\mu(\lambda, \mu)}{\|\mathbf{r}'_\lambda(\lambda, \mu) \times \mathbf{r}'_\mu(\lambda, \mu)\|} \equiv \frac{\nabla g(\mathbf{r})}{\|\nabla g(\mathbf{r})\|} = \frac{\hat{\nu} - g'_\lambda \hat{\lambda} - g'_\mu \hat{\mu}}{(1 + \|\nabla f(\lambda, \mu)\|^2)^{1/2}} \equiv \hat{\mathbf{n}}(\lambda, \mu) \quad (43)$$

(la norma indicata è quella *pitagorico-euclidea* o, al più, *hilbertiana*) e, quindi,

$$dS \equiv \|\nabla g(\mathbf{r})\| d\lambda d\mu \equiv (1 + \|\nabla f(\lambda, \mu)\|^2)^{1/2} d\lambda d\mu. \quad (44)$$

Il caso dell'equazione di  $\sigma$  in forma cartesiana *implicita* e il caso generale delle coordinate parametriche *non-cartesiane*, sia curvilinee che di superficie, conducono a estensioni naturali delle Eq. (40), ..., (44). Per queste, ci si riferisca, ancora, a [7].

□

Gli integrali che si incontrano tipicamente nelle teorie e nelle applicazioni di campo classico e non (Elettrodinamica, Meccanica Analitica e Gravitazione Newtoniana, Fluidodinamica e Teorie della Diffusione e del Trasporto, etc.) sono raggruppabili in  $\mathbb{R}^3$  a seconda della natura del dominio di integrazione e della forma dell'elemento integrando:

I. **Integrali curvilinei** (o, sinteticamente, **di linea**), quali, e.g.,

$$\int_C \phi \, d\mathbf{r} \equiv \int_C \phi (\hat{x} \, dx + \hat{y} \, dy + \hat{z} \, dz), \quad (45.1)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_C \mathbf{F} \cdot (\hat{x} \, dx + \hat{y} \, dy + \hat{z} \, dz), \quad (45.2)$$

$$\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r} \equiv \int_C \mathbf{F} \times (\hat{x} \, dx + \hat{y} \, dy + \hat{z} \, dz). \quad (45.3)$$

Quando la curva *spaziale*  $C$  forma un cammino *chiuso*, l'integrale di linea (45.1) si scrive come

$$\oint_C \phi \, d\mathbf{r}. \quad (45.4)$$

Nel caso particolare in cui  $C$  è una linea *à-la Jordan*, i.e., una linea *semplice* (ossia, senza auto-intersezioni), *piana* e *chiusa* e il senso di percorrenza dell'integrazione è specificato, sono usati spesso i simboli

$$\oint_C^+ \phi \, d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad \oint_C^- \phi \, d\mathbf{r}$$

per indicare, rispettivamente, la percorrenza *positiva* (antioraria) o *negativa* (oraria) lungo  $C$ . Nel primo caso, la regione interna a  $C$  resta sempre *a destra* rispetto al verso di percorrenza; nel secondo, sempre *a sinistra*. Comunque, risulta

$$\oint_C^+ \phi \, d\mathbf{r} \equiv -\oint_C^- \phi \, d\mathbf{r}.$$

L'integrale curvilineo (45.2) è detto, talvolta, *integrale scalare di linea* di un campo vettoriale  $\mathbf{F}$ . Se  $C$  è chiusa, l'integrale scalare di linea di  $\mathbf{F}$  prende il nome di *circolazione*, o *circuitazione*, di  $\mathbf{F}$  lungo  $C$  e viene scritto come

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r};$$

II. **Integrali di superficie**, quali, e.g.,

$$\iint_S \phi \, dS \equiv \iint_S \phi \hat{n} \, dS, \quad (46.1)$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, dS, \quad (46.2)$$

$$\iint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{F} \times \hat{n} \, dS. \quad (46.3)$$

La superficie  $S$  può essere aperta o chiusa. Una superficie *chiusa* e *finita* è *priva di frontiera* e contiene una regione *limitata* di spazio 3D. Se  $S$  è chiusa, gli integrali (46.1), (46.2) e (46.3) sono solitamente indicati con le notazioni rispettive

$$\oiint_S \phi \, dS, \quad \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{e} \quad \oiint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{S}.$$

Per una superficie *chiusa*  $S$ , è convenzione assumere che il verso di  $\hat{n}$  sia quello *uscende* da  $S$ . L'integrale di superficie (46.2) è detto *flusso di  $\mathbf{F}$  attraverso  $S$* . Ad esempio, se  $S$  è descritto da  $\mathbf{r}(\lambda, \mu)$ , allora il *flusso di  $\mathbf{F}$  attraverso  $S$*  è dato da

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_{\mathcal{D}_{\lambda\mu}} [\mathbf{F} \mathbf{r}'_\lambda \mathbf{r}'_\mu] d\lambda d\mu, \quad (46.4)$$

poiché, essendo  $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{r}'_\lambda \times \mathbf{r}'_\mu d\lambda d\mu$ , si può scrivere, con il simbolo (4.1),  $[\mathbf{F} \mathbf{r}'_\lambda \mathbf{r}'_\mu] \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_\lambda \times \mathbf{r}'_\mu$ . La regione  $\mathcal{D}_{\lambda\mu} \subseteq \mathbb{R}^2$  è il dominio 2-dim (piano) di definizione dei parametri di linea  $\lambda$  e  $\mu$ ;

III. **Integrali di volume**, quali, e.g.,

$$\iiint_{\Omega} \phi d^3r \equiv \iiint_{\Omega} \phi dx dy dz, \quad (47.1)$$

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{F} d^3r \equiv \iiint_{\Omega} \mathbf{F} dx dy dz. \quad (47.2)$$

L'integrale (47.1) è quello consueto scalare di volume, mentre l'integrale (47.2) corrisponde a un vettore cartesiano le cui componenti sono integrali del tipo (47.1), analogo all'Eq. (37).

Per tutte le tipologie integrali indicate sopra, si applicano procedimenti classici espressi mediante parametrizzazioni opportune e/o trasformazioni di variabile di integrazione, come già suggerito riguardo alle Eq.i (38) e (39).

□

Dimostrazioni del *Teorema di Gauss* e del *Teorema di Stokes* sono contenute, a livelli diversi di prospettiva e di raffinamento, nella maggior parte dei testi di Analisi Matematica e, pertanto, saranno, qui, tralasciate. Richieste formali sufficienti sulla natura dei domini di integrazione e sulle proprietà analitiche delle funzioni integrande di campo sono specificate, e.g., in [7], VOL. 2.

Invece, riceveranno una presentazione semplice ma dettagliata i *Teoremi (o Identità) di Green* e il fondamentale *Teorema di Helmholtz* in volumi *hilbertiani*. Tali teoremi, alquanto specialistici, trovano, comunque, applicazione, e.g., in problemi avanzati di Elettrodinamica e di Teoria dei Campi.

La richiesta che volume-ambiente sia *hilbertiano* garantisce la proprietà di *completezza* necessaria per l'integrabilità *à-la Lebesgue* eventuale e la convergenza dei campi alla frontiera. Tali condizioni si rivelano non solo desiderabili ma assolutamente *necessarie* per fornire fondamento consistente alle rappresentazioni della Fisica Teorica nei contesti fenomenologici più elusivi e sottili.

□

Come premessa generale agli *enunciati integrali* del *Teorema di Gauss* e del *Teorema di Stokes* e alle conseguenze più significative riassunte nelle **Proposizioni 10, 11, 12, 13** che ne conseguono (due da ciascuno di questi teoremi fondamentali) si assuma ovunque la seguente

**Condizione Topologica 1:**

sia  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  un campo vettoriale definito nel *volume* 3-dim *hilbertiano*  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  costituito da un'unione al più *finita* di *domini semplici* vs. un sistema di coordinate *ortogonali* qualsiasi.  $\Omega$  si intenda generato da una base vettoriale *destrorsa* (o *positiva*) (e.g., v. [8]).

## Il Teorema di Gauss

Se sono soddisfatte le Condizioni Topologiche 1 precedenti e se la superficie *chiusa*  $S \equiv \partial\Omega$  è orientata *positivamente*, con *versore normale*  $\hat{n}$ , risulta

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d^3r = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \equiv \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS. \blacktriangle \quad (48)$$

### Proposizione 10

Siano  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  un campo scalare e  $S \equiv \partial\Omega$ , con  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$ .

Allora, vale l'uguaglianza (vettoriale)

$$\iiint_{\Omega} \nabla \Phi d^3r = \oiint_S \Phi d\mathbf{S} \equiv \left( \oiint_S \Phi dS \right) \hat{n}. \blacktriangle \quad (49)$$

### Dimostrazione

Introdotta il vettore (campo) ausiliario  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ , *uniforme* in  $\bar{\Omega}$ , si calcola il prodotto scalare

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{U}) = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{U} + \cancel{\Phi \nabla \cdot \mathbf{U}} \equiv \mathbf{U} \cdot \nabla \Phi. \quad (50)$$

Ora, si ha

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{U}) d^3r &= \oiint_S \Phi \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}, && \text{per il Teorema di Gauss, Eq. (48),} \\ &\equiv \mathbf{U} \cdot \oiint_S \Phi d\mathbf{S}, && \end{aligned} \quad (50.1)$$

essendo  $\mathbf{U}$  *uniforme* in  $\Omega$  mentre  $\Phi$  e  $d\mathbf{S}$ , in generale, sono *variabili* su  $S$ ,

$$\equiv \mathbf{U} \cdot \iiint_{\Omega} \nabla \Phi d^3r, \quad (50.2)$$

dall'Eq. (50).

Poiché è  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$  in  $\bar{\Omega}$ , la dimostrazione termina confrontando le Eq.i (50.1) e (50.2), q. e. d. .

### Proposizione 11

Siano  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  un campo vettoriale e  $S \equiv \partial\Omega$ , con  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$ .

Allora, vale l'uguaglianza

$$\iiint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} d^3r = \oiint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}. \blacktriangle \quad (51)$$

### Dimostrazione

Introdotta il vettore (campo) ausiliario  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ , *uniforme* in  $\bar{\Omega}$ , si espande il t-ps

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{U}) = \mathbf{U} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \cancel{\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{U}} \equiv \mathbf{U} \cdot \nabla \times \mathbf{F}. \quad (52)$$

Quindi, l'integrazione nel volume  $\Omega$  dei termini dei membri dell'Eq. (52) genera la sequenza di identità integrali seguenti:

$$\begin{aligned} \oiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{U}) d^3r &= \oiint_S (\mathbf{F} \times \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}), && \text{per il Teorema di Gauss, Eq. (48),} \\ &\equiv \oiint_S (\mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} \times \mathbf{F}), && \text{per la proprietà ciclica del t-ps, Eq. (3),} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{U} \cdot \oiint_S (d\mathbf{S} \times \mathbf{F}), \quad (52.1)$$

poiché  $\mathbf{U}$  è *uniforme* in  $\bar{\Omega}$  mentre  $\mathbf{F}$  e  $d\mathbf{S}$ , in generale, sono *variabili* su  $S$ ,

$$\equiv \mathbf{U} \cdot \iiint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} d^3r, \quad (52.2)$$

dal termine nel membro destro nell'Eq. (52).

Poiché è  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$  in  $\bar{\Omega}$ , la dimostrazione termina confrontando le Eq.i (52.1) e (52.2), q. e. d. .

È interessante osservare che le uguaglianze espresse dalle Eq. (48), (49) e (51) possono essere sintetizzate in un'unica struttura formale di trasformazione fra *integrali di volume e integrali di superficie* corrispondenti,

$$\iiint_{\Omega} \nabla * \mathfrak{C} d^3r = \oiint_S d\mathbf{S} * \mathfrak{C}, \quad (53)$$

dove  $\mathfrak{C}$  è un campo *o scalare o vettoriale* e l'operazione  $*$  rappresenta una *qualsiasi* applicazione ammissibile dell'operatore  $\nabla$ .

La necessità di *rappresentazioni integrali* dell'operatore  $\nabla$  si traduce in riduzioni convenienti e significative che intervengono nelle questioni più svariate di Teoria di Campo.

Nell'insieme delle applicazioni continue definite nello *spazio di Hilbert*  $\mathfrak{H}^3$ , dotato della metrica indotta dal prodotto *interno* opportuno, l'operatore lineare  $\mathcal{L} := \int_{\Omega} (d\mu)$ , *l'integrale*, è *continuo*.

Quindi, il *Teorema della media*, generalizzato su  $S$  all'operatore  $\mathcal{L}$ , fornisce una rappresentazione di  $\nabla$  in forma integrale di superficie *à-la Gauss*

$$\nabla \equiv \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S d\mathbf{S} \equiv \left( \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S d\mathbf{S} \right) \hat{\mathbf{n}}, \quad (54)$$

Si può saggiare la plausibilità della rappresentazione (54) assumendo che le coordinate  $x, y, z$  corrispondano a lunghezze, nel senso della Fisica.

L'Idn. operatoriale (54) consente di rappresentare le quantità  $\nabla \Phi$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  e  $\nabla \times \mathbf{F}$  secondo le forme integrali *di superficie* rispettive:

$$\nabla \Phi \equiv \left( \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S d\mathbf{S} \right) \Phi \equiv \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S \Phi d\mathbf{S}, \quad (55.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \left( \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S d\mathbf{S} \right) \cdot \mathbf{F} \equiv \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (55.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \left( \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S d\mathbf{S} \right) \times \mathbf{F} \equiv \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}, \quad (55.3)$$

nelle quali, si può sempre sostituire, con i significati ormai noti,  $d\mathbf{S} := \hat{\mathbf{n}} dS$ . Tali forme integrali evidenziano che variazioni *locali* di campo ( $\in \mathcal{C}^1$ ) interne a un volume corrispondono alla loro propagazione *media* in  $S \equiv \partial\Omega$ , con  $\Omega \rightarrow 0$ . Le rappresentazioni *globali* corrispondenti sono date, rispettivamente, dalle Eq.i (48), (49) e (51), i.e., dall'Eq. sintetica (53).

## Il Teorema di Stokes

Se vale la Condizione Topologica 1, P. 20, e, se  $S \subset \Omega$  è una superficie a due facce, aperta o chiusa, la cui frontiera  $C \equiv \partial S$ , orientata *positivamente*, è costituita, al più, dall'unione di un numero *finito* di linee *à-la Jordan*, allora, sussiste l'uguaglianza

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad \blacktriangle \quad (56)$$

La *proprietà ciclica* e quella *fondamentale* del t-ps, Eq.i (3) e (4), consentono di riscrivere l'integrale di superficie nell'Eq. (51) in una delle tre forme equivalenti.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \equiv \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (56.1)$$

Sostituendo l'ultima a destra delle (56.1) nell'Eq. (56), si ricava una rappresentazione alternativa del *Teorema di Stokes* strutturalmente significativa, soprattutto, in Elettrodinamica,

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \cdot \mathbf{F} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (57)$$

### Proposizione 12

Sia  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  un campo scalare condizioni richieste dal *Teorema di Stokes* vs. la superficie  $S \subset \Omega$ . Allora, se  $C \equiv \partial S$ , risulta che

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \Phi = \oint_C \Phi d\mathbf{r}. \quad \blacktriangle \quad (58)$$

### Dimostrazione

Preso il vettore (campo) ausiliario  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ , *uniforme* in  $\bar{S}$ , si calcola il prodotto vettoriale

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{U}) = \nabla \Phi \times \mathbf{U} + \cancel{\Phi \nabla \times \mathbf{U}} \equiv \nabla \Phi \times \mathbf{U}, \quad (59)$$

dal quale, si ha

$$\begin{aligned} \iint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times (\Phi \mathbf{U}) &= \oint_C \Phi \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r}, && \text{per il Teorema di Stokes, Eq. (56),} \\ &\equiv \mathbf{U} \cdot \oint_C \Phi d\mathbf{r}, && (59.1) \end{aligned}$$

poiché  $\mathbf{U}$  è *uniforme* in  $\bar{S}$  mentre  $\Phi$  e  $d\mathbf{r}$ , in generale, sono *variabili* lungo  $C \equiv \partial S$ ,

$$\begin{aligned} &= \iint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \Phi \times \mathbf{U}, && \text{dall'Eq. (59),} \\ &\equiv \mathbf{U} \cdot \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \Phi, && (59.2) \end{aligned}$$

per la *proprietà ciclica* del t-ps, Eq. (3), e per l'uniformità di  $\mathbf{U}$  in  $\bar{S}$ .

Poiché  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$  in  $C \equiv \partial S \equiv \bar{S}$ , la tesi segue confrontando le Eq.i (59.1) e (59.2), q. e. d. .

### Proposizione 13

Sia  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  un campo vettoriale soddisfacente le condizioni richieste dal *Teorema di Stokes* vs. la superficie  $S \subset \Omega$ , essendo  $C \equiv \partial S$ . Allora, risulta che

$$\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F} = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F} . \blacktriangle \quad (60)$$

### Dimostrazione

Introdotta il vettore (campo) ausiliario  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ , *uniforme* in  $\bar{S}$ , mediante la rappresentazione dell'Eq. (56) del *Teorema di Stokes*, si scrive

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{F} \times \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} \\ &\equiv \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} \equiv \mathbf{U} \cdot \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F} , \end{aligned} \quad (61)$$

avendo tenuto conto della *proprietà ciclica* del t-ps, Eq. (3).

Ora, applicando l'Eq. (35) in  $\bar{S}$ , risulta

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{U}) \equiv (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{U} + \cancel{(\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{F}} - \cancel{(\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{U}} ,$$

essendo  $\mathbf{U}$  uniforme in  $\bar{S}$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S ((\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}) \\ &= \mathbf{U} \cdot \iint_S (\nabla_{\mathbf{F}} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}) - (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\mathbf{S}) \\ &\equiv \mathbf{U} \cdot \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F} . \end{aligned} \quad (62)$$

Nel secondo membro destro dell'Eq. (62),  $\nabla_{\mathbf{F}}$  indica che  $\nabla$  opera *solo* su  $\mathbf{F}$  poiché  $d\mathbf{S}$  è un parametro *invariante* vs. la derivazione; poi, l'ultimo integrale di superficie viene dal penultimo per l'Idn. *fondamentale* (18) del t-pvs.

Poiché  $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$  in  $C \equiv \partial S$ , il confronto fra le Eq.i (61) e (62) porta alla tesi, q. e. d. .

□

Anche qui, analogamente all'Eq. (53), le uguaglianze espresse dalle Eq. (57), (58) e (60) possono essere sintetizzate in un'unica struttura formale di trasformazione fra *integrali di superficie* e *integrali di linea* corrispondenti,

$$\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) * \mathfrak{C} = \oint_C d\mathbf{r} * \mathfrak{C} , \quad (63)$$

dove  $\mathfrak{C}$  è un campo, *scalare* o *vettoriale*, e l'operazione  $*$  rappresenta una *qualsiasi* applicazione *lineare* ammissibile eseguita con l'operatore  $\nabla$ .

Così, l'associazione del *Teorema di Stokes*, nella forma convenzionale espressa dall'Eq. (56), con il *Teorema della media integrale*, genera una rappresentazione limite-integrale *di linea* del vettore  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$  lungo la frontiera  $C$  di una superficie *infinitesima*  $S$ , della quale,  $\mathbf{r}$  è un punto *interno*,

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \left( \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C d\boldsymbol{\xi} \right) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi} . \quad (64)$$

Nell'Eq. (64),  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  è il solito *versore-limite* normale a  $S$ , orientata *positivamente*, e corrisponde al verso di *circuitazione massima* locale di  $\mathbf{F}$ , i.e., quella corrispondente al senso di percorrenza di  $\partial S$  tale da lasciarsi  $S$  (aperta!) alla propria *sinistra*.

■

La propagazione di campi sia classici che quantistici porta, inesorabilmente, alla *Teoria delle Distribuzioni*. I procedimenti risolutivi possono assumere la forma di *problemi di Sturm-Liouville* e coinvolgere la *Funzione di Green* in intorno di raccordo irregolare o, peggio, di singolarità essenziale dei campi. Per queste, come è tipico in presenza di interfacce fisiche, il cambiamento di *multiplicità integrale*, e.g., da un integrale di volume a un integrale di superficie, risulta generalmente risolvibile o, al più, localmente perturbativo (effetto debole).

Non è tutto: molte equazioni integrali risolventi, dei tipi *di Fredholm* o *di Volterra*, e i vari metodi connessi (trasformate, convoluzioni, espansioni in serie di autofunzioni, metodo delle immagini, etc.) riflettono, in modo più o meno diretto, proprietà integrali di campo rappresentabili mediante i tre *Teoremi* (o *Identità*) *di Green*, probabilmente, le ramificazioni più profonde del *Teorema di Gauss*. La struttura *vettoriale* dei *Teoremi di Green*, peraltro semplice, è presentata qui di seguito.

### Il 1° Teorema di Green

Si consideri la coppia di campi *scalari*  $\{\phi, \psi\} \subset \mathcal{C}^2(\Omega)$ , con  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$ , e sia  $S = \partial\Omega$ . Allora, vale l'uguaglianza

$$\iiint_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3 r = \oiint_S \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S}. \quad \blacktriangle \quad (66)$$

**Dimostrazione**

L'Idn. vettoriale (31) applicata al vettore  $\phi \nabla \psi$  dà

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla \cdot \nabla \psi \equiv \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi.$$

Integrando sulla regione  $\Omega$  e applicando il *Teorema di Gauss*, risultano le uguaglianze

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) d^3 r &= \iiint_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3 r \\ &= \oiint_S \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

e, quindi, la tesi, dal loro confronto, q. e. d. . ■

### Il 2° Teorema di Green

È data, ancora, la coppia di campi *scalari*  $\{\phi, \psi\} \subset \mathcal{C}^2(\Omega)$ , con  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$ , e sia  $S = \partial\Omega$ . Allora, vale l'uguaglianza

$$\iiint_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3 r = \oiint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}. \quad \blacktriangle \quad (67)$$

**Dimostrazione**

Scambiando  $\phi \rightleftharpoons \psi$  nell'Eq. (66), si scrive

$$\iiint_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) d^3 r = \oiint_S \psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S}. \quad (68)$$

Si ottiene la tesi sottraendo membro a membro l'Eq. (68) dall'Eq. (66), q. e. d. . ■

### Il 3° Teorema di Green

Assegnata la coppia di campi *vettoriali*  $\{\mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}), \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})\} \subset \mathcal{C}^2(\Omega)$ , essendo  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  e  $S = \partial\Omega$ , vale l'uguaglianza (*equivalente vettoriale del 2° Teorema di Green*)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \nabla^2 \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \nabla^2 \mathbf{F}) d^3r &= \\ &= \oiint_S (\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})) \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (69)$$

nella quale,  $\nabla^2 \mathbf{F}$  e  $\nabla^2 \mathbf{G}$  sono espandibili mediante l'Eq. (34.1).  $\blacktriangle$

**Dimostrazione**

Poiché, dall'Eq. (31) e, rispettivamente, dal *Teorema di Gauss*, risultano le uguaglianze

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G})) d^3r = \begin{cases} \iiint_{\Omega} ((\nabla \cdot \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \mathbf{F} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G})) d^3r \\ \oiint_S \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S} \end{cases},$$

queste equivalgono all'identità

$$\iiint_{\Omega} ((\nabla \cdot \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \mathbf{F} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G})) d^3r \equiv \oiint_S \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (70)$$

dalla quale, scambiando  $\mathbf{F} \rightleftharpoons \mathbf{G}$ , si determina l'identità associata

$$\iiint_{\Omega} ((\nabla \cdot \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})) d^3r = \oiint_S \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (71)$$

Poi, sottraendo l'Eq. (71) dall'Eq. (70) membro a membro, si arriva all'equazione

$$\iiint_{\Omega} ((\mathbf{F} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})) d^3r = \oiint_S (\mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})) \cdot d\mathbf{S}. \quad (72)$$

Analogamente, dall'Eq. (33) e, rispettivamente, dal *Teorema di Gauss*, risultano le uguaglianze

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})) d^3r = \begin{cases} \iiint_{\Omega} ((\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G})) d^3r \\ \oiint_S \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S} \end{cases},$$

corrispondenti all'identità

$$\iiint_{\Omega} ((\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G})) d^3r \equiv \oiint_S \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (73)$$

Scambiando  $\mathbf{F} \rightleftharpoons \mathbf{G}$  nell'Eq. (73), si determina l'uguaglianza analoga

$$\iiint_{\Omega} ((\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})) d^3r = \oiint_S \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (74)$$

Poi, sottraendo l'Eq. (73) dall'Eq. (74) membro a membro, si ottiene l'identità ulteriore

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} ((\mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})) d^3r &= \\ &= - \oiint_S (\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})) \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (75)$$

Infine, sommando le Eq.i (72) e (75) membro a membro e, sostituendo le espansioni

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv \nabla^2 \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) \equiv \nabla^2 \mathbf{G},$$

secondo l'Eq. (34.1), si arriva alla tesi, i.e., all'Eq. (69), q. e. d. .

■■■

## Proprietà Vettoriali dei Campi Potenziali

Si considerino i due risultati *fondamentali* seguenti:

### Proposizione 14

Sono dati il campo scalare  $\Phi$  e il campo vettoriale  $\mathbf{A}$ , entrambi  $\in \mathcal{C}^2(\Omega)$ , con  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$ . Allora, si hanno le quantità *nulle generalmente* per  $\mathbf{r} \in \Omega$

$$\nabla \times \nabla \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (75)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (76)$$

**Dimostrazione**

Espandendo dettagliatamente le espressioni dei campi dedotti, vettoriale  $\nabla \times \nabla \Phi$  e scalare  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ , in coordinate rettangolari, (i.e.,  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ ), entrambi gli asserti (75) e (76) sono veri generalmente in  $\Omega$ , dove vale il *Teorema di Schwarz* sia per  $\Phi$  che per  $\mathbf{A}$ , q. e. d. .

[cfr/c Eq. (§.15), p. 17]

■

### Proposizione 15

Se i campi vettoriali  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono legati dalla relazione  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , allora, in generale,  $\mathbf{A}$  *non è* determinabile da  $\mathbf{B}$  in modo unico.

**Dimostrazione**

Sia  $\Phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  un campo scalare arbitrario e si definisca il campo vettoriale

$$\mathbf{A}^* := \mathbf{A} + \nabla \Phi. \quad (77)$$

Tenendo conto dell'Eq. (75), risulta

$$\nabla \times \mathbf{A}^* = \nabla \times \mathbf{A} + \cancel{\nabla \times \nabla \Phi} \equiv \mathbf{B}. \quad (78)$$

In altri termini, poiché  $\mathbf{B}$  può essere espresso anche come  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^*$ , con  $\Phi$  *arbitrario*, il campo  $\mathbf{A}$  *non è determinabile* dal campo  $\mathbf{B}$  *in modo unico*, q. e. d. .

■

### Condizioni Topologiche 2

- Una regione  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  si definisce *connessa* se due suoi punti qualsiasi (distinti o no) possono costituire gli estremi di una linea (aperta o chiusa), ogni punto della quale appartiene a  $\Omega$ .
- Una regione  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  si dice *semplicemente connessa* se esiste *almeno* un punto di  $\Omega$  al quale *ogni* curva chiusa contenuta in  $\Omega$  possa *contrarsi con continuità*.  
Inoltre, la *connessione semplice* implica che ogni superficie chiusa  $S \subset \Omega$  è frontiera di un sottoinsieme *proprio* di  $\Omega$ , i.e.,  $S \equiv \partial\Omega_0 \wedge \Omega_0 \subseteq \Omega$ .

□

## Il Potenziale Scalare

Sia  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  una regione *semplicemente connessa*. Una funzione **potenziale scalare**  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  è una funzione scalare *monodroma* (i.e., a-un-sol-valore) in  $\Omega$ , associato alla quale, esiste un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  almeno continuo in  $\Omega$ , che soddisfa la relazione

$$\mathbf{F} \equiv \nabla \Phi. \quad (79)$$

In tali circostanze, si dice che il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è *conservativo*.

### Campi Vettoriali Irrotazionali

La *conservatività* di un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e l'*esistenza* di una funzione scalare potenziale  $\Phi$  associata sono proprietà che si implicano *biunivocamente*.

Pertanto, in questo caso, scelto un cammino *aperto arbitrario*  $C$  di estremi  $P_0$  e  $P$  o un cammino *chiuso arbitrario*  $\bar{C}$ , entrambi contenuti in  $\Omega$  e aventi versori tangenti locali rispettivi  $\hat{\mathbf{t}}$ , valgono le relazioni integrali (la prima, in forme equivalenti varie)

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &\equiv \int_C \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}/ds) ds \equiv \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds \equiv \\ &\equiv \int_C \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_{P_0}^P d\Phi = \Phi(P) - \Phi(P_0), \end{aligned} \quad (80.1)$$

$$\oint_{\bar{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (80.2)$$

Un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  si dice *irrotazionale* nella regione  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  se

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (81)$$

generalmente in  $\Omega$ .

Se  $\Omega$  è *semplicemente connesso*, le due equazioni seguenti sono equivalenti all'Eq. (81) e ciascuna è *necessaria e sufficiente* per l'*irrotazionalità* di  $\mathbf{F}$  in  $\Omega$ :

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi, \quad (81.1)$$

dove  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  è un campo scalare, e

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (81.2)$$

essendo  $C$  una curva *semplice e chiusa*.

L'Eq. (80.1) segue dall'Eq. (75) mentre l'Eq. (81.2) proviene dalla stessa Eq. (81.1) poiché, in tal caso, risulta immediatamente

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_{P_0}^{P_0} d\Phi = 0.$$

Come conclusione, vale la

### Proposizione 16

*se  $\Omega$  è semplicemente connesso, allora, condizione necessaria e sufficiente affinché il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  sia conservativo è che esso sia irrotazionale.*

■

## Il Potenziale Vettore

Una funzione **potenziale vettore**  $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ , essendo  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  una regione 3-dim *semplicemente connessa*, è una funzione vettoriale monodroma, associato alla quale, esiste un campo vettoriale regolare  $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  che soddisfa la relazione

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (82)$$

Con le Eq.i (77) e (78), è verificata la *non-unicità* di  $\mathbf{A}$  vs.  $\mathbf{B}$ .

### Campi Vettoriali Solenoidali

Un campo vettoriale  $\mathbf{B}$  è detto *solenoidale* nella regione  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  *semplicemente connessa* se, generalmente in  $\Omega$ , risulta che  $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (83)$$

Le due equazioni seguenti sono equivalenti all'Eq. (83) e ciascuna è *necessaria e sufficiente* per la *solenoidalità* di  $\mathbf{B}$  in  $\Omega$ :

$$\exists \mathbf{A} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (83.1)$$

$$\forall S \subset \Omega \wedge S \text{ compatta (i.e., } S \equiv \bar{S} \Rightarrow)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (83.2)$$

L'Eq. (83.1) segue dall'Eq. (76) mentre l'Eq. (83.2) è una conseguenza del *Teorema di Gauss*, con  $S \equiv \partial\Omega_0 \wedge \Omega_0 \subseteq \Omega$ , tenendo conto, poi, dell'Eq. (83),

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega_0} \nabla \cdot \mathbf{B} d^3r \equiv 0.$$

□

Al problema della determinazione non-ambigua di un campo potenziale vettore  $\mathbf{A}$  (scelta del *gauge* per  $\mathbf{A}$ ), risponde la seguente

### Condizione sufficiente di Unicità di un Campo Vettoriale (Teorema)

Si considerino il *volume hilbertiano*  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$ , per il quale sia  $S \equiv \partial\Omega$ , e un campo vettoriale  $\mathbf{K} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ .

Se la componente *normale* di  $\mathbf{K}$  è specificata generalmente in  $S$  e se le quantità derivate  $\nabla \cdot \mathbf{K}$  e  $\nabla \times \mathbf{K}$  sono specificate generalmente in  $\Omega$ , allora,  $\mathbf{K}$  è determinato generalmente *in modo unico* in  $\bar{\Omega}$ . ▲

#### Dimostrazione

Ragionando *per assurdo*, si supponga che  $\exists$  un altro campo vettoriale,  $\mathbf{A} \neq \mathbf{K}$ , che soddisfa le stesse condizioni del teorema. Allora, indicato con  $\hat{\mathbf{n}}$  il versore normale a  $S$ , segue che

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad \wedge \quad \nabla \times \mathbf{K} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{generalmente in } \Omega \text{ e}$$

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{generalmente in } S.$$

Poi, definito il campo-differenza  $\Sigma := \mathbf{K} - \mathbf{A}$  ( $\neq \mathbf{0}$ ), valgono le uguaglianze

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \Sigma &\equiv \nabla \cdot \mathbf{K} - \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \\ \nabla \times \Sigma &\equiv \nabla \times \mathbf{K} - \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (84.1)$$

generalmente in  $\Omega$  e

$$\Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \equiv \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (84.2)$$

generalmente in  $S$ .

Poiché  $\nabla \times \Sigma = \mathbf{0}$ , il campo  $\Sigma$  è irrotazionale generalmente in  $\Omega$ , i.e.,  $\exists$  un campo scalare  $\Phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  tale che sia, generalmente in  $\Omega$ ,

$$\Sigma = \nabla \Phi. \quad (85)$$

Ora, dalla prima delle uguaglianze (84.1) e dall'uguaglianza (84.2), si trova che

$$\nabla \cdot \Sigma \equiv \nabla^2 \Phi = 0 \quad (86.1)$$

generalmente in  $\Omega$  e

$$\Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \equiv \nabla \Phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (86.2)$$

generalmente in  $S$ .

Poi, assegnando  $\psi \equiv \phi \equiv \Phi$  nel 1° Teorema di Green, Eq. (66), risulta

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\Phi \nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) d^3 r &= \oiint_S \Phi \nabla \Phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &\equiv \iiint_{\Omega} \cancel{\Phi \nabla^2 \Phi} d^3 r + \iiint_{\Omega} \|\nabla \Phi\|^2 d^3 r, \end{aligned} \quad (87)$$

dove la cancellazione è dovuta al vincolo (86.1).

D'altra parte, la condizione (86.2) riduce l'Eq. (87) a  $\iiint_{\Omega} \|\nabla \Phi\|^2 d^3 r = 0$  e questo implica che sia

$\|\nabla \Phi\|^2 \equiv 0$ , i.e., che sia  $\mathbf{0} = \nabla \Phi \equiv \Sigma \equiv \mathbf{K} - \mathbf{A}$ .

Quindi, è  $\mathbf{K} \equiv \mathbf{A}$ , contro l'ipotesi per-assurdo, q. e. d. .

■■■

Una posizione cruciale per la comprensione della struttura di un campo vettoriale  $\mathbf{K} \in \mathcal{C}^1(\Omega')$ , con  $\Omega' \subseteq \mathfrak{H}^3$  e  $S' := \partial\Omega'$ , è occupata dal Teorema di Helmholtz. La sua presentazione richiede un risultato preliminare tecnicamente importante:

### Proposizione 17

Sia  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{r})$  una funzione di campo vettoriale, integrabile in  $\Omega' \subseteq \mathfrak{H}^3$ , con  $S' := \partial\Omega'$ .

Vale la rappresentazione integrale

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \mathbf{K}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3 r', \quad (88)$$

dove va inteso che l'operatore laplaciano  $\nabla^2$  agisce solo sulla coordinata  $\mathbf{r}$ , la coordinata di campo, lasciando inattiva la coordinata di integrazione  $\mathbf{r}'$ , identificabile come la coordinata di sorgente (v. P. 16-17), secondo la terminologia dell'Elettrodinamica. ▲

## Dimostrazione

Con un calcolo formale diretto (v. Eq. (‡.14), P.17), si ottiene

$$\nabla^2 \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} = 3 \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|^3} - \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|^3} \right). \quad (89)$$

Per  $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ , il valore dell'espressione derivata (89) è 0; altrimenti, per  $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}$ , si determina una forma di indecisione del tipo  $[\infty - \infty]$ .

Senza perdita di generalità, si consideri la sfera di raggio *variabile*  $R \equiv \|\mathbf{R}\| \equiv \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|$ , centrata in  $\mathbf{r}$ , il cui volume sia  $\Omega'$  e la cui superficie sia  $S' \equiv \partial\Omega'$ .

Allora, applicando il *Teorema di Gauss* e osservando che, su  $S$ , è  $\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{R}}$ , risulta

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega'} \nabla^2 \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3r' &\equiv \iiint_{\Omega'} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} d^3r' \equiv \oiint_{S'} \nabla \frac{1}{R} \cdot d\mathbf{S}', \\ &\equiv \oiint_{S'} \nabla \frac{1}{R} \cdot \hat{\mathbf{R}} dS' = \oiint_{S'} \left( \hat{\mathbf{R}} \frac{d}{dR} \frac{1}{R} \right) \cdot \hat{\mathbf{R}} dS' = \oiint_{S'} \left( -\frac{1}{R^2} \right) dS'. \end{aligned}$$

L'uguaglianza ottenuta,

$$\iiint_{\Omega'} \nabla^2 \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3r' = \oiint_{S'} \left( -\frac{1}{R^2} \right) dS', \quad (90)$$

richiede un'analisi attenta: l'Eq. (89) fa sì che l'integrale *di volume* nell'Eq. (90) sia generalmente nullo in  $\Omega'$ , diventando, infatti, di valore *indecidibile* – se finito o infinito – per  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ , i.e., per  $R = 0$ . Invece, l'integrale *di superficie* nell'Eq. (90) è risolvibile facilmente in coordinate sferiche, per le quali,  $dS' \equiv R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , con  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Il suo valore è  $-4\pi$ , risultando generalizzato (o improprio) nel limite  $R \rightarrow 0$ .

Pertanto, l'Eq. (90) risulta verificata solo se, per  $R = 0$ , si rimuove l'indecisione nell'integrale di volume identificando, nel contesto della *Teoria delle Distribuzioni*,

$$\nabla^2 \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} \equiv -4\pi \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (91)$$

dove,  $\delta$  è il *Funzionale* (o *Distribuzione* o *Funzione generalizzata*) di Dirac.

□

Le due proprietà più elementari e frequenti del *funzionale*  $\delta$  di Dirac sono:

$$\delta(\xi - \xi_0) = \begin{cases} 0 & , \text{ per } \xi \neq \xi_0 \\ +\infty & , \text{ per } \xi = \xi_0 \end{cases}, \quad (92.1)$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\xi = f(\xi_0), \quad (92.2)$$

con  $\xi_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ .

□

Mediante le corrispondenze  $\xi \mapsto \mathbf{r}'$ ,  $\xi_0 \mapsto \mathbf{r}$ ,  $f \mapsto \mathbf{K}$ ,  $d\xi \mapsto d^3r'$ ,  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto \Omega'$  e con l'Eq. (91), l'Eq. fondamentale (92.2) riproduce esattamente l'Eq. (88), q. e. d. .

■

## Il Teorema di Helmholtz

Si considerino il volume *hilbertiano*  $\Omega' \subseteq \mathfrak{H}^3$ , per il quale si abbia  $S' \equiv \partial\Omega'$ , e un campo vettoriale qualsiasi  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}')$ .

Allora,  $\mathbf{K}$  può essere rappresentato *sempre* come la sovrapposizione di *due* parti, una *irrotazionale* e l'altra *solenoidale*, i.e.,

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) \equiv \nabla\Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (93)$$

Inoltre, se  $\bar{\Omega}' \equiv \mathfrak{H}^3$  ed è *almeno*  $\|\mathbf{K}(\mathbf{r})\| = O(r^{-2})$  e tutte le singolarità (*sorgenti* e *vortici*,  $\mathbf{r}'$ ) di  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$  sono confinate in una regione *finita*, valgono i limiti di *regolarità all'infinito*:

$$\lim_{\|\mathbf{r}'\| \rightarrow +\infty} \nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') = 0 \quad \wedge \quad \lim_{\|\mathbf{r}'\| \rightarrow +\infty} \nabla' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}. \quad \blacktriangle$$

### Dimostrazione

Dall'Eq. (88), tenendo conto che  $\nabla^2$  opera sulla *sola* coordinata di campo  $\mathbf{r}$  e, quindi, può *commutare* in  $\mathfrak{H}^3$  con l'operatore integrale, è corretto scrivere

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) \equiv -\nabla^2 \iiint_{\Omega'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{4\pi \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3r' \equiv -\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (94)$$

Ora, se si ridispone l'Idn. (34) nella forma

$$-\nabla^2 \mathbf{F} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}), \quad (95)$$

il confronto fra gli argomenti di  $\nabla^2$ , rispettivamente, nelle Eq.i (94) e (95), dà immediatamente

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{r}) &\equiv -\nabla \left( \nabla \cdot \iiint_{\Omega'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{4\pi \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3r' \right) + \nabla \times \left( \nabla \times \iiint_{\Omega'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{4\pi \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3r' \right) \\ &\equiv \nabla\Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (96)$$

e, da questa rappresentazione, alle identificazioni evidenti dei campi potenziali associati a  $\mathbf{K}$ ,

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla \cdot \iiint_{\Omega'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{4\pi \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3r', \quad (96.1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \iiint_{\Omega'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{4\pi \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3r'. \quad (96.2)$$

Pertanto, l'esistenza di due parti di  $\mathbf{K}$ , una *irrotazionale*,  $\nabla\Phi$ , l'altra *solenoidale*,  $\nabla \times \mathbf{A}$ , è provata *costruttivamente*, sulla base delle Idn. generali (75) e (76).

Il *Teorema di unicità* garantisce che  $\mathbf{K}$  è determinato *in modo unico* in  $\bar{\Omega}'$  mediante le Eq. (96.1) e (96.2) dei suoi campi potenziali costitutivi, ottenuti integrando su tutte le singolarità (*sorgenti* o *vortici*) eventualmente presenti in  $\bar{\Omega}'$ . ■

Circa i limiti di *regolarità all'infinito* di  $\mathbf{K}$ , i.e., quando sia  $\bar{\Omega}' \equiv \mathfrak{H}^3$  ma non vi siano singolarità (*sorgenti* o *vortici*) in  $S' \equiv \partial\Omega'$  *asintoticamente distante*, si trovano rappresentazioni semplificate di  $\Phi$  e di  $\mathbf{A}$  nei modi seguenti:

poiché  $\nabla$  opera *solo* sulla coordinata  $\mathbf{r}$  di campo, con l'effetto, quindi, che  $\nabla \equiv -\nabla'$ , v. Eq. (§.5.1), p. 16, l'Idn. (31) fornisce lo sviluppo dell'integrale (96.1),

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &\equiv \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} \mathbf{K}(\mathbf{r}') \right) d^3 r' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \left( \left( \nabla \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') + \frac{1}{R} (\nabla \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}')) \right) d^3 r' \\
&\equiv -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \left( \nabla' \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') d^3 r' \\
&= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \left( \nabla' \cdot \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{R} - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') \right) d^3 r' \\
&= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{R} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{R} d^3 r', \quad \text{per il Teorema di Gauss.}
\end{aligned}$$

Se è almeno  $\|\mathbf{K}\| = O(r^{-2})$  e tutte le singolarità *di sorgente* di  $\mathbf{K}$  sono confinate in una regione *finita*  $V$ , allora  $\lim_{\|\mathbf{r}'\| \rightarrow +\infty} \mathbf{K}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ , i.e., che l'integrale *di superficie* precedente diventa trascurabile quando si sceglie  $S' \gg \partial\Omega'$ . Pertanto,

$$\Phi(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3 r', \quad (96.3)$$

con la condizione implicita che risulti  $\lim_{\|\mathbf{r}'\| \rightarrow +\infty} \nabla' \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') = 0$ , i.e., che la *densità di sorgente* di  $\mathbf{K}$  sia *asintoticamente infinitesima*.

Analogamente al procedimento seguito per  $\Phi(\mathbf{r})$ , si calcola

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &\equiv \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \nabla \times \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} \mathbf{K}(\mathbf{r}') \right) d^3 r' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \left( \left( \nabla \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') + \frac{1}{R} (\nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r}')) \right) d^3 r' \\
&\equiv \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{R} d^3 r' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{1}{R} \nabla' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \nabla' \times \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{R} d^3 r' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{R} d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{R} \times d\mathbf{S}', \quad \text{dall'Idn. integrale (51).}
\end{aligned}$$

Ancora, se è almeno  $\|\mathbf{K}\| = O(r^{-2})$  e tutte le singolarità *di vortice* di  $\mathbf{K}$  sono confinate in una regione *finita*, segue che  $\lim_{\|\mathbf{r}'\| \rightarrow +\infty} \mathbf{K}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ , i.e., che, se si sceglie  $S' \gg \partial\Omega'$ , allora, l'integrale *di superficie* precedente diventa trascurabile. Quindi,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} d^3 r', \quad (96.4)$$

con la condizione implicita che risulti  $\lim_{\|\mathbf{r}'\| \rightarrow +\infty} \nabla' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ , i.e., che la *densità di circuitazione* di  $\mathbf{K}$  sia *asintoticamente infinitesima*. ■

### Esercizi III

#### Esercizio 11

Si mostri che se  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  sono campi *irrotazionali* in una stessa regione  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$ , allora, il campo  $\mathbf{H} := \mathbf{F} \times \mathbf{G}$  è *solenoidale* in  $\Omega$ .

#### Esercizio 12

È data la coppia di campi scalari  $\{\phi, \psi\} \subset \mathcal{C}^2(\Omega)$ , con  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  e  $\Omega$  *semplicemente connessa*. Si concluda che il campo dedotto  $\mathbf{F} := \nabla\phi \times \nabla\psi$  è *solenoidale* in  $\Omega$ .

#### Esercizio 13

Si verifichi che se  $\exists$  generalmente in  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  un campo scalare  $\Psi \neq 0$  e un campo vettoriale  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$  tali che  $\nabla \times (\Psi \mathbf{F}) = \mathbf{0}$ , allora, generalmente, si ha che  $\nabla \times \mathbf{F} \perp \mathbf{F} \wedge \nabla \times \mathbf{F} \perp \nabla \Psi$ .

[cfr/c [8], Eser. 10]

#### Esercizio 14

Sia  $\mathbf{U}$  un vettore (campo) ausiliario *uniforme*.  
Si verifichino i risultati integrali

$$13.1 \quad \oint_C \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} = 0; \quad 13.2 \quad \oint_C \mathbf{U} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

#### Esercizio 15

Usando la rappresentazione integrale (54) di  $\nabla$ , si verifichi l'uguaglianza (32),

$$\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = \phi (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{F}.$$

#### Esercizio 16

Si dimostri,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$ , con  $\Omega \subseteq \mathfrak{H}^3$  e  $S \equiv \partial\Omega$ , che

$$\iiint_{\Omega} \frac{d^3r}{r^\alpha} = \frac{1}{3-\alpha} \iint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{\alpha-1}} \cdot d\mathbf{S}.$$

#### Esercizio 17

Sia  $S$  una superficie *aperta* e  $C \equiv \partial S$ , percorsa in senso *positivo* (simbolo integrale *anti-orario*).  
Si verifichi che

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \iint_S d\mathbf{S} \quad (\equiv 2 \iint_S \hat{\mathbf{n}} dS).$$

[Sugg.: Si applichi il *Teorema di Stokes* all'integrale  $\oint_C (\mathbf{r} \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{U}$  è un vettore (campo) *uniforme* in  $\bar{\Omega}$ , e, quindi, si espanda  $\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{U})$  ....]

**Esercizio 18**

Se  $U$  è un campo vettoriale *uniforme* in  $\bar{\Omega} \subseteq \mathfrak{H}^3$ , con  $S \equiv \partial\Omega$ , si dimostri che

$$\oiint_S (U \times \mathbf{r}) \times d\mathbf{S} = 2\Omega U.$$

**Esercizio 19**

Come per l'Esercizio 17, sia  $S$  una superficie *aperta* e  $C \equiv \partial S$ .

Si verifichino i risultati seguenti:

$$19.1 \quad \oiint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \oint_C r^2 d\mathbf{r},$$

$$19.2 \quad \oint_C \phi dl = -\int_S (\nabla\phi) \times d\mathbf{S}.$$

**Esercizio 20**

Si dimostri che ogni campo vettoriale *uniforme*  $U$  ha associati a sé un *potenziale scalare*  $\Phi = U \cdot \mathbf{r}$  e un *potenziale vettore*  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} U \times \mathbf{r}$ .

**Esercizio 21**

Si dimostri che, se  $\Omega \subset \mathfrak{H}^3$  è un volume chiuso dalla superficie  $S \equiv \partial\Omega$ , allora,

$$21.1 \quad \oint_S \phi \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla\phi + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})) d^3r,$$

$$21.2 \quad \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) = \int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3r.$$

**Esercizio 22**

Sia  $S$  una superficie *aperta* e  $C \equiv \partial S$ . Si verifichi che

$$\oint_C \phi(\nabla\psi) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\phi \times \nabla\psi) \cdot d\mathbf{S}.$$

■■■

**Bibliografia**

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: [https://www.cm-physmath.net/libr\\_page.html](https://www.cm-physmath.net/libr_page.html).

- [1] LASS, H., *Vector and Tensor Analysis*, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1950);
- [2] BORISENKO, A. I., - TARAPOV, I. E., *Vector and Tensor Analysis with Applications*, PRENTICE-HALL, INC. (1968);
- [3] SPIEGEL, M. R. - LIPSCHUTZ, S. - SPELLMAN, D., *Vector Analysis*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 2<sup>ND</sup> ED., MCGRAW-HILL EDU. (2009);
- [4] HSU, H. P., *Applied Vector Analysis*, BOOKS FOR PROFESSIONALS, HBJ PUBL.S (1984);
- [5] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2<sup>ND</sup> ED., CH. 6, PRENTICE-HALL, INC. (1976);
- [6] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7<sup>TH</sup> ED., CH. 3, ACADEMIC PRESS (2013);
- [7] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, VOL. **2**, CAP. 6, ZANICHELLI(-MASSON) (1994; RIST. 1998);
- [8] L'AUTORE (CM) [math-notebook PDF],  
*Sistemi di coordinate Curvilinee Ortogonali in 3-dim.*

■■■