

aggiornamento
luglio 2019

Problemi e Quesiti scritti risolti di **Esami di Stato di Liceo Scientifico**

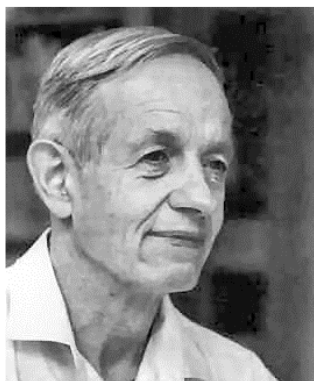
(2015 \ 2019 - Mod. UNICO)

da: © Zanichelli Editore S. p. A.

www.cm-physmath.net

CM Portable MATH Notebook Series™





John Forbes Nash (1928-2015)

A. S. 2014-2015

ESAME DI STATO 2015
TEMA DI MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

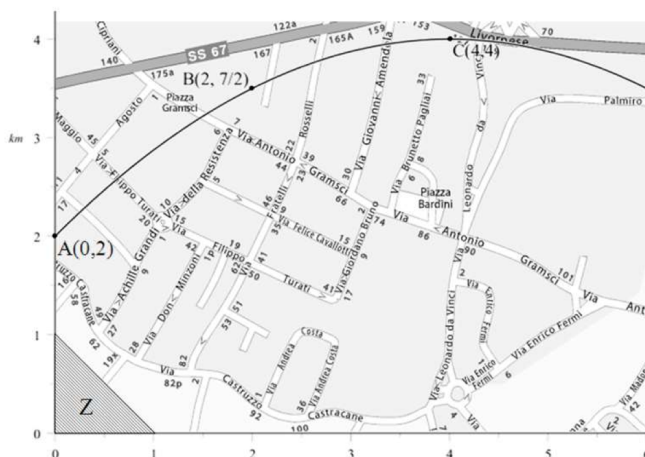
Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate dall'estero, un canone fisso da 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. Individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:



La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A , B e C , dagli assi x e y , e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la “Z”, rappresenta un’area non coperta dal segnale telefonico dell’operatore in questione.

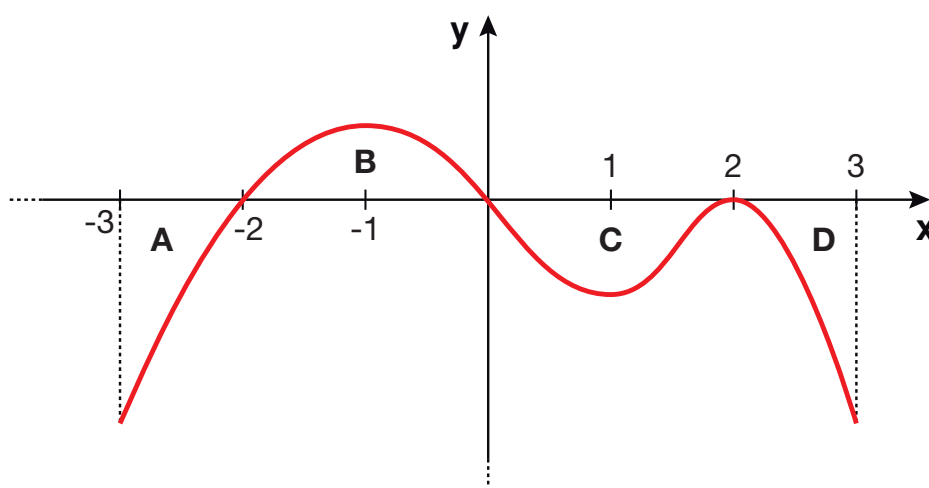
3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A , B e C . Sul sito web dell’operatore compare la seguente affermazione: “nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio”; verifica se effettivamente è così.

L’operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegate il significato nella situazione concreta.

Problema 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; 3]$, il grafico Γ , disegnato in figura. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A , B , C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3; 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^1 h(x) dx$.

Questionario

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa “al più” due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa “almeno” due volte?
4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.
6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (x - 4)^2 + (x - 5)^2,$$

determinare il minimo di f .

7. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r , verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \rightarrow \infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}, x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$ e $D(1; 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

1. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati nel mese considerato, la spesa totale mensile in euro è espressa dalla funzione

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}.$$

La variabile x può assumere valori tra un minimo di 0 minuti e un massimo del numero di minuti di un mese commerciale di 30 giorni, cioè 43 200 minuti.

La funzione f rappresenta un modello lineare crescente, nel quale l'intercetta 10 indica il costo fisso iniziale e la pendenza $\frac{1}{10}$ indica il costo al minuto.

Il costo medio al minuto è espresso dal seguente rapporto:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

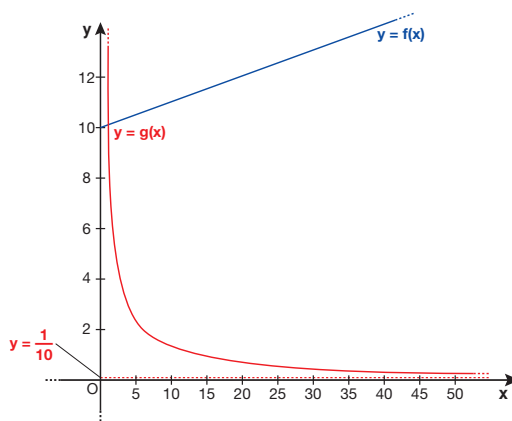
ovvero

$$g(x) = \frac{x + 100}{10x}.$$

Il dominio della funzione g è uguale a quello della funzione f privato dello 0.

Il grafico della funzione omografica g , nel suo dominio naturale, è un'iperbole con l'asse y come asintoto verticale e la retta $y = \frac{1}{10}$ come asintoto orizzontale.

Rappresentiamo il grafico delle funzioni considerate.



Per $x > 0$, la funzione g tende decrescendo al valore $\frac{1}{10}$ senza assumere mai tale valore. Quindi nel dominio $]0; +\infty[$ la funzione g non ha estremanti relativi.

Se tuttavia consideriamo il dominio $]0; 43\,200]$ imposto dalla situazione concreta che si riferisce a un periodo mensile, la funzione g ammette un minimo assoluto (e quindi anche relativo) nell'estremo destro del suo dominio.

Ad ogni modo dal punto di vista dell'analisi dei consumi, l'errore che si commette a lavorare nel dominio $]0; +\infty[$ anziché nel dominio $]0; 43\,200]$ è trascurabile, quindi nel seguito considereremo semplicemente $x > 0$.

La decrescenza della funzione g sottolinea come il costo medio al minuto diminuisca all'aumentare dei minuti di conversazione effettuati.

2. Se x_0 rappresenta il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, e quindi $g(x_0)$ il relativo costo medio per minuto, allora il valore x_1 richiesto indica il numero di minuti di conversazione che dimezzano il costo medio $g(x_0)$. Di conseguenza dovrà necessariamente essere $x_1 > x_0$.

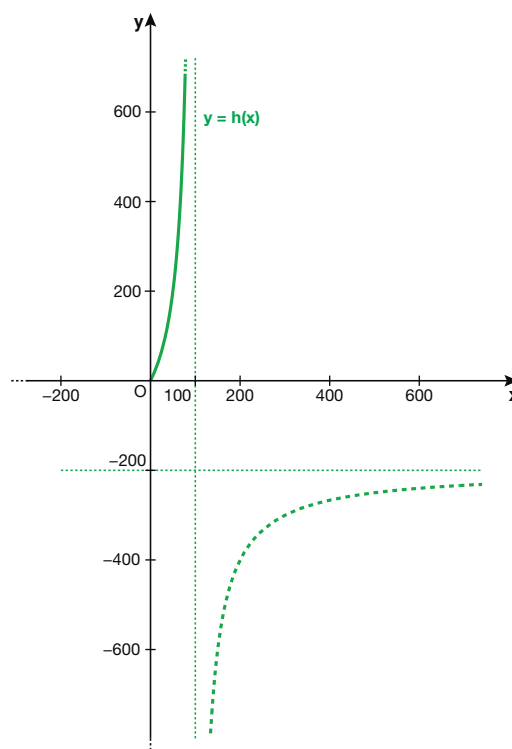
Determiniamo x_1 in funzione di x_0 .

$$\begin{aligned}
 g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} &\Leftrightarrow \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0} \\
 &\Leftrightarrow 2x_0(x_1 + 100) = x_1(x_0 + 100) \\
 &\Leftrightarrow x_1(x_0 + 100) - 2x_0x_1 = 200x_0 \\
 &\Leftrightarrow x_1(x_0 + 100 - 2x_0) = 200x_0 \\
 &\Leftrightarrow x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}
 \end{aligned}$$

La funzione che esprime la dipendenza di x_1 da x_0 ha dunque espressione:

$$h(x) = \frac{200x}{100 - x}.$$

Nel dominio naturale il grafico di tale funzione omografica è un'iperbole di asintoti $x = 100$ e $y = -200$. Riferita al contesto reale ne rappresentiamo il grafico solo per $x > 0$.



Poiché sia le ascisse sia le ordinate rappresentano minuti di conversazione, solamente il ramo positivo ha un significato reale.

Il valore 100, che individua l'asintoto verticale, è esattamente il numero di minuti di conversazione che hanno come costo medio $g(100) = \frac{1}{5} = 0,2$, esattamente il doppio di $\frac{1}{10}$, costo medio asintotico. Raggiunti o superati i 100 minuti di conversazione, il costo medio non è quindi più dimezzabile. Dunque il dominio che modella la situazione reale è $]0; 100[$. D'altra parte più ci avviciniamo ai 100 minuti di conversazione, più il tempo x_1 necessario a dimezzare il costo al minuto tende a diventare infinitamente elevato, da cui l'andamento asintotico della funzione considerata.

3. Cerchiamo una funzione del tipo

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

il cui grafico passa per i punti $A(0; 2)$, $B(2; \frac{7}{2})$ e $C(4; 4)$.

Risolviamo il sistema ottenuto sostituendo all'equazione della funzione le coordinate dei punti noti.

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

la cui soluzione è la terna

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

La funzione che descrive il margine superiore della zona considerata è dunque

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$$

con $x \in [0; 6]$.

Osserviamo che la funzione descrive un arco di parabola il cui vertice è proprio il punto C , in accordo con quanto suggerisce la figura.

L'area della zona considerata, ovvero l'area sottesa dalla funzione p nell'intervallo $[0; 6]$, vale:

$$A_{\text{totale}} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2 \right) dx = \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^6 = 21 \text{ km}^2$$

La regione Z priva di copertura ha area $0,5 \text{ km}^2$, pertanto la regione effettivamente coperta dal segnale ha area $A_{\text{coperta}} = 20,5 \text{ km}^2$.

Osserviamo che:

$$\frac{A_{\text{coperta}}}{A_{\text{totale}}} = \frac{20,5}{21} \simeq 0,976 = 97,6\%$$

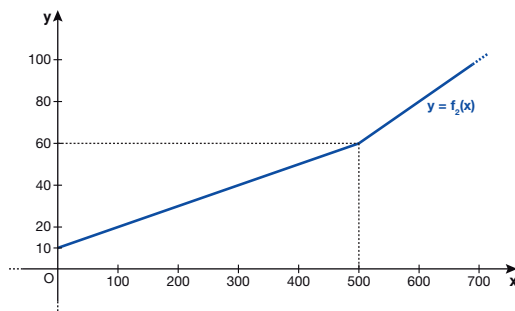
Tale rapporto è quindi superiore alla copertura dichiarata dal gestore (96%). L'affermazione sul sito web sottostima l'effettiva copertura, ma la differenza è a vantaggio del consumatore.

4. Dopo la modifica del piano tariffario le funzioni diventano definite per casi, in particolare l'espressione della spesa totale dopo x minuti di conversazione diventa una funzione lineare crescente a tratti di equazione:

$$f_2(x) = \begin{cases} 10 + \frac{x}{10} & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 10 + \frac{x}{10} + \frac{x - 500}{10} = \frac{x - 200}{5} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

La nuova funzione è continua in tutto il suo dominio, anche in $x = 500$, dove limite destro e sinistro coincidono col valore $f_2(500) = 60$.

Non è invece derivabile in tale punto in quanto la derivata sinistra è $\frac{1}{10}$, mentre la derivata destra vale $\frac{1}{5}$. La funzione f_2 è quindi derivabile in ogni punto del dominio tranne in $x = 500$ dove è presente un punto angoloso.

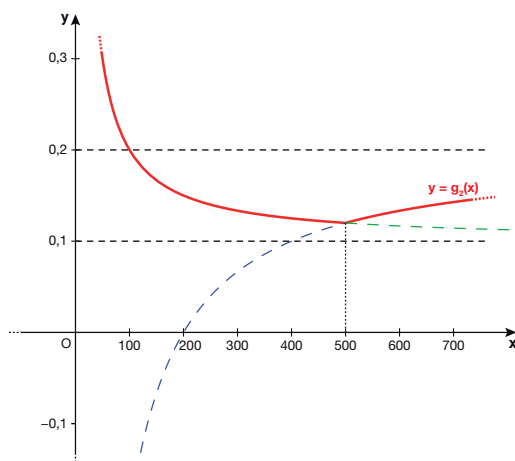


Il costo medio al minuto aggiornato alla nuova tariffa diventa:

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)}{x} = \begin{cases} \frac{x+100}{x} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ \frac{10x+200}{5x} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

Questa funzione è continua in ogni punto del dominio: anche in $x = 500$, dove vale $g_2(500) = \frac{3}{25} = 0,12$.

Il grafico di tale funzione è rappresentato da due rami di iperbole.



Rispetto alla situazione precedente, g_2 presenta ora un nuovo asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{1}{5}$, è decrescente tra 0 e 500 e crescente per $x > 500$, con un minimo assoluto in $x = 500$ che è

un punto angoloso. La funzione non ha invece massimo assoluto né relativo.

Per quanto riguarda la derivata prima di g_2 , osserviamo che essendo $x = 500$ un punto angoloso di g_2 ne segue che la sua derivata non è definita in tale punto. Dunque in $x = 500$, la funzione g'_2 ha una singolarità con salto.

Inoltre tra 0 e 500, la concavità di g_2 è rivolta verso l'alto, quindi g''_2 è positiva e di conseguenza g'_2 è crescente per $x \in]0; 500[$. Per ragionamenti analoghi, possiamo concludere che g'_2 è decrescente per $x > 500$.

Potevamo pervenire alle stesse conclusioni con considerazioni analitiche calcolando e studiando la funzione

$$g'_2(x) = \begin{cases} -\frac{10}{x^2} & \text{se } 0 < x < 500 \\ \frac{40}{x^2} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

Nella situazione concreta, possiamo osservare che la funzione che descrive la spesa totale continua a crescere ma raddoppia la pendenza dopo i primi 500 minuti, perché da quel momento in poi raddoppia il costo al minuto.

Per quanto riguarda la funzione g_2 che descrive la spesa media al minuto notiamo che, come per il piano tariffario precedente, decresce per i primi 500 minuti, ma poi inverte la tendenza e cresce per avvicinarsi al nuovo costo unitario di 20 centesimi al minuto.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

1. La funzione $f(x)$ è polinomiale di grado almeno 4. Questo può essere dedotto in almeno tre modi diversi:

a) Punti d'intersezione con l'asse x . Dalla figura osserviamo che i punti di intersezione del grafico Γ con l'asse delle x sono 3, con ascisse $-2, 0, 2$. Queste corrispondono alle radici dell'equazione $f(x) = 0$:

- $x = -2$ e $x = 0$ sono soluzioni di molteplicità 1;
- $x = 2$ è di molteplicità pari (almeno 2).

Per il teorema di Ruffini, se un polinomio ammette come radice un numero reale a , allora è divisibile per il polinomio $(x - a)$. Applicandolo a $f(x)$, per ciascuna delle sue radici, e tenendo conto delle loro molteplicità, otteniamo:

$$f(x) = p(x)(x + 2)(x - 0)(x - 2)^{2m},$$

dove $p(x)$ è un polinomio non nullo (eventualmente costante) e m è un intero positivo. Ricordando che il grado di un polinomio (indicato con \deg) espresso come prodotto di polinomi è la somma dei gradi dei suoi fattori, concludiamo:

$$\deg f(x) = \deg p(x) + 1 + 1 + 2m \geq 4.$$

b) Punti stazionari. Poiché Γ presenta 3 tangenti orizzontali in corrispondenza di $x = -1, x = 1, x = 2$, la funzione $f(x)$ ammette 3 punti stazionari. Questi corrispondono alle radici dell'equazione $f'(x) = 0$. Analogamente a quanto detto al punto **a)**, per il teorema di Ruffini, possiamo scrivere:

$$f'(x) = q(x)(x + 1)(x - 1)(x + 2),$$

dove $q(x)$ è un polinomio non nullo (eventualmente costante). Dal momento che $\deg f(x) = \deg f'(x) + 1$ e $\deg f'(x) = \deg q(x) + 1 + 1 + 1 \geq 3$, possiamo concludere che $\deg f(x) \geq 4$.

c) **Punti di flesso.** Il grafico Γ cambia concavità almeno due volte: in $x = -1$ è rivolta verso il basso, in $x = 1$ è rivolta verso l'alto, in $x = 2$ è nuovamente rivolta verso il basso. Di conseguenza ci sono almeno due punti di flesso, uno nell'intervallo $] - 1; 1[$ e uno nell'intervallo $]1; 2[$. Essendo $f(x)$ polinomiale, e quindi derivabile due volte, la sua derivata seconda si annulla per due valori distinti di x . Per il teorema di Ruffini, $f''(x)$ è un polinomio di grado almeno 2. Quindi, poiché $\deg f(x) = \deg f''(x) + 2$ e $\deg f''(x) \geq 2$, possiamo concludere che: $\deg f(x) \geq 4$.

2. I punti stazionari della funzione $g(x)$ corrispondono ai punti in cui si annulla la sua derivata:

$$g'(x) = f(x) = 0,$$

cioè $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$. In particolare, un punto stazionario x è di massimo relativo per g se

$$g''(x) = f'(x) < 0$$

e ricordiamo che $f'(x)$ è negativa negli intervalli reali in cui $f(x)$ è decrescente. Quindi possiamo già concludere che $x = 0$ è un punto di massimo relativo per $g(x)$, poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) < 0$.

D'altra parte, osserviamo che:

- $f(-2) = 0$ ma $f'(-2) > 0$. Quindi $x = -2$ è un punto di minimo relativo per $g(x)$;
- $f(2) = 0$ ma $f'(2) = 0$ e $g'(x) = f(x) < 0$ per ogni x in un intorno opportuno di 2. Quindi $g(x)$ è decrescente in tale intorno e $x = 2$ è un punto di flesso orizzontale.

La funzione $g(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli in cui la sua derivata seconda è positiva. Dato che $g''(x) = f'(x)$, e $f'(x) > 0$ negli intervalli in cui $f(x)$ è crescente, basta guardare in figura per capire che ciò accade in $] - 3, -1[$ e in $]1, 2[$.

3. Sapendo che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e che $g(3) = -5$, possiamo applicare il teorema di Torricelli-Barrow a $f(x)$ sull'intervallo $[0, 3]$:

$$\int_0^3 f(x)dx = g(3) - g(0),$$

da cui

$$g(0) = -5 - \int_0^3 f(x)dx.$$

Ricordiamo che l'integrale definito di una funzione negativa è pari all'area, cambiata di segno, compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle x . Di conseguenza:

$$\int_0^3 f(x)dx = -C - D = -4.$$

Concludiamo che:

$$g(0) = -5 - (-4) = -1.$$

Ora consideriamo il limite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$.

Sostituendo il valore $x = 0$, il numeratore diventa $1 + g(0) = 1 + (-1) = 0$ e il denominatore $2 \cdot 0 = 0$. Il limite L è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo calcolarlo applicando il teorema di De L'Hospital. Infatti, numeratore e denominatore sono funzioni continue e derivabili, con il denominatore non nullo per $x \neq 0$. Il limite L , se esiste, è uguale al limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2}.$$

Osserviamo che il limite L esiste perché $f(x)$ è continua in $x = 0$ e ivi si annulla. Concludiamo quindi che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = 0$.

4. Per calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^1 h(x)dx = 3 \cdot \int_{-2}^1 f(2x + 1)dx,$$

effettuiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$2x + 1 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt,$$

da cui gli estremi $x = -2$ e $x = 1$ vengono, rispettivamente, trasformati in $t = -3$ e $t = 3$. L'integrale diventa allora:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 h(x)dx &= \frac{3}{2} \int_{-3}^3 f(t)dt = \\ &= \frac{3}{2} \left(\int_{-3}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt \right) = \\ &= \frac{3}{2}(-A + B - C - D) = \frac{3}{2}(-2 + 3 - 3 - 1) = \frac{3}{2}(-3) = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Per prima cosa cerchiamo di trovare il punto di tangenza tra la retta e il grafico della funzione f , che chiamiamo $(x_0; y_0)$. Per la condizione di tangenza si deve avere $f'(x_0) = -2$ (perché -2 è il coefficiente angolare della retta), con x_0 appartenente al secondo quadrante. Da questa condizione si ottiene

$$-2x_0^2 + 6 = -2$$

che risolta dà

$$x_0^2 = 4.$$

L'unica soluzione accettabile, dato che il punto cercato deve stare nel secondo quadrante, è $x_0 = -2$, da cui posso ricavare $y_0 = 9$ sostituendo x_0 nell'equazione della retta. Il punto di tangenza sarà quindi il punto $(-2; 9)$. Poiché conosciamo la derivata di f , possiamo trovare f a meno di una costante additiva c calcolando l'integrale indefinito

$$f(x) = \int f'(x) \, dx = \int (-2x^2 + 6) \, dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c.$$

Per trovare c , imponiamo che il punto $(-2; 9)$ appartenga al grafico della funzione. Deve quindi essere

$$f(-2) = 9,$$

cioè

$$-\frac{2}{3}(-8) + 6(-2) + c = 9,$$

da cui si ottiene

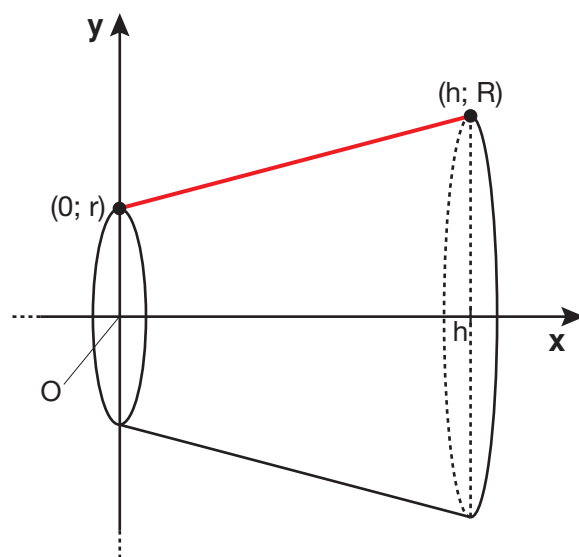
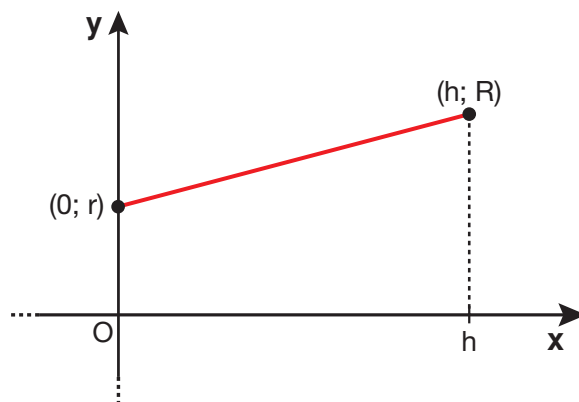
$$c = \frac{47}{3}.$$

La funzione cercata è quindi

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Per trovare il volume del tronco di cono basta calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando attorno all'asse x il trapezio delimitato dall'asse x e dalle rette $x = 0$ e $x = h$.



Calcoliamo l'equazione della retta passante per $(0; r)$ e $(h; R)$:

$$\frac{y - r}{R - r} = \frac{x}{h}$$

da cui

$$y = \frac{R - r}{h}x + r.$$

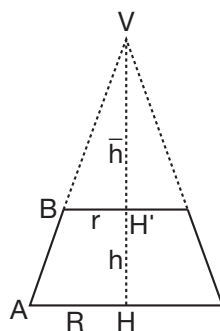
Per trovare il volume è ora sufficiente applicare la formula per il calcolo del volume di un solido di rotazione alla funzione

$$f(x) = \frac{R - r}{h}x + r$$

nell'intervallo $[0; h]$:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^2 dx = \pi \int_0^h \left[\frac{(R-r)^2}{h^2}x^2 + 2\frac{r(R-r)}{h}x + r^2 \right] dx \\
 &= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{3h^2}x^3 + \frac{r(R-r)}{h}x^2 + r^2x \right]_0^h \\
 &= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{3}h + r(R-r)h + r^2h \right] \\
 &= \pi h \left(\frac{R^2 - 2R \cdot r + r^2 + 3R \cdot r - 3r^2 + 3r^2}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r).
 \end{aligned}$$

Possiamo rispondere alla domanda anche ragionando da un punto di vista geometrico. Pensiamo al nostro solido come a un cono a cui è stato tolto un pezzo (sempre un cono) in alto.



I triangoli AHV e $BH'V$ sono simili perché sono rettangoli e hanno un angolo in comune. Quindi si ha

$$R : (h + \bar{h}) = r : \bar{h},$$

da cui si ricava

$$\bar{h} = h \frac{r}{R-r}.$$

Il volume del tronco di cono si può ottenere sottraendo dal volume del cono grande il volume del cono piccolo. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi R^2(h + \bar{h})}{3} - \frac{\pi r^2 \bar{h}}{3} = \\
 &= \frac{\pi}{3} \left[hR^2 + \frac{rh}{R-r}R^2 - \frac{rh}{R-r}r^2 \right] = \\
 &= \frac{\pi}{3} \left[hR^2 + \frac{rh}{R-r}(R^2 - r^2) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{3} [hR^2 + rh(R+r)] = \\
&= \frac{\pi}{3} h (R^2 + r^2 + R \cdot r) .
\end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Il lancio di una moneta non truccata ha come possibili esiti testa (T) e croce (C). La probabilità che esca testa (o croce) in un singolo lancio è $\frac{1}{2}$.

In generale, la probabilità che si verifichi un evento è:

$$P(E) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}},$$

se i casi sono tutti equiprobabili.

Calcoliamo la probabilità che escano al più 2 teste:

$$\begin{aligned} P(T \leq 2) &= P(T = 0) + P(T = 1) + P(T = 2) = \\ &= \frac{\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2}}{2^6} = \\ &= \frac{1 + 6 + 15}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} \simeq 0,34. \end{aligned}$$

Calcoliamo la probabilità che escano almeno 2 teste:

$$P(T \geq 2) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{64 - 7}{64} = \frac{57}{64} \simeq 0,89.$$

In alternativa, possiamo calcolare la stessa probabilità ricorrendo ai coefficienti binomiali:

$$P(T \geq 2) = P(2 \leq T \leq 6) = \frac{\sum_{i=2}^6 \binom{6}{i}}{2^6} = \frac{57}{64}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione $y = \frac{\ln x}{x}$:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x + 1}{x^2};$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (-\ln x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x + 2x \ln x - 2x}{x^4} = \\ &= \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}. \end{aligned}$$

Sostituiamo nelle varie equazioni per verificare se y è soluzione.

1. Sostituiamo in $y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$.

$$\begin{aligned} \frac{2 \ln x - 3}{x^3} + 2 \frac{-\ln x + 1}{x^3} &= \frac{2 \ln x - 3 - 2 \ln x + 2}{x^3} = \\ &= -\frac{1}{x^3} \neq \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

2. Sostituiamo in $y' + x \cdot y'' = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{-\ln x + 1}{x^2} + x \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3} &= \frac{-\ln x + 1 + 2 \ln x - 3}{x^2} = \\ &= \frac{\ln x - 2}{x^2} \neq 1 \end{aligned}$$

3. Sostituiamo in $x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$.

$$x \cdot \frac{-\ln x + 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \neq \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

4. Sostituiamo in $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$.

$$x^2 \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3} + x \cdot \frac{-\ln x + 1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2 \ln x - 3 - \ln x + 1 + 2}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

Dunque la funzione è soluzione della quarta equazione.

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Primo metodo risolutivo

Nello spazio tridimensionale, un piano passante per l'origine è espresso dall'equazione:

$$ax + by + cz = 0.$$

Con $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, otteniamo il piano dato $\sigma : x + y - z = 0$.

L'equazione $a'x + b'y + c'z = 0$ rappresenta un piano σ' passante per l'origine e perpendicolare a σ se valgono le seguenti condizioni:

- a', b', c' sono non tutti nulli;
- $aa' + bb' + cc' = 0 \rightarrow a' + b' - c' = 0 \rightarrow c' = a' + b'$.

Otteniamo così un fascio di piani passanti per l'origine e perpendicolari a quello dato:

$$a'x + b'y + (a' + b')z = 0,$$

con a', b' non entrambi nulli.

La retta r perpendicolare a σ si ottiene intersecando due piani qualsiasi appartenenti al fascio, come per esempio $x + y + 2z = 0$ (che si ottiene per $a' = 1$, $b' = 1$, $c' = 2$) e $x + z = 0$ (che si ottiene per $a' = 1$, $b' = 0$, $c' = 1$). Pertanto la retta cercata ha espressione analitica:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Secondo metodo risolutivo

Dato un piano $ax + by + cz + d = 0$, sappiamo che il vettore $\vec{v}(a; b; c)$ è perpendicolare al piano. Nel nostro caso, il vettore $\vec{v}(1; 1; -1)$ è perpendicolare al piano σ di equazione $x + y - z = 0$. La retta perpendicolare al piano σ e passante per O deve contenere il punto $P(1; 1; -1)$. Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti O e P :

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{z - 0}{-1 - 0} \rightarrow x = y = -z \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Primo metodo

Il minimo di una funzione continua e derivabile nel suo dominio, se esiste, si verifica in corrispondenza di un punto stazionario o in uno degli estremi del dominio.

Il dominio di $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$ è \mathbb{R} , quindi se f assume il valore minimo lo fa in un punto stazionario.

Calcoliamo la derivata di f :

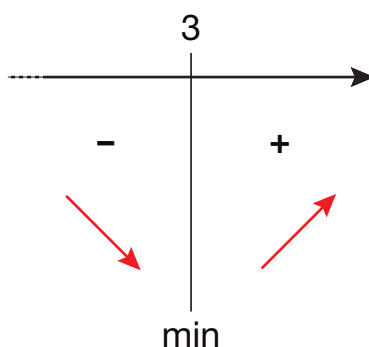
$$f'(x) = 2[(x-1) + (x-2) + (x-3) + (x-4) + (x-5)] = 2(5x-15) = 10(x-3).$$

Cerchiamo il valore di x che annulla la derivata:

$$f'(x) = 10(x-3) = 0 \rightarrow x-3 = 0 \rightarrow x = 3.$$

L'unico punto stazionario di f è quindi $x = 3$ e si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 && \text{se } x < 3 \\ f'(x) &> 0 && \text{se } x > 3. \end{aligned}$$



Una funzione è decrescente quando la sua derivata è negativa e crescente quando la sua derivata è positiva; dunque f è decrescente per $x < 3$ e crescente per $x > 3$.

Ne possiamo dedurre che $x = 3$ è un punto di minimo assoluto per f , e il minimo vale:

$$f(3) = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 1 + 4 = 10.$$

Secondo metodo

Notiamo che la funzione è una parabola e si può scrivere nella forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Il valore di a è 5, quindi la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. Questo ci garantisce che esiste il minimo.

Trasliamo ora la parabola di un vettore $(-3; 0)$ e definiamo X, Y in questo modo

$$X = x - 3 \text{ e } Y = y,$$

da cui

$$x = X + 3.$$

La funzione traslata si scrive

$$Y = (X + 2)^2 + (X + 1)^2 + X^2 + (X - 1)^2 + (X - 2)^2.$$

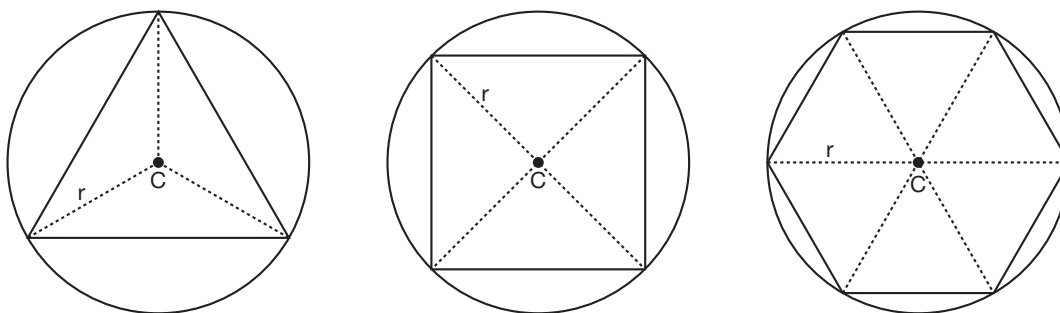
Si vede che la funzione è pari ed è una parabola (presenta solo termini di grado 0, 1 e 2 in x), quindi il suo vertice (che è il punto in cui la funzione assume il valore minimo) sta sull'asse Y , cioè sulla retta $X = 0$. Tornando alle coordinate di partenza, il vertice deve quindi appartenere alla retta $x = 3$. Per trovare il valore minimo basta ora calcolare

$$f(3) = (3 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (3 - 3)^2 + (3 - 4)^2 + (3 - 5)^2 = 10.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Ogni poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r , è composto da n triangoli isosceli congruenti tra loro che hanno:

- la base congruente al lato del poligono regolare;
- il lato obliquo congruente al raggio r della circonferenza;
- l'angolo al vertice che misura $\frac{2\pi}{n}$.

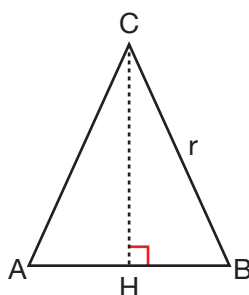


Quindi, indicata con $A(n)$ l'area del poligono:

$$A(n) = A_T \cdot n,$$

dove A_T è l'area di ognuno degli n triangoli congruenti T .

Consideriamo allora un triangolo T :



La sua area è:

$$A_T = \frac{AB \cdot CH}{2}.$$

Sappiamo che $\hat{ACB} = \frac{2\pi}{n}$ e $\hat{HCB} \cong \hat{ACH}$; infatti CH è altezza, e quindi (poiché ABC è isoscele) anche bisettrice e mediana. Allora:

$$\hat{HCB} = \hat{ACH} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}.$$

Scriviamo le lunghezze di base e altezza del triangolo T in funzione dell'angolo $H\hat{C}B$.

La lunghezza di CH , cateto del triangolo rettangolo CBH , è:

$$CH = CB \cdot \cos(H\hat{C}B) = r \cdot \cos \frac{\pi}{n}.$$

La lunghezza di HB è invece:

$$HB = CB \cdot \sin(H\hat{C}B) = r \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Poiché $HB = \frac{1}{2}AB$:

$$AB = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Dunque l'area del triangolo T è:

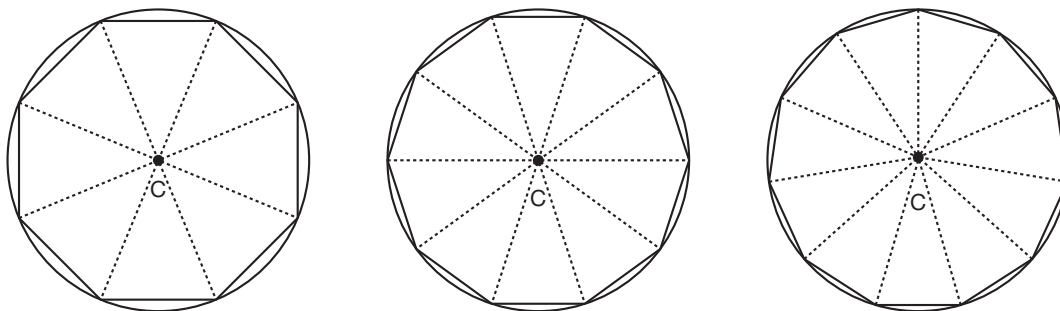
$$A_T = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2r^2 \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \frac{r^2}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Pertanto, l'area del poligono regolare di n lati risulta:

$$A(n) = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Calcoliamo il limite di $A(n)$ per $n \rightarrow +\infty$.

Osserviamo che, all'aumentare del numero dei lati, il poligono regolare tende alla circonferenza in cui è inscritto.



È ragionevole aspettarci che il limite per $n \rightarrow +\infty$ dell'area $A(n)$ sia l'area del cerchio, cioè πr^2 .

Svolgiamo il limite.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Osserviamo che se $n \rightarrow +\infty$, allora:

$$\frac{2\pi}{n} \rightarrow 0.$$

Quindi possiamo applicare il limite notevole:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

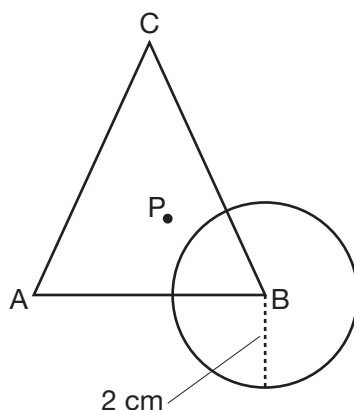
Moltiplicando e dividendo per π , otteniamo:

$$r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2\pi} \cdot \pi \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = \pi r^2 \cdot \lim_{\substack{\frac{2\pi}{n} \rightarrow 0 \\ n}} \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2,$$

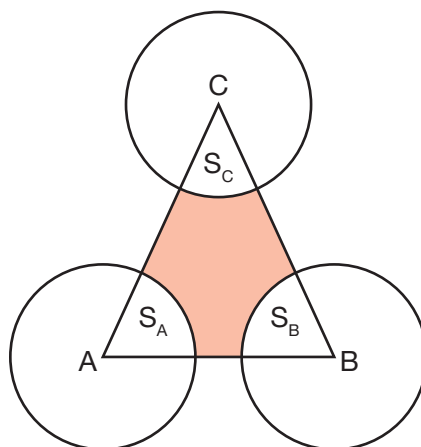
che è il risultato che ci aspettavamo.

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Un punto P dista più di due centimetri da uno dei vertici se non appartiene al cerchio di raggio 2 cm e centro quel vertice.



I punti interni al triangolo ABC che distano più di 2 cm da tutti e tre i vertici sono i punti nella parte colorata in figura.



La probabilità che un punto P preso a caso all'interno del triangolo disti più di 2 cm da ciascuno dei vertici è data dal rapporto tra l'area colorata e l'area totale del triangolo ABC .

Calcoliamo l'area del triangolo isoscele ABC .

Calcoliamo l'altezza relativa alla base AB , applicando il teorema di Pitagora:

$$\sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{119}}{2}.$$

L'area del triangolo ABC è:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{119}}{2} \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = \frac{5\sqrt{119}}{4} \text{ cm}^2.$$

Adesso dobbiamo calcolare l'area della somma dei tre settori circolari S_A , S_B , S_C .

I tre settori hanno lo stesso raggio, 2 cm, e la somma delle loro ampiezze è uguale alla somma degli angoli interni di un triangolo, quindi π . Ne possiamo dedurre che l'area della somma dei tre settori circolari è l'area S di un semicerchio di raggio 2 cm:

$$S = \frac{\pi \cdot (2 \text{ cm})^2}{2} = 2\pi \text{ cm}^2.$$

L'area colorata è uguale alla differenza tra l'area del triangolo e l'area della somma dei tre settori:

$$A = \left(\frac{5\sqrt{119}}{4} - 2\pi \right) \text{ cm}^2.$$

Dunque la probabilità che un punto P preso a caso all'interno del triangolo ABC disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici è data da:

$$\mathbb{P} = \frac{A}{A_{ABC}} = \frac{\frac{5\sqrt{119}}{4} - 2\pi}{\frac{5\sqrt{119}}{4}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} \simeq 0,54 = 54\%.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Per applicare il teorema di Lagrange

- $f(x)$ deve essere continua su $[0; 2]$;
- $f(x)$ deve essere derivabile su $]0; 2[$.

Perché f sia continua basta che valga

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1$$

imponiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - kx + k) = 1 \rightarrow 1 - k + k = 1 \rightarrow 1 = 1.$$

La condizione è verificata $\forall k \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo ora le condizioni per cui f è derivabile. Calcoliamo

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - k & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 3x^2 = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - k = 2 - k.$$

Imponendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$$

otteniamo

$$3 = 2 - k \rightarrow k = -1.$$

Per $k = -1$ la funzione $f(x)$ soddisfa quindi le condizioni del teorema di Lagrange sull'intervallo $[0; 2]$; possiamo dire che $\exists c \in]0; 2[$ tale che

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c).$$

Per $k = -1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

quindi

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 + 2 - 1}{2} = \frac{5}{2};$$

per $k = -1$ la derivata $f'(x)$ invece ha equazione

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Cerchiamo $c \in]1; 2[$ tale che $f'(c) = \frac{5}{2}$:

$$f'(c) = 2c + 1 \rightarrow 2c + 1 = \frac{5}{2} \rightarrow 2c = \frac{3}{2} \rightarrow c = \frac{3}{4}$$

ma $\frac{3}{4} \notin]1; 2[$.

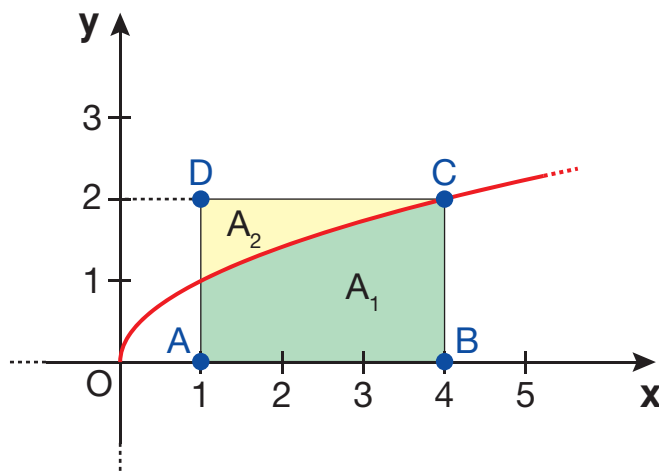
Cerchiamo quindi $c \in]0; 1[$ tale che $f'(c) = \frac{5}{2}$:

$$f'(c) = 3c^2 \rightarrow 3c^2 = \frac{5}{2} \rightarrow c^2 = \frac{5}{6} \rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

ma $-\sqrt{\frac{5}{6}} \notin]0; 1[$, quindi il punto cercato è $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2015

Rappresentiamo in figura il rettangolo che ha come vertici i punti considerati e la funzione $f(x) = \sqrt{x}$.



Calcoliamo l'area della porzione di rettangolo sottostante a $f(x)$, che chiamiamo A_1 :

$$A_1 = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

L'area del rettangolo è invece $A_R = 3 \cdot 2 = 6$.

Possiamo quindi calcolare l'area della parte di rettangolo sovrastante la funzione, che chiamiamo A_2 :

$$A_2 = A_R - A_1 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}.$$

Il rapporto tra le due aree è quindi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{2}.$$

A. S. 2015-2016

ESAME DI STATO 2016
INDIRIZZO SCIENTIFICO E OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1 L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettare uno che risponda alle esigenze del condominio.

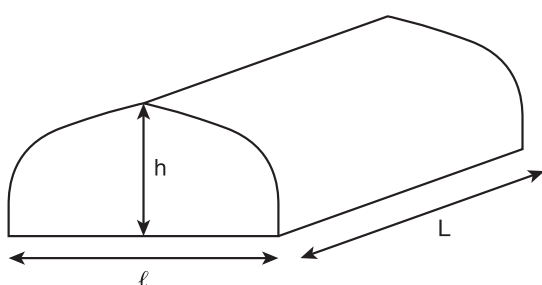


Figura 1

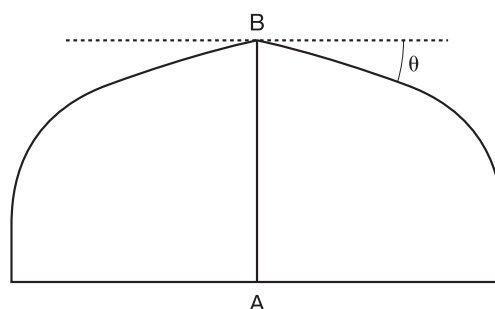


Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\theta \geq 10^\circ$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3 , in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;

¹Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.
1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1; 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo θ e al volume del serbatoio.
3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegna il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $[0; +\infty[$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

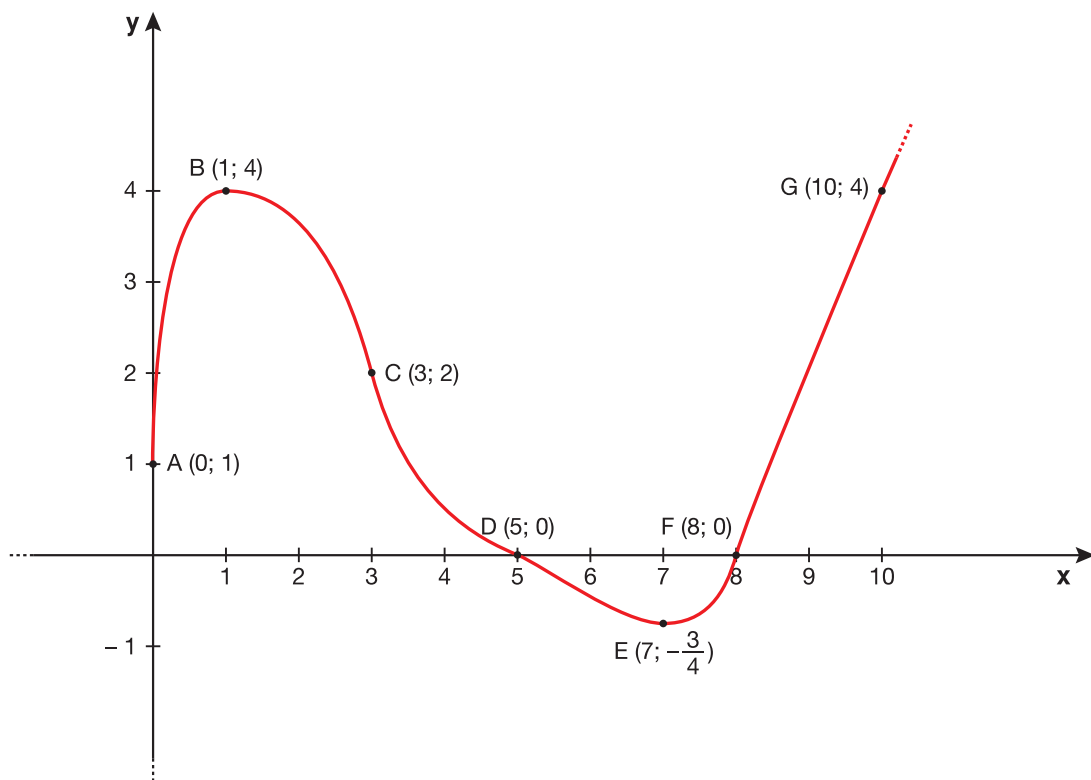


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A , che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G . Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0, 8]$, il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1, 7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9, 10]$.
4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

QUESTIONARIO

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Stabilire se il numero reale u , tale che

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

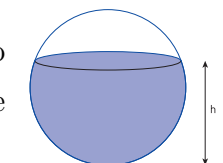
$$A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx \quad B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x , nel segmento parabolico delimitato dall'asse x . Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

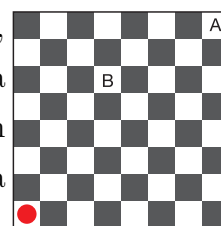
3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h . Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$.



4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?
5. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2; -1; 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?
6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

“Esiste un polinomio $P(x)$ tale che $|P(x) - \cos(x)| \leq 10x^{-3}, \forall x \in \mathbb{R}$ ”.

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A , qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B ?



8. Data una funzione $f(x)$ definita in \mathbb{R} , $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1, 2e)$.
9. Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1; 0; -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

10. Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1; +\infty[$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t} dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa \sqrt{e} .

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

1. Le funzioni proposte per ciascuna famiglia sono tutte simmetriche rispetto all'asse y , per ogni intero positivo k .

Affinché una funzione descriva il profilo laterale del serbatoio, è necessario che:

$$f(0) = 1, \quad f(\pm 1) = 0, \quad f'_+(0) \leq -\tan 10^\circ, \quad f'_-(0) \geq \tan 10^\circ.$$

Esaminiamo il comportamento delle funzioni di ogni famiglia; per la simmetria, limitiamo il controllo agli x compresi fra 0 e 1.

Prima funzione

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(0) = 1^{\frac{1}{k}}; \quad f(1) = 0^{\frac{1}{k}} = 0.$$

$$f'_+(x) = -\frac{1}{k}(1 - x)^{\frac{1}{k}-1}; \quad f'_+(0) = -\frac{1}{k} \cdot 1^{\frac{1}{k}-1} = -\frac{1}{k}.$$

$$f'_+(0) \leq -\tan 10^\circ \simeq -0,176 \text{ per } -\frac{1}{k} \leq -0,176 \rightarrow k \leq \frac{1}{0,176} \rightarrow k \leq 5,68.$$

Poiché k è intero positivo, basta scegliere k fra 1, 2, 3, 4 e 5 affinché la funzione descriva il profilo del serbatoio.

Seconda funzione

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(0) = -6 \cdot 0 + 9k \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$f(1) = -6 \cdot 1 + 9k \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 9k - 9 \rightarrow f(1) = 0 \text{ per } k = 1.$$

$$f'_+(x) = -18x^2 + 18kx - 4, \text{ che per } k = 1 \text{ diventa } f'_+(x) = -18x^2 + 18x - 4;$$

$$f'_+(0) = -4 \leq -\tan 10^\circ.$$

Notiamo però che la derivata seconda $f_+''(x) = -36x + 18$ si annulla in $x = \frac{1}{2}$, è positiva prima e negativa dopo. La funzione $f(x)$ volge dunque la concavità verso l'alto in $]0; \frac{1}{2}[$ e verso il basso in $]\frac{1}{2}; 1[$, quindi non può descrivere il profilo del serbatoio.

Terza funzione

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right) \\ f(0) &= \cos(0) = 1; \quad f(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right). \\ f_+'(x) &= -\frac{\pi}{2}kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right); \quad f_+'(0) = 0. \end{aligned}$$

Quindi $f_+'(0) > -\tan 10^\circ$ e $f(x)$ non può descrivere il profilo del serbatoio.

In conclusione, il profilo del serbatoio è descritto dalla famiglia di funzioni

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}, \text{ per } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

2. Il volume del serbatoio è dato dall'area della sezione trasversale moltiplicata per la lunghezza del serbatoio stesso:

$$\begin{aligned} V &= S \cdot L = \left(2 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}} dx\right) \cdot 8 = 16 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}} dx = \\ &= 16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\left(\frac{1}{k}+1\right)} \right]_0^1 = 16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{k+1}{k}}}{\frac{k+1}{k}} \right]_0^1 = \\ &= 16 \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{k}} = \frac{16k}{k+1}. \end{aligned}$$

Imponiamo che il volume sia almeno di 13 m^3 :

$$\frac{16k}{k+1} \geq 13 \rightarrow 16k \geq 13k + 13 \rightarrow k \geq \frac{13}{3}.$$

Considerando che k è intero e compreso fra 1 e 5 e $\frac{13}{3} \simeq 4,3$, deduciamo che $k = 5$.

Sostituiamo $k = 5$ nell'espressione del volume e otteniamo:

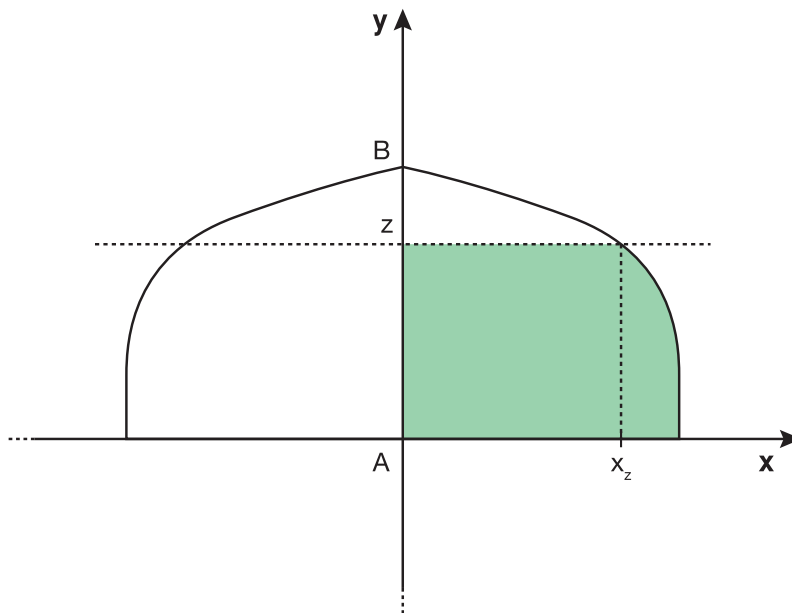
$$\frac{16 \cdot 5}{5 + 1} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}.$$

Il volume è dunque $\frac{40}{3} \text{ m}^3$.

Poiché $\frac{40}{3} \simeq 13,3$, il serbatoio con questo profilo ha volume maggiore dei 13 m^3 richiesti.

3. Fissato il livello z di riempimento del serbatoio, rimane individuata l'ascissa x_z tale che

$$f(x_z) = z \rightarrow (1 - x_z)^{\frac{1}{5}} = z \rightarrow x_z = 1 - z^5.$$



In questo caso, il serbatoio contiene il seguente volume di gasolio (espresso in metri cubi):

$$\begin{aligned}
 V(z) &= 2 \left[z \cdot x_z + \int_{x_z}^1 (1-x)^{\frac{1}{5}} dx \right] \cdot 8 = 16 \left[z(1-z^5) + \int_{1-z^5}^1 (1-x)^{\frac{1}{5}} dx \right] = \\
 &= 16z - 16z^6 - 16 \cdot \frac{5}{6} \left[(1-x)^{\frac{6}{5}} \right]_{1-z^5}^1 = \\
 &= 16z - 16z^6 - \frac{40}{3} \left[0 - (1 - 1 + z^5)^{\frac{6}{5}} \right] = \\
 &= 16z - 16z^6 + \frac{40}{3} z^6 = 16z - \frac{8}{3} z^6.
 \end{aligned}$$

La percentuale di serbatoio riempito, quando il livello di gasolio è alla quota z , è espressa dal rapporto:

$$P(z) = \frac{V(z)}{V} \cdot 100 = \frac{16z - \frac{8}{3} z^6}{\frac{40}{3}} \cdot 100 = 120z - 20z^6.$$

4. In base alla formula precedente quando il livello del serbatoio raggiunge i 50 cm, cioè 0,5 m, l'indicatore mostra una percentuale di riempimento pari a:

$$120 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^6 = 60 - \frac{20}{64} \simeq 59,7 \rightarrow 59,7\%.$$

La percentuale del 50% indicata dall'amministratore è sbagliata perché la sezione trasversale del serbatoio non è un rettangolo, forma che porterebbe ad avere una proporzionalità diretta fra la quota z raggiunta e la percentuale di riempimento del serbatoio. In questo caso, invece, il profilo curvo porta il serbatoio a essere più capiente nella parte bassa rispetto alla parte alta; pertanto, quando il gasolio raggiunge la metà altezza, il serbatoio è riempito per più del 50%.

Secondo l'amministratore, la percentuale di riempimento sarebbe espressa (con z misurato in metri) dal rapporto:

$$P_a(z) = \frac{z}{1} \cdot 100 = 100z.$$

La differenza fra le due percentuali è pari a

$$d(z) = 120z - 20z^6 - 100z = 20z - 20z^6.$$

Osserviamo che $d(0) = d(1) = 0$, a conferma che le due percentuali (0% e 100%) coincidono a serbatoio vuoto e pieno.

Cerchiamo il massimo per la funzione $d(z)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$d'(z) = 20 - 120z^5,$$

e studiamo il suo segno:

$$\begin{aligned} d'(z) = 0 &\rightarrow 20 - 120z^5 = 0 \rightarrow z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \simeq 0,7; \\ d'(z) > 0 &\text{ per } 0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \text{ e } d'(z) < 0 \text{ per } \frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1. \end{aligned}$$

La funzione differenza $d(z)$ è quindi crescente per $0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e decrescente per $\frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1$. L'errore massimo nella valutazione della percentuale si ha in corrispondenza della quota $z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e vale:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{6}} - 20 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^6 = \frac{20}{\sqrt[5]{6}} \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{50}{3\sqrt[5]{6}} \simeq 11,6 \rightarrow 11,6\%.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

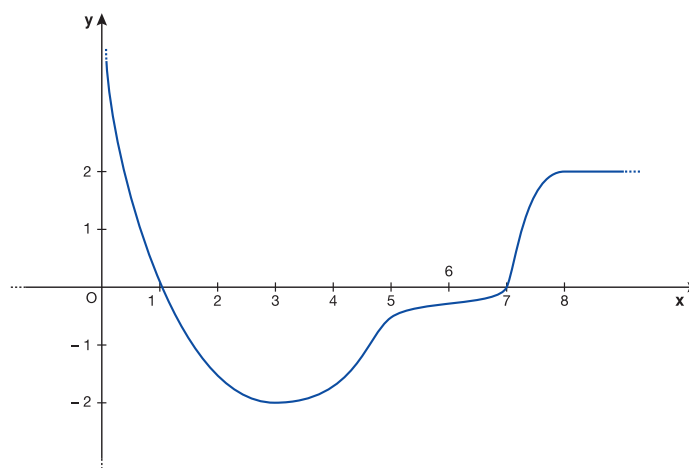
1. Per prima cosa determiniamo l'espressione analitica della funzione f per $x \geq 8$.

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y}{4} \rightarrow y = 2x - 16$$

Del grafico di $f'(x)$ possiamo dire che:

- In $x = 0$ deve presentare un asintoto verticale; in particolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$. Questo perché il grafico fornito è tangente all'asse y nel punto A e a destra del punto f è crescente.
- In $x = 1$, f' deve essere nulla perché B è un punto stazionario di f .
- In $x = 3$ conosciamo la tangente e sappiamo che essa ha coefficiente angolare -2 . Pertanto $f'(3) = -2$. Il punto $(3; -2)$ è un minimo locale per la funzione f' ; infatti sappiamo dal testo che C è un flesso di f .
- Anche in $x = 5$ conosciamo la tangente; analogamente al punto sopra, possiamo affermare che $f'(5) = -\frac{1}{2}$.
- $f'(7) = 0$ perché E è un punto stazionario.
- Per $x \geq 8$ risulta che $f'(x) = 2$ perché la semiretta passante per F e G ha coefficiente angolare 2 .

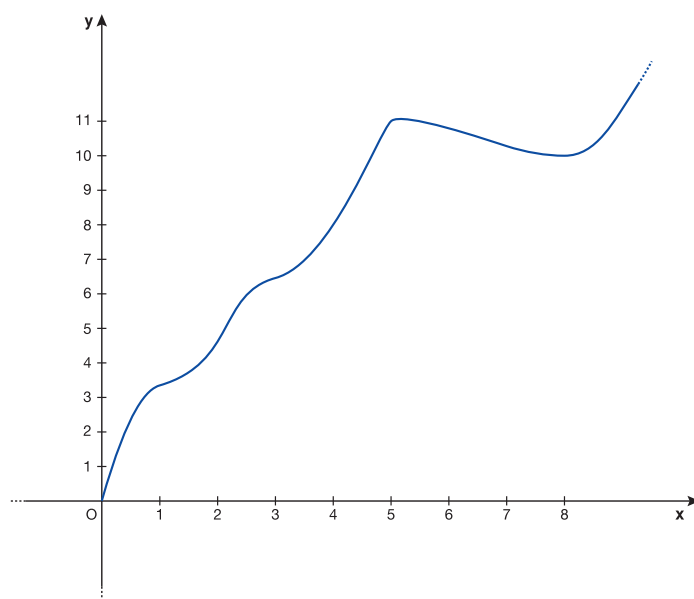
Possiamo dunque tracciare il grafico indicativo della funzione f' .



Per tracciare il grafico della funzione integrale F possiamo fare una serie di considerazioni.

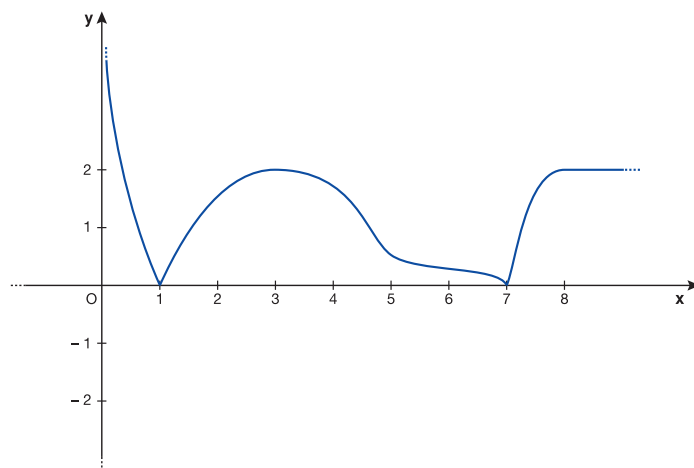
- Osserviamo che $F(5) = 11$ e $F(8) = 11 - 1 = 10$. Infatti $F(8) = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = 11 - 1 = 10$. Ai valori $x = 5$ e $x = 8$ corrisponderanno punti stazionari di F perché sono zeri di f .
- Sul piano qualitativo possiamo dire che in corrispondenza dei valori $x = 1$ e $x = 7$ F presenterà dei flessi perché in B e E f ha due punti stazionari.
- Per $x \geq 8$ il grafico di F avrà l'andamento della parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$. Infatti su questo intervallo la funzione f coincide con la semiretta $y = 2x - 16$, dunque $F(x) = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x (2t - 16)dt = 10 + [t^2 - 16t]_8^x = x^2 - 16x + 74$.

Otteniamo quindi una funzione che ha l'andamento qualitativo sotto riportato.



Come già osservato in precedenza, conosciamo i valori di $f'(3) = -2$ e $f'(5) = -\frac{1}{2}$; li avevamo ricavati interpretando la pendenza delle due tangenti assegnate dal testo come valore della derivata di f .

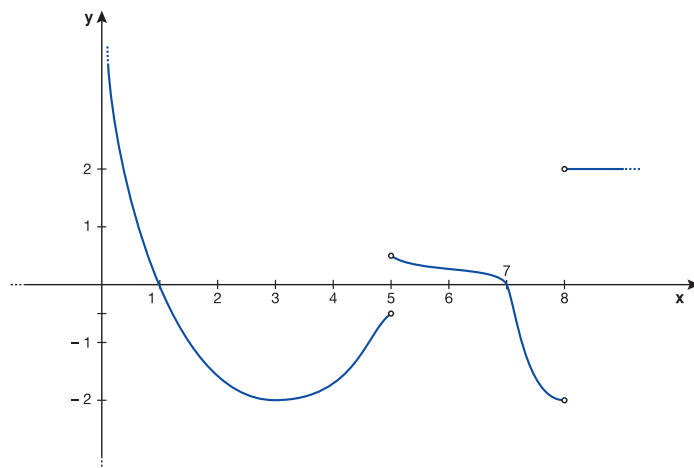
2. • Per ottenere il grafico di $y = |f'(x)|$ è sufficiente simmetrizzare i valori negativi di f' rispetto all'asse x , riportandoli dal quarto al primo quadrante.



L'insieme di definizione di $y = |f'(x)|$ coincide con quello di $y = f'(x)$, ed è dunque $]0; +\infty[$ (il valore $x = 0$ va escluso perché in corrispondenza di esso f presenta un asintoto verticale).

- Per ottenere il grafico di $y = |f(x)|'$ distinguiamo i valori positivi di f da quelli negativi. Per i valori strettamente positivi $|f| = f$, dunque $|f|' = f'$: il grafico ha l'andamento già mostrato sopra. Per i valori strettamente negativi, $|f| = -f$, dunque $|f|' = -f'$: il grafico si ottiene sottoponendo quello di f' alla simmetria di asse x già menzionata in precedenza.

Il grafico cercato ha il seguente andamento qualitativo.



I valori $x = 5$ e $x = 8$ in cui f risulta nulla non appartengono all'insieme di definizione di $|f|'$; infatti $\lim_{x \rightarrow 5^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f'(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 8^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 8^-} f'(x)$ come emerge chiaramente dal grafico. L'insieme di definizione di $y = |f|'$ risulta quindi essere $]0; +\infty[- \{5; 8\}$.

- Tracciamo ora il grafico di $y = \frac{1}{f(x)}$. Cominciamo col calcolare, dove è possibile, il reciproco dei valori della funzione già noti.

$$A' : x_{A'} = x_A = 0; y_{A'} = \frac{1}{y_A} = 1 \rightarrow A'(0; 1)$$

$$B' : x_{B'} = x_B = 1; y_{B'} = \frac{1}{y_B} = \frac{1}{4} \rightarrow B'(1; \frac{1}{4})$$

$$C' : x_{C'} = x_C = 3; y_{C'} = \frac{1}{y_C} = \frac{1}{2} \rightarrow C'(3; \frac{1}{2})$$

$$E' : x_{E'} = x_E = 7; y_{E'} = \frac{1}{y_E} = -\frac{4}{3} \rightarrow E'(7; -\frac{4}{3})$$

$$G' : x_{G'} = x_G = 10; y_{G'} = \frac{1}{y_G} = \frac{1}{4} \rightarrow G'(10; \frac{1}{4})$$

Inoltre, sappiamo che $\frac{1}{f}$ sarà positiva quando f è positiva, negativa quando f è negativa.

Nei punti D e F f assume valore nullo; pertanto $\frac{1}{f}$ presenterà in corrispondenza di $x = 5$ e $x = 8$ asintoti verticali.

Per $x \geq 8$ possiamo scrivere l'espressione analitica di $\frac{1}{f}$:

$$y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x - 16}.$$

Questa è l'equazione di un'iperbole equilatera di assi $y = 0$ e $x = 8$.

Per avere un'idea più precisa dell'andamento calcoliamo la derivata nei punti in cui abbiamo informazioni sufficienti per farlo. L'espressione generale della derivata è

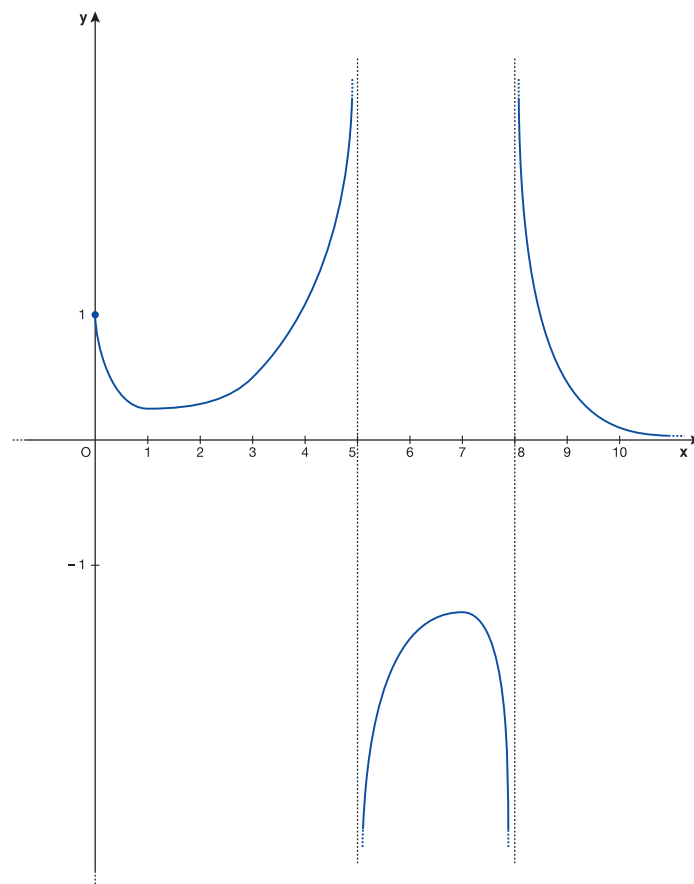
$$y' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

In $x = 3$ otteniamo $y' = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$; in $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$, dunque $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{f'(x)}{f(x)^2} = -\infty$. A questo punto, tracciamo il grafico.

L'insieme di definizione è $]0; +\infty[- \{5; 8\}$.

3. Ricordiamo la definizione di media integrale: la media integrale della funzione f sull'intervallo $[x_1; x_2]$ è il rapporto

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{x_2 - x_1}.$$



Per valutare gli integrali ricorriamo alle informazioni relative alle aree fornite dal testo.

Calcoliamo il valor medio di f nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 f(x) dx}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Calcoliamo il valor medio di $|f|$ nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 |f(x)| dx}{8} = \frac{11 + 1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Calcoliamo il valor medio di f' nell'intervallo $[1; 7]$ ricorrendo al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\frac{\int_1^7 f'(x) dx}{6} = \frac{[f(x)]_1^7}{6} = \frac{-\frac{3}{4} - 4}{6} = -\frac{19}{24} = -0,791\bar{6}.$$

Per determinare l'ultimo integrale ricordiamo che, nell'intervallo in esame, la funzione F coincide con un arco di parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$:

$$\frac{\int_9^{10} F(x) dx}{1} = \int_9^{10} (x^2 - 16x + 74) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 74x \right]_9^{10} = \frac{1000}{3} - 800 + 740 - 243 + 648 - 666 = 12, \overline{3}.$$

4. Essendo F la funzione integrale di f , il coefficiente angolare della tangente a F nel punto di ascissa x è $f(x)$. Infatti per definizione f è la derivata di F .

Deduciamo quindi che la tangente a F in $x = 0$ è una retta di pendenza $1 = f(0)$. Questa retta passa dall'origine perché $F(0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$. La retta è dunque $y = x$.

Analogamente la pendenza della tangente in $x = 8$ è 0; poiché $F(8) = 10$, la tangente cercata è la retta orizzontale $y = 10$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Osserviamo innanzitutto che l'integrale indefinito $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ non è risolvibile analiticamente. Di conseguenza, abbozziamo il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

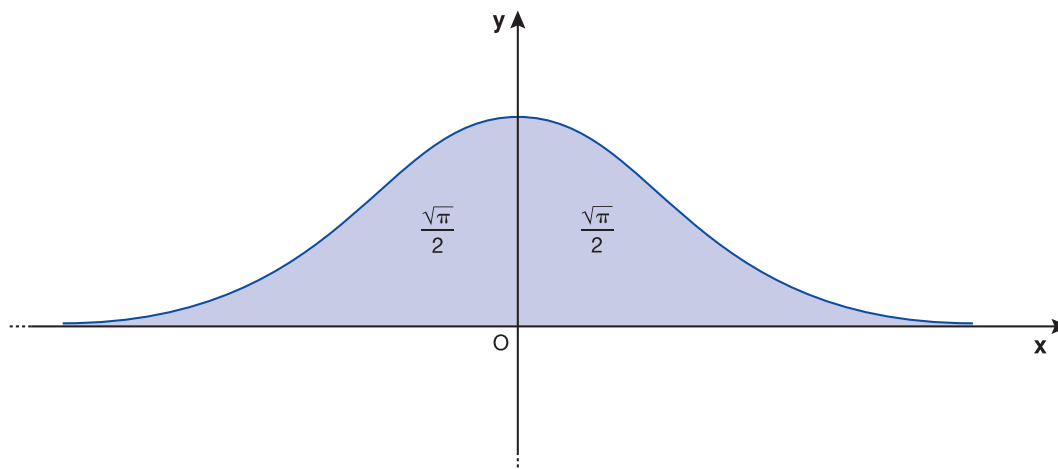
Osserviamo che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è una gaussiana centrata nell'origine. Ricordiamo le sue proprietà.

La funzione è definita e continua su tutto \mathbb{R} . È pari perché:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

perciò il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y . La funzione è positiva su tutto \mathbb{R} perché è una funzione esponenziale. Ha un asintoto orizzontale, $y = 0$, perché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0$. Infine, $f'(x) = -2xe^{-x^2} > 0$ se e solo se $x < 0$, ovvero la funzione è crescente in $] -\infty; 0[$ e decrescente in $]0; +\infty[$ e assume il suo massimo assoluto in 0.

Perciò il suo grafico è il seguente:



Notiamo che

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La funzione $F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$ è monotona crescente.

Infatti, $F'(x) = e^{-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $F(u) = 1 > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, quindi $u > 0$.

Determiniamo i valori integrali A , B e C .

Per calcolare l'integrale A , osserviamo che la funzione $f(x) = x^7 e^{-x^2}$ è dispari. Infatti,

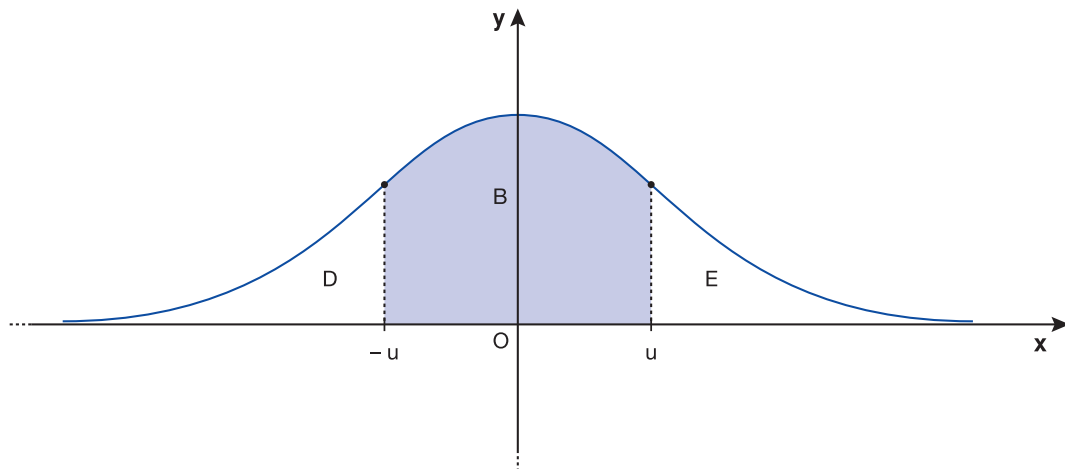
$$f(-x) = (-x)^7 e^{-(-x)^2} = -x^7 e^{-x^2} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che

$$\int_{-u}^{+u} x^7 e^{-x^2} dx = 0$$

perché $\int_{-u}^0 x^7 e^{-x^2} dx = - \int_0^u x^7 e^{-x^2} dx$.

Per calcolare B , possiamo suddividere l'area al di sotto del grafico della funzione in tre parti, come in figura.



Notiamo che:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - 1$$

e che $D = E$ per simmetria.

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} B &= \int_{-u}^u e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - 2E = \\ &\quad \sqrt{\pi} - 2(\sqrt{\pi} - 1) = 2 - \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale C :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx.$$

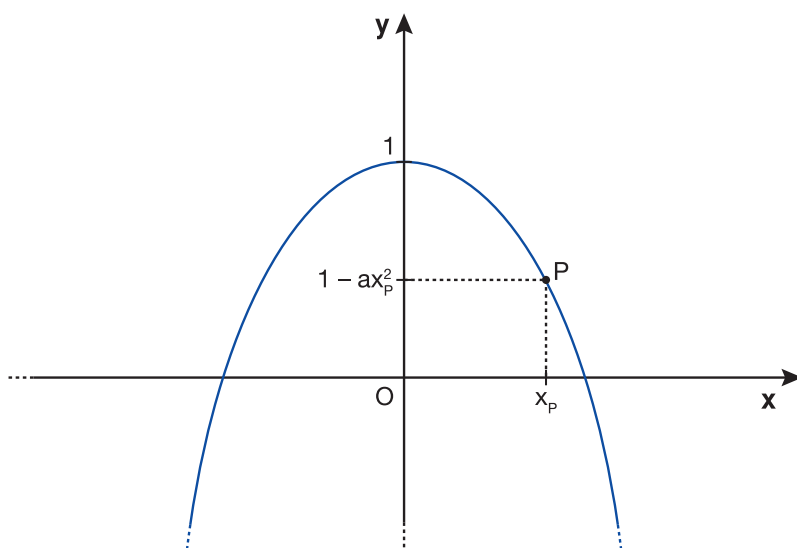
Sostituiamo $y = \sqrt{5}x \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{5}}$, $dx = \frac{dy}{\sqrt{5}}$, per $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

Quindi,

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{5}}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Per qualunque valore di $a > 0$ la parabola è simmetrica rispetto all'asse y , passa per il punto $(0; 1)$ e ha concavità verso il basso. Il punto generico P della parabola ha coordinate $(x_P; 1 - ax_P^2)$.



Il rettangolo inscritto nel segmento parabolico delimitato dall'asse x ha vertici di coordinate $A = (x_P; 0)$, $B = (x_P; 1 - ax_P^2)$, $C = (-x_P; 1 - ax_P^2)$ e infine $D = (-x_P; 0)$. Consideriamo $x_P > 0$.

Possiamo esprimere perimetro e area del rettangolo $ABCD$ come funzione dell'ascissa x_P :

$$2p(x_P) = 4x_P + 2(1 - ax_P^2) \rightarrow 2p(x_P) = -2ax_P^2 + 4x_P + 2;$$

$$A(x_P) = 2x_P(1 - ax_P^2) = 2(x_P - ax_P^3).$$

Per determinare per quale valore di a l'area del rettangolo è massima calcoliamo la derivata prima della funzione che esprime l'area:

$$A'(x_P) = 2 - 6ax_P^2.$$

La condizione necessaria affinché il rettangolo di coordinate $ABCD$ abbia area massima è che la derivata prima calcolata in x_P sia uguale a 0:

$$A'(x_P) = 0 \rightarrow 2 - 6ax_P^2 = 0 \rightarrow 3ax_P^2 = 1 \rightarrow x_P = \pm \frac{\sqrt{3a}}{3a}.$$

La radice esiste sempre poiché, per ipotesi, $a > 0$.

Siccome siamo interessati all'ascissa positiva consideriamo $x_P = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$.

Procediamo allo stesso modo per determinare per quale valore di x_P il perimetro assume valore massimo. Calcoliamo la derivata prima:

$$2p'(x_P) = -4ax_P + 4.$$

Imponiamo ora che la derivata prima del perimetro sia uguale a 0 in corrispondenza di x_P :

$$2p'(x_P) = 0 \rightarrow -4ax_P + 4 = 0 \rightarrow x_P = \frac{1}{a}.$$

Uguagliamo le due espressioni che abbiamo trovato per x_P per determinare il valore di a :

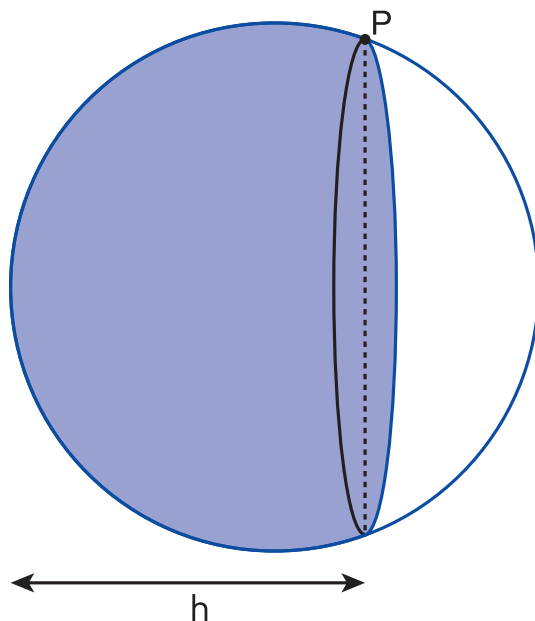
$$\frac{\sqrt{3a}}{3a} = \frac{1}{a} \rightarrow a = 3.$$

L'equazione della parabola che soddisfa le condizioni del problema è:

$$y = 1 - 3x^2.$$

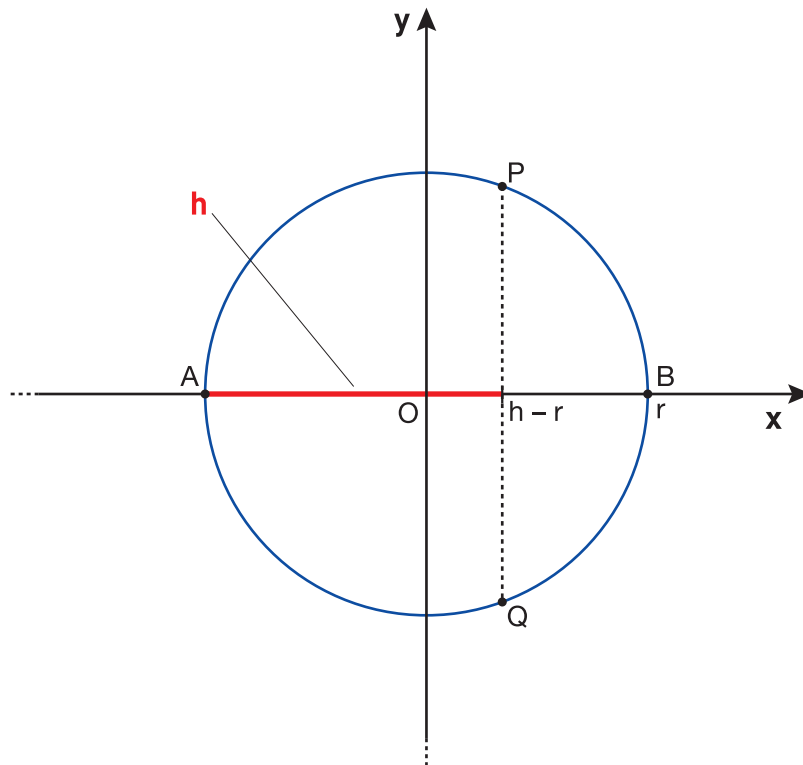
SOLUZIONE DEL QUESITO 3
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Per comodità rappresentiamo il recipiente orientato orizzontalmente.



Il recipiente sferico di raggio r può essere rappresentato come la sfera ottenuta dalla rotazione di un angolo π di una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, centrata nell'origine di un sistema cartesiano Oxy e di diametro $2r$.

Sia P il punto che rappresenta il livello raggiunto dal liquido. La sua ascissa vale $h - r$, con $h > r$.



Lo spazio occupato dal liquido nel recipiente corrisponde alla calotta sferica generata dalla rotazione dell'arco AP . Determiniamone il volume V .

L'equazione dell'arco AP è:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \text{con } -r \leq x \leq h - r.$$

Calcoliamo il volume del recipiente sferico:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{h-r} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-r}^{h-r} r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{h-r} = \\ &= \pi \left[r^2(h-r) - \frac{(h-r)^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \\ &= \pi \left[r^2 h - r^3 - \frac{h^3}{3} + \frac{r^3}{3} + h^2 r - h r^2 + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \\ &= \pi \left(h^2 r - \frac{h^3}{3} \right). \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Consideriamo la variabile casuale X corrispondente al numero di risposte esatte. Per ognuna delle domande, la probabilità di dare la risposta corretta è $\frac{1}{4}$. La variabile casuale X ha quindi una distribuzione di probabilità binomiale (o di Bernoulli) di parametri $n = 10$ e $p = \frac{1}{4}$.

Questo significa che la probabilità che le risposte esatte siano x è

$$P(X = x) = \binom{10}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x},$$

con $x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

La probabilità di superare il test è dunque:

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &= \binom{10}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \\ &= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{1}{4^8} \cdot \frac{3^2}{4^2} + 10 \cdot \frac{1}{4^9} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4^{10}} \cdot 1 = \\ &= \frac{405}{4^{10}} + \frac{30}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} = \\ &= \frac{436}{4^{10}} \simeq 4 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Determiniamo il punto di tangenza T tra la sfera di centro $K(-2; -1; 2)$ e il piano di equazione $\Pi : 2x - 2y + z - 9 = 0$.

Il punto T è l'intersezione tra il piano Π e la retta s ortogonale a Π che passa per K .

Determiniamo un'equazione vettoriale della retta s .

In generale, se un piano ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ il vettore $\mathbf{n} = [a; b; c]$ è ortogonale al piano. Quindi nel nostro caso il vettore $[2; -2; 1]$ è ortogonale al piano Π e un'equazione vettoriale di s quindi è:

$$[x; y; z] = [-2; -1; 2] + t[2; -2; 1]$$

con t numero reale. Scriviamo l'equazione in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione del piano Π le espressioni trovate per x , y e z :

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0$$

$$-4 + 4t + 2 + 4t + 2 + t - 9 = 0$$

$$t = 1.$$

Per $t = 1$ troviamo il punto $T(0; -3; 3)$, che è il punto di tangenza cercato.

Determiniamo ora il raggio della sfera, ossia la lunghezza del segmento TK :

$$TK = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-1 + 3)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

La sfera quindi ha raggio 3.

Per completare lo svolgimento, anche se non è esplicitamente richiesto dal quesito, osserviamo che un'equazione della sfera è:

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Qualunque polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, di grado $n \geq 1$, ha limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = +\infty.$$

Poiché $y = \cos x$ è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra -1 e $+1$, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x) - \cos x| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = +\infty,$$

che è quindi maggiore di 10^{-3} .

D'altra parte, per un polinomio di grado zero, $P(x) = k$, risulta

$$|P(x) - \cos x| = |k - \cos x|.$$

Poiché $y = \cos x$ è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra -1 e $+1$, si ha

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |k - \cos x| = |k| + 1 > 10^{-3}.$$

È quindi falso affermare che esista un polinomio $P(x)$ tale che

$$|P(x) - \cos x| \leq 10^{-3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Osserviamo per prima cosa che ogni percorso dalla casella iniziale alla casella indicata con A è costituito da 7 mosse della pedina verso destra e da 7 mosse verso l'alto, che possono essere effettuate in qualunque ordine. Il numero totale dei percorsi possibili è uguale quindi al numero di modi in cui si possono scegliere le mosse verso destra tra le 14 mosse da effettuare (le mosse verso l'alto saranno quindi le 7 mosse rimanenti). Pertanto, il numero di percorsi è:

$$C_{14,7} = \binom{14}{7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432.$$

Calcoliamo adesso il numero di percorsi della casella iniziale alla casella A che passano per la casella B . Ciascuno di questi percorsi può essere scomposto in un percorso dalla casella iniziale a B e in un percorso dalla casella B alla casella A .

Per andare dalla posizione iniziale a B bisogna compiere 8 mosse, di cui 3 verso destra e 5 verso l'alto. Quindi il numero di percorsi è:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

Per andare da B ad A bisogna compiere altre 6 mosse, di cui 4 verso destra e 2 verso l'alto. Quindi il numero di percorsi è:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Quindi, per andare dalla posizione iniziale ad A passando per B possiamo scegliere uno qualunque dei percorsi dalla posizione iniziale a B e uno qualunque dei percorsi da B ad A . In totale, sono:

$$C_{8,3} \cdot C_{6,4} = \binom{8}{3} \binom{6}{4} = 56 \cdot 15 = 840.$$

La probabilità cercata è uguale al rapporto tra il numero di percorsi passanti per B e il numero totale di percorsi:

$$P = \frac{C_{8,3} \cdot C_{6,4}}{C_{14,7}} = \frac{\binom{8}{3} \binom{6}{4}}{\binom{14}{7}} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143} \simeq 24,5\%.$$

Con un ragionamento simile, i percorsi dal punto iniziale ad A possono essere ottenuti dalle permutazioni con ripetizione di 14 elementi di cui 7 uguali (mosse verso l'alto) e 7 uguali (mosse verso destra) per un totale di:

$$P_{14}^{(7;7)} = \frac{14!}{7!7!} = 3432 \text{ percorsi.}$$

Nello stesso modo calcoliamo il numero dei percorsi dal punto iniziale a B :

$$P_8^{(5;3)} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

e da B ad A :

$$P_6^{(4;2)} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Otteniamo i casi favorevoli dal prodotto $P_8^{(5;3)} \cdot P_6^{(4;2)} = 56 \cdot 15 = 840$. Quindi, la probabilità è:

$$P = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143}.$$

Osserviamo che il risultato è lo stesso che avevamo ottenuto con il metodo precedente.

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x(2x + x^2)$ definita in \mathbb{R} . Determiniamo l'insieme di tutte le sue primitive $F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ calcolando l'integrale indefinito:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^x(2x + x^2) dx.$$

Calcoliamo l'integrale applicando più volte il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int e^x(2x + x^2) dx &= e^x(2x + x^2) - \int (2 + 2x)e^x dx = \\ &= 2xe^x + x^2e^x - (2 + 2x)e^x + \int 2e^x dx = \\ &= 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = x^2e^x + c. \end{aligned}$$

La famiglia delle primitive è dunque:

$$F(x) + c = x^2e^x + c.$$

Imponiamo al grafico di $F(x) + c$ il passaggio per il punto $(1; 2e)$:

$$F(1) + c = 2e \rightarrow e + c = 2e \rightarrow c = e.$$

La primitiva cercata è:

$$F(x) = x^2e^x + e.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

Denotiamo con r_1 la retta espressa in forma parametrica e con r_2 quella in forma cartesiana e analizziamo la posizione reciproca tra le due rette e il punto P dato. Osserviamo che P non appartiene né a r_1 , né a r_2 , infatti, sostituendo a x, y, z , rispettivamente, i valori 1,0,-2, entrambi i sistemi risultano impossibili. Per vedere se r_1 e r_2 sono coincidenti, incidenti o disgiunte (parallele o sghembe), studiamo il sistema seguente in 5 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t + 2t + t - 3 = 0 \\ 2t - 2t = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Poiché esiste ed è unico il valore di t per cui il sistema ha soluzione, possiamo concludere che r_1 ed r_2 sono incidenti e il loro punto d'intersezione è $Q\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Allora esiste un piano σ che contiene r_1 ed r_2 . L'equazione del piano π passante per P e parallelo alle due rette è il piano per P parallelo a σ . Per calcolare l'equazione di σ possiamo procedere in due modi diversi:

Primo metodo: Consideriamo un piano generico espresso in forma cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per r_1 ed r_2 . Poiché r_1 ed r_2 sono incidenti e ogni retta è univocamente determinata da due suoi punti, è sufficiente imporre il passaggio del piano per Q , che appartiene ad entrambe, per un altro punto di r_1 , ad esempio, $Q_1(0; 0; 0)$, e per un altro punto di r_2 , ad esempio, $Q_2(0; 0; 3)$. Quindi studiamo il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{3}{4} + b \cdot \frac{3}{2} + c \cdot \frac{3}{4} + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 + d = 0. \end{cases}$$

da cui $a = -2b, c = d = 0$. Scegliendo $b = 1$, otteniamo $\sigma : 2x - y = 0$.

Secondo metodo: Consideriamo il fascio di piani passanti per r_2 ,

$$\sigma_{\lambda\mu} : \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0, \quad \text{con } (\lambda; \mu) \neq (0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per r_1 . Poiché $Q = r_1 \cap r_2$, $Q_1(0; 0; 0) \in r_1$, per trovare σ , è sufficiente imporre il passaggio di $\sigma_{\lambda\mu}$ per Q_1 , cioè studiare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

da cui $\lambda = 0$. Scegliendo $\mu = 1$, otteniamo $\sigma : 2x - y = 0$.

Ricordiamo che un piano $ax + by + cz + d = 0$ è perpendicolare al vettore $(a; b; c)$. Nel nostro caso, il piano $\sigma : 2x - y = 0$ è perpendicolare al vettore $(2; -1; 0)$. Di conseguenza, il piano π che stiamo cercando, deve essere perpendicolare allo stesso vettore, per poter essere parallelo a σ . Imponendo il passaggio per P :

$$\begin{cases} 2x - y + d = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2. \end{cases}$$

otteniamo $a = 2, b = -1, c = 0, d = -2$, cioè $\pi : 2x - y = 2$.

Alternativamente, trasformando la retta r_2 in forma parametrica, cioè:

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 3 - 3s \end{cases}$$

osserviamo che r_2 è parallela al vettore $(1; 2; -3)$. Ricordando che r_1 è parallela al vettore $(1; 2; 1)$, il generico piano passante per P , cioè:

$$a(x - 1) + b(y - 0) + c(z + 2) = 0, \quad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

è parallelo alle rette r_1 ed r_2 se il vettore $(x - 1; y; z + 2)$ è parallelo a $(1; 2; 1)$ e $(1; 2; -3)$. E questo è vero se e solo se

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando i calcoli, otteniamo come prima $\pi : 2x - y - 2 = 0$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2016

L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione $y = f(x)$ in un suo punto $(x_0; y_0)$ è della forma:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nel nostro caso, $x_0 = \sqrt{e}$.

La funzione integrale $y = f(x)$ è continua e derivabile nel suo dominio.

Calcoliamo i valori di y_0 e $f'(x_0)$.

Per calcolare il valore di y_0 sostituiamo il valore $x_0 = \sqrt{e}$ nell'equazione della funzione:

$$y_0 = f(x_0) = f(\sqrt{e}) = \int_e^e \frac{t}{\ln t} dt = 0.$$

Per calcolare il valore di $f'(x_0)$, calcoliamo la derivata di $y = f(x)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$f'(x) = \frac{x^2}{\ln x^2} \cdot 2x = \frac{2x^3}{2 \ln x} = \frac{x^3}{\ln x}.$$

Sostituiamo il valore $x_0 = \sqrt{e}$ nell'equazione della derivata:

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{(\sqrt{e})^3}{\ln \sqrt{e}} = \frac{e\sqrt{e}}{\frac{1}{2} \ln e} = 2e\sqrt{e}.$$

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto $(\sqrt{e}; 0)$ è:

$$y - 0 = 2e\sqrt{e}(x - \sqrt{e}) \rightarrow y = 2e\sqrt{e}x - 2e^2.$$

A. S. 2016-2017

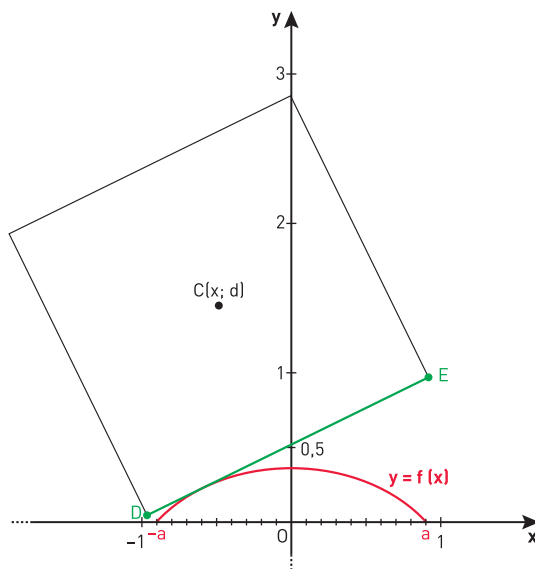
ESAME DI STATO 2017
TEMA DI MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico. È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy : il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

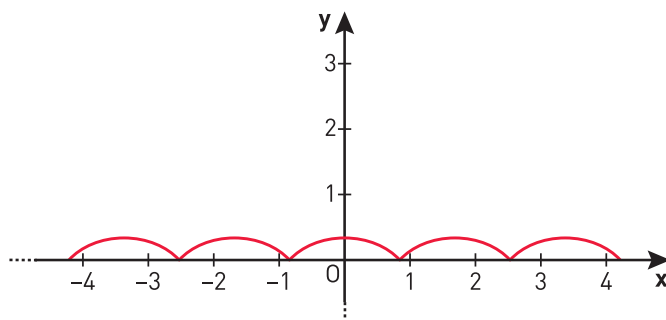


1. Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a; a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a; a]$, come mostrato in figura.



2. Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

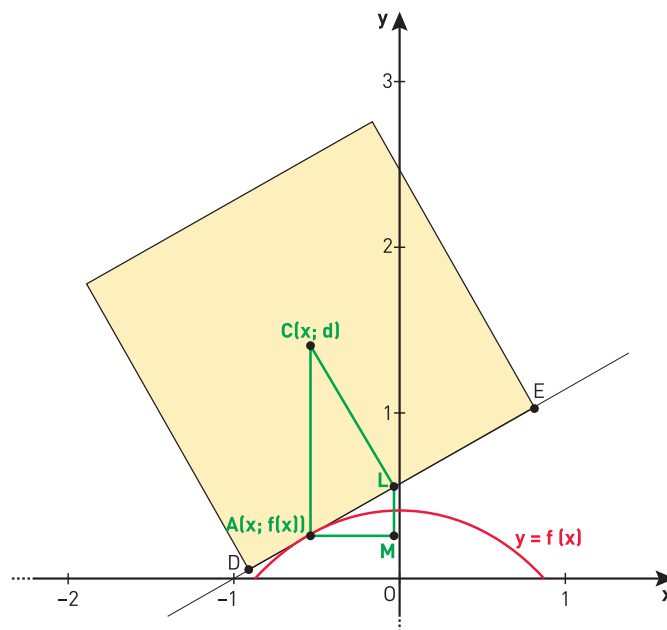
- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una “gobba”, cioè dell’arco di curva di equazione

$$y = f(x) \text{ per } x \in [-a; a].$$

Stabilisci se tali condizioni sono verificate¹.

3. Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell’ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

¹In generale, la lunghezza dell’arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$.



Anche il grafico della funzione:

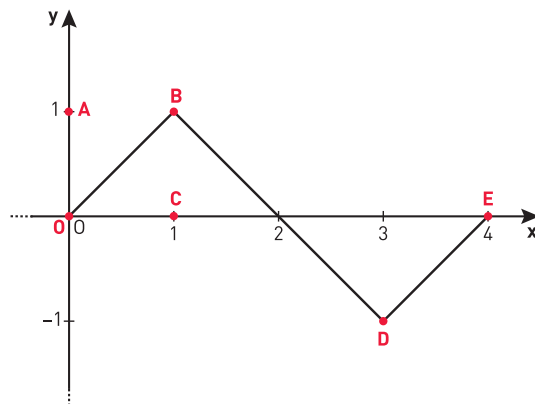
$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2} \right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4. Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Problema 2

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:



Come si evince dalla figura, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0; 0), B(1; 1), D(3; -1), E(4; 0)$.

- 1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

qualora esistano, determinarne il valore.

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 2) Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \text{ e } s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x .

Questionario

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 x e^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di e ed E .

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $3/5$ del volume della semisfera.

3. Sapendo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b .

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0; 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

5. Dati i punti $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(2; 2; -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C .

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

nel suo punto P di coordinate $(1; 0; 2)$.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia 3 esca almeno 2 volte.

9. Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan x + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (D.M. n. 257 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

1. Studiamo la funzione $f(x)$ per verificare che il suo grafico sia compatibile con il profilo della pedana.

Dominio della funzione. $x \in \mathbb{R}$

Eventuali simmetrie della funzione.

$$f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$$

La funzione è pari.

Intersezione con l'asse y .

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} - \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Osserviamo che $\sqrt{2} - 1 \simeq 0,414 < 0,5$; nel grafico vediamo che effettivamente l'intersezione della curva con l'asse y ha ordinata minore di 0,5.

Intersezioni con l'asse x .

$$y = 0 \rightarrow \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} = 2\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} = \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 = 0$$

Poniamo $z = e^x$.

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt{2} \pm 1$$

Osserviamo che i due valori ottenuti sono positivi, quindi otteniamo due soluzioni distinte per x .

$$e^x = \sqrt{2} \pm 1 \rightarrow x = \ln(\sqrt{2} + 1) \vee x = \ln(\sqrt{2} - 1)$$

Per la simmetria della funzione, i due valori ottenuti sono opposti, con $\ln(\sqrt{2} \pm 1) \simeq \pm 0,88$.

Concludiamo che $a = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Segno della funzione.

$$y > 0 \rightarrow \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} < 2\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} < \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 < 0$$

Poniamo $z = e^x$ e ricordiamo che $\ln(x)$ è una funzione monotona crescente.

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 < 0 \rightarrow \sqrt{2} - 1 < z < \sqrt{2} + 1 \rightarrow \ln(\sqrt{2} - 1) < x < \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Quindi $f(x)$ è positiva nell'intervallo $] -a; a[$, in accordo al grafico assegnato.

Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow e^{-x} - e^x > 0 \rightarrow e^x < \frac{1}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} < 1 \rightarrow 2x < \ln 1 \rightarrow x < 0$$

La funzione è quindi crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$. Per $x = 0$ la funzione ha un massimo assoluto.

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione non ha flessi e rivolge la concavità verso il basso.

Possiamo concludere che il grafico della funzione assegnata è compatibile con il profilo della pedana.

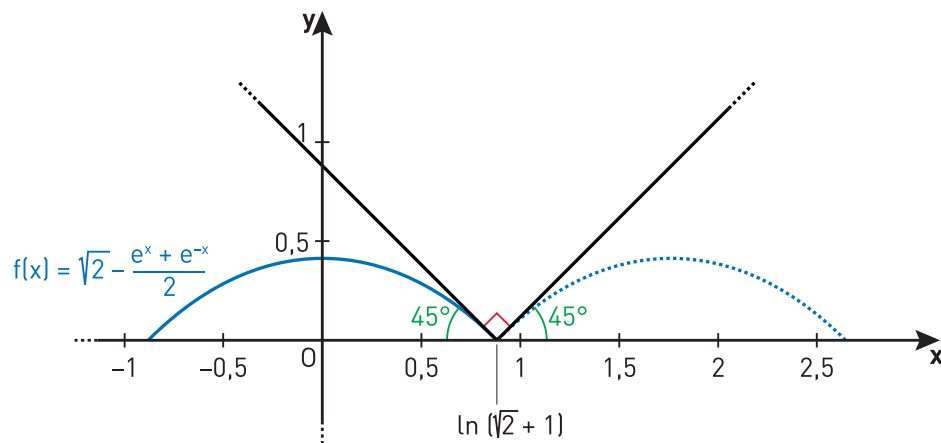
2. Chiamiamo $\bar{f}(x)$ la funzione ottenuta affiancando le copie del grafico di $f(x)$. $\bar{f}(x)$ è una funzione continua, periodica di periodo $2a$. Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra nel punto di non derivabilità $x = a = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

$$\begin{aligned}\bar{f}'_-(a) &= f'(a) = \frac{e^{-a} - e^a}{2} = \frac{1 - e^{2a}}{2e^a} = \frac{1 - e^{2\ln(\sqrt{2}+1)}}{2e^{\ln(\sqrt{2}+1)}} = \\ &= \frac{1 - (\sqrt{2} + 1)^2}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1 - 2 - 1 - 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{-2(\sqrt{2} + 1)}{2(\sqrt{2} + 1)} = -1\end{aligned}$$

Per la periodicità di $\bar{f}(x)$ e per la simmetria di $f'(x)$ (che è una funzione dispari), otteniamo:

$$\bar{f}'_+(a) = f'(-a) = -f'(a) = 1.$$

Nel punto $x = a$ la tangente sinistra e la tangente destra del grafico hanno coefficienti angolari rispettivamente -1 e 1; il prodotto di tali coefficienti angolari è -1 , quindi le rette sono perpendicolari. Per la periodicità la stessa proprietà vale in tutti i punti di non derivabilità.



Per determinare la lunghezza dell'arco descritto da $f(x)$ in $[-a; a]$ calcoliamo l'integrale

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Poiché $f'(x)$ è dispari, la funzione integranda è pari, quindi:

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} dx = \\ &= 2 \int_0^a \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} dx = \int_0^a \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}} dx. \end{aligned}$$

Osserviamo che l'espressione all'interno della radice quadrata è uguale a $(e^x + e^{-x})^2$, quindi:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^a \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int_0^a (e^x + e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^a = \\ &= e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \\ &= \frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2. \end{aligned}$$

L'arco è quindi lungo come il lato del quadrato.

In alternativa l'integrale $\int_0^a \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}} dx$ si poteva risolvere per sostituzione, ponendo $e^x = t$. Dal cambio di variabile segue:

$$x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt;$$

$$x = 0 \rightarrow t = 1;$$

$$x = a \rightarrow t = e^a.$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{e^a} \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \sqrt{\frac{2t^2 + 1 + t^4}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt = \\ &= \int_1^{e^a} \sqrt{\left(\frac{t^2 + 1}{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \frac{t^2 + 1}{t^2} dt = \int_1^{e^a} 1 + \frac{1}{t^2} dt = [t - t^{-1}]_1^{e^a} = \\ &= e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \\ &= \frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2. \end{aligned}$$

3. Il punto L è la proiezione del centro C del quadrato sul lato DE , quindi il triangolo ACL è rettangolo in L . Il punto M ha la stessa ascissa di L e la stessa ordinata di A , quindi il triangolo ALM è rettangolo in M . Le rette AC e LM sono parallele perché entrambe parallele all'asse y , quindi formano con la trasversale DE angoli alterni interni congruenti: $\hat{A}LM \cong \hat{L}AC$. I triangoli ACL e ALM hanno dunque tutti gli angoli congruenti e quindi sono simili.

Per il significato geometrico della derivata prima:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = f'(x).$$

Per la similitudine fra i triangoli abbiamo:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}},$$

dove $\overline{LC} = 1$, poiché corrisponde a metà del lato del quadrato. Combinando le due uguaglianze otteniamo

$$f'(x) = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}} \rightarrow f'(x) = \overline{AL}.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ACL :

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{\overline{LC}^2 + \overline{AL}^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} = \sqrt{\frac{2 + e^{-2x} + e^{2x}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$d = f(x) + \overline{AC} = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}.$$

4. Per evitare ambiguità, chiamiamo $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Osserviamo che il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ tramite una traslazione verso il basso lungo l'asse y , in quanto $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$.

Determiniamo l'angolo α formato dalla tangente a $g(x)$ nel punto $x = -\frac{\ln 3}{2}$ con l'asse x , calcolando la derivata prima di $g(x)$ in tale punto.

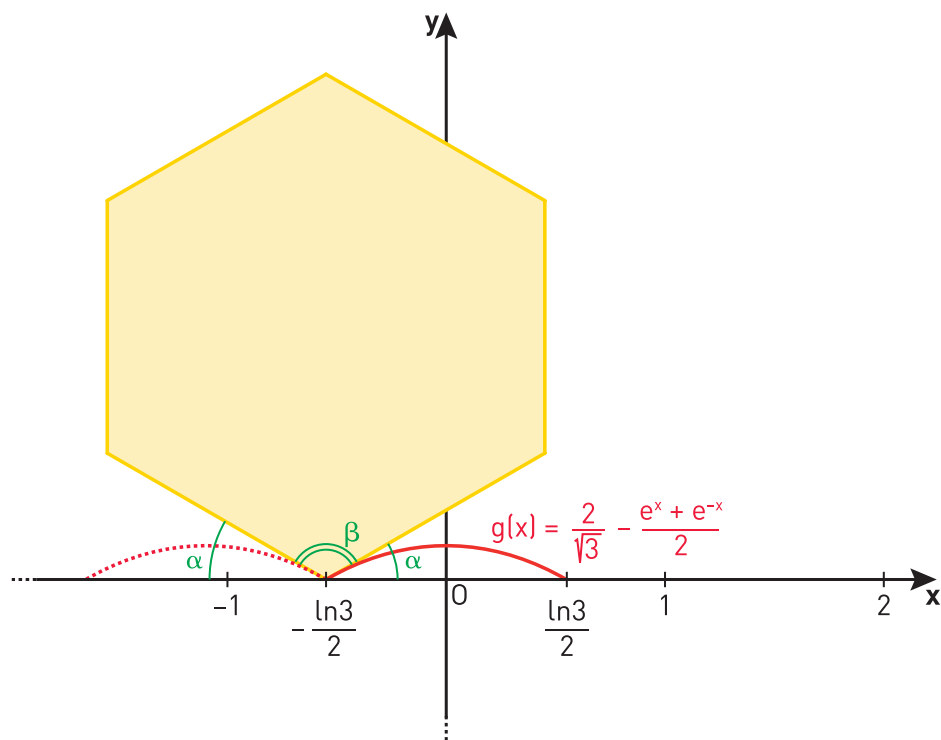
$$g'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} \rightarrow g' \left(-\frac{\ln 3}{2} \right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ$$

L'angolo interno β del poligono regolare cercato è quindi:

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 120^\circ.$$

Il poligono regolare che ha angoli interni di 120° è l'esagono regolare.



SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

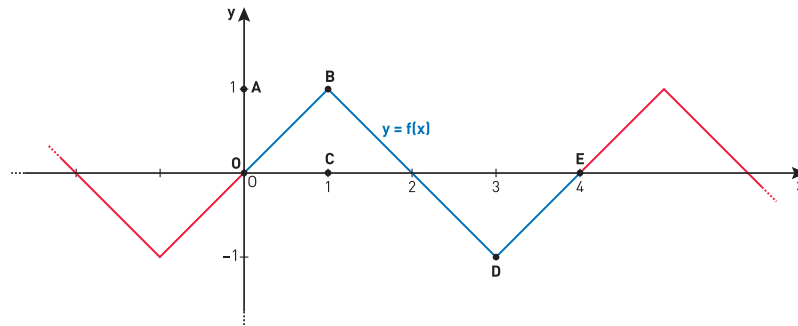
1. La funzione f si può scrivere in $[0; 4]$ come

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0; 1[\\ -x + 2 & \text{se } x \in [1; 3[\\ x - 4 & \text{se } x \in [3; 4] \end{cases}$$

Disegniamo il grafico nel dominio \mathbb{R} e osserviamo che $f(x)$ si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} x - 4k & \text{se } x \in [-1 + 4k; 1 + 4k[\\ -x + 2 + 4k & \text{se } x \in [1 + 4k; 3 + 4k[\end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.



Questa funzione è definita e continua in tutto il dominio \mathbb{R} perché continua a tratti e il limite destro e sinistro nei punti di congiunzione coincidono. La funzione f è inoltre derivabile negli intervalli aperti $] - 1 + 4k; 1 + 4k[$ e $] 1 + 4k; 3 + 4k[$ perché i polinomi sono funzioni derivabili. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in] - 1 + 4k; 1 + 4k[\\ -1 & \text{se } x \in] 1 + 4k; 3 + 4k[\end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilità in $]0; 4[$ nei punti di congiunzione $x = 1$, $x = 3$ analizzando i limiti della derivata prima da destra e da sinistra.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$$

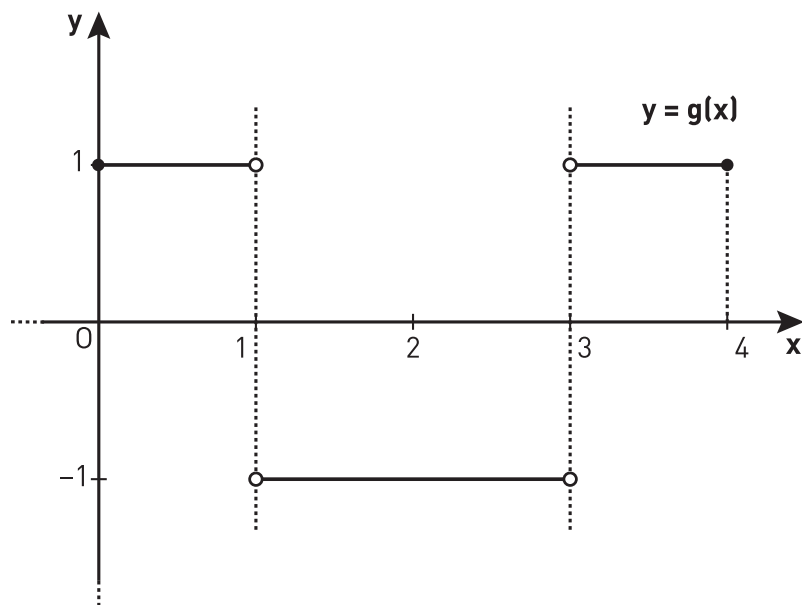
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 1$$

Osserviamo che i limiti destri e sinistri non coincidono, quindi f non è derivabile in $x = 1$ e $x = 3$. Per periodicità possiamo affermare che f non è derivabile nei punti $x = 1 + 4k$ e $x = 3 + 4k$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero nei punti $x = 1 + 2k'$, con $k' \in \mathbb{Z}$.

Poiché $f(x)$ è una funzione periodica non costante, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste.

Per calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ si utilizza il teorema del confronto. Infatti, dato che $-1 \leq f(x) \leq 1$, si ha che $-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ per $x > 0$. Ne risulta che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Disegniamo il grafico di $g(x) = f'(x)$, di cui abbiamo già calcolato l'espressione analitica.



Determiniamo l'espressione analitica di $h(x)$ per $x \in [0; 4]$, considerando i tre sottointervalli $[0; 1]$, $]1; 3]$ e $]3; 4]$.

- Per $x \in [0; 1]$, $h(x) = \int_0^x t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$.

- Per $x \in]1; 3]$,

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \int_0^1 f(t) \, dt + \int_1^x (2 - t) \, dt = \\
 &h(1) + \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \\
 &\frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1
 \end{aligned}$$

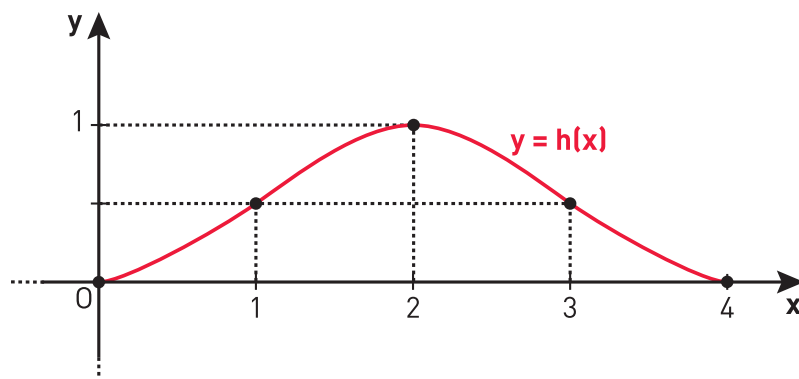
- Per $x \in]3; 4]$,

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \int_0^3 f(t) \, dt + \int_3^x (t - 4) \, dt = \\
 &h(3) + \left[\frac{t^2}{2} - 4t \right]_3^x = \\
 &\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{9}{2} + 12 = \frac{x^2}{2} - 4x + 8
 \end{aligned}$$

Quindi l'espressione analitica per $h(x)$ è la seguente

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0; 1[\\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{se } x \in [1; 3[\\ \frac{x^2}{2} - 4x + 8 & \text{se } x \in [3; 4] \end{cases}$$

Osserviamo che il grafico è composto da tre archi di parabola che si raccordano nei punti $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ e $\left(3; \frac{1}{2}\right)$.



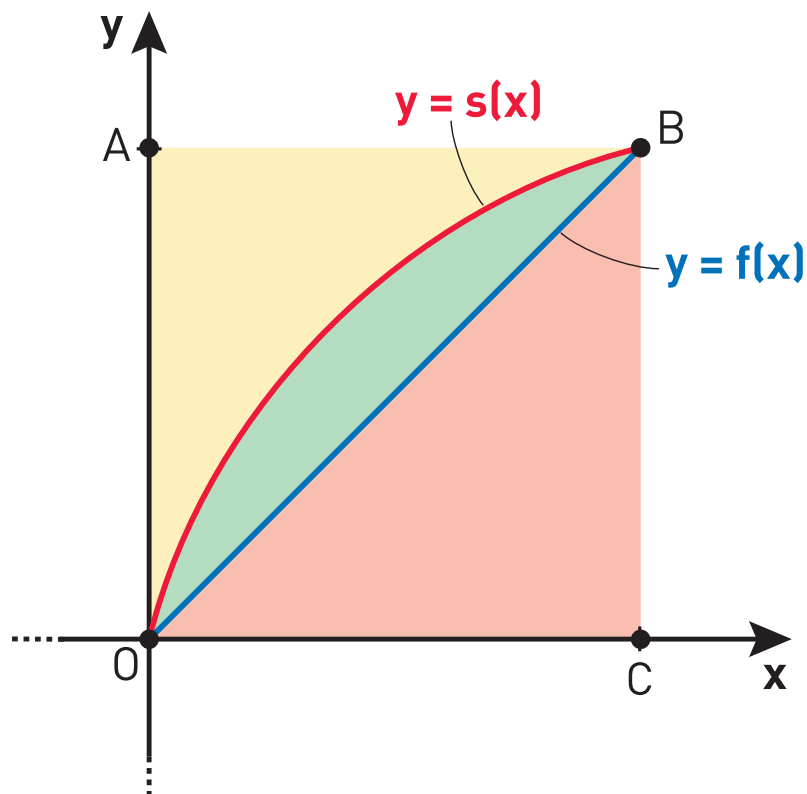
In alternativa è possibile disegnare un grafico qualitativo di $h(x)$ osservando che la funzione integrale di funzioni lineari a tratti è formata da archi di parabola la cui concavità dipende dal segno di $g(x) = h''(x)$ e che l'area di ogni triangolo congruente a OBC è uguale a $\frac{1}{2}$.

2. Il periodo di $f(x)$ è 4, mentre il periodo di $s(x) = \sin(bx)$ è $\frac{2\pi}{b}$. Ponendo $\frac{2\pi}{b} = 4$ si ottiene $b = \frac{\pi}{2}$.

I grafici di $f(x)$ e $s(x)$ dividono il quadrato $OABC$ in tre parti in quanto $f(0) = s(0) = 0$ e $f(1) = s(1) = 1$ e i grafici di f e s non hanno altri punti di intersezione in $]0; 1[$. Dimostriamo quest'ultima affermazione.

Il grafico di $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è una contrazione orizzontale di $\sin x$ di fattore $\frac{2}{\pi}$. La funzione $\sin(x)$ sta sopra la retta congiungente il punto $(0; 0)$ e

il punto $(\frac{\pi}{2}; 1)$. Quindi il grafico di $s(x)$ in $[0; 1]$ sta sopra la funzione $f(x) = x$ e di conseguenza i due grafici non si intersecano in altri punti.

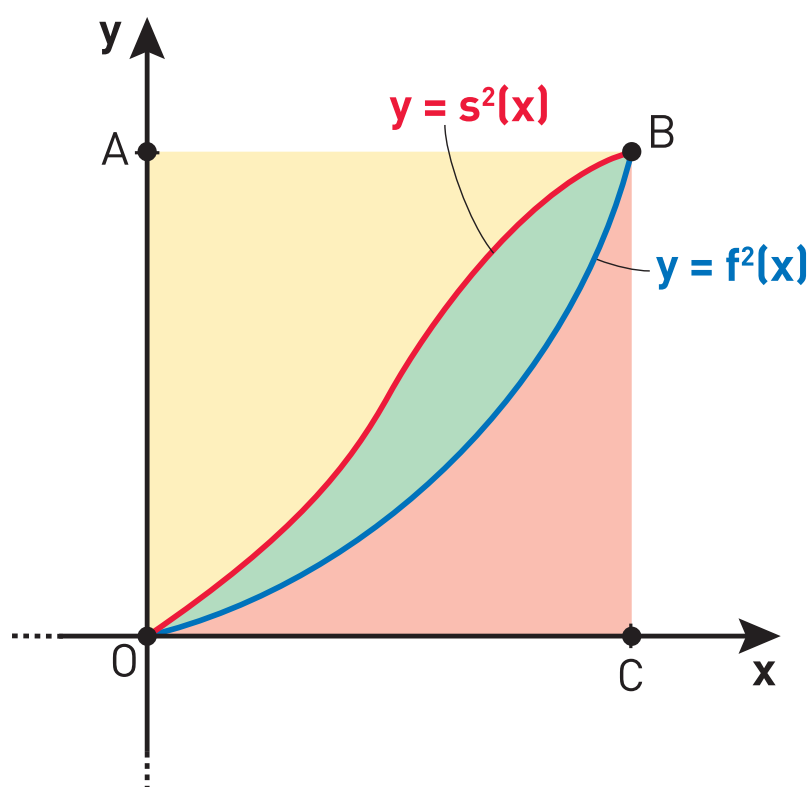


Dato che l'area del quadrato $OABC$ è uguale a 1, la probabilità di cadere su una delle tre parti sarà uguale alla misura della rispettiva area. Calcoliamo quindi le aree.

$$\begin{aligned}
 A_{rosa} &= \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0,5 \\
 A_{verde} &= \int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \right] dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\
 &\quad -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \simeq 0,14 \\
 A_{gialla} &= 1 - A_{rosa} - A_{verde} = 1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \simeq 0,36.
 \end{aligned}$$

Le probabilità di cadere nelle zone rosa, verde e gialla sono quindi rispettivamente del 50%, del 14% circa e del 36% circa.

3. Rappresentiamo le funzioni $f^2(x) = x^2$ e $s^2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo $[0; 1]$, osservando che, essendo $0 \leq f(x) \leq 1$ e $0 \leq s(x) \leq 1$, si avrà $f^2(x) \leq f(x)$ e $s^2(x) \leq s(x)$.



Quindi si avrà un aumento dell'area gialla e una diminuzione dell'area rosa; per quanto riguarda l'area verde è difficile fare una stima qualitativa.

Calcoliamo quindi le probabilità, ancora una volta uguali alle rispettive aree.

Per calcolare l'integrale di $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ utilizzeremo la formula di bisezione

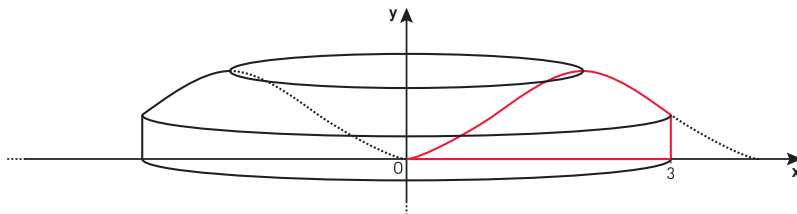
$$\sin^2(\alpha/2) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} A_{rosa} &= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \simeq 0,33 \\ A_{verde} &= \int_0^1 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2 \right] dx = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx - \int_0^1 x^2 dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos(\pi x)] dx - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \left([x]_0^1 - \frac{1}{\pi} [\sin(\pi x)]_0^1 \right) - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} (\sin \pi - \sin 0) \right] - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \simeq 0,17 \\ A_{gialla} &= 1 - A_{rosa} - A_{verde} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \simeq 0,5. \end{aligned}$$

Le probabilità di cadere nelle zone rosa, verde e gialla sono quindi rispettivamente del 33% circa, del 17% circa e del 50%.

4. Per calcolare il volume del solido di rotazione utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 xh(x)dx = \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 x \frac{x^2}{2} dx + \int_1^3 x \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \right) dx \right) = \\ &= 2\pi \left(\left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 \right) = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8} - \frac{81}{8} + 18 - \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{83}{12}\pi \end{aligned}$$



SOLUZIONE DEL QUESITO 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Per calcolare i due integrali definiti usiamo la formula di integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Consideriamo l'integrale $\int_0^1 x^2 e^x dx$ e poniamo $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^x$. Osserviamo che $g(x) = g'(x) = e^x$ e che $f'(x) = 2x$. Otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x dx &= \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = \\ &= \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = \\ &= \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2E = \\ &= 1^2 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - 2E = \\ &= e - 2E.\end{aligned}$$

Passiamo al secondo integrale, $\int_0^1 x^3 e^x dx$, e poniamo $f(x) = x^3$ e $g'(x) = e^x$. Applichiamo nuovamente la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 e^x dx &= \left[x^3 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx = \\ &= \left[x^3 e^x \right]_0^1 - 3 \int_0^1 x^2 e^x dx = \\ &= \left[x^3 e^x \right]_0^1 - 3(e - 2E) = \\ &= 1^3 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - 3e + 6E = \\ &= e - 3e + 6E = \\ &= -2e + 6E.\end{aligned}$$

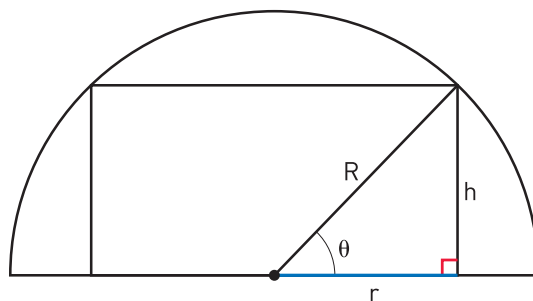
SOLUZIONE DEL QUESITO 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Consideriamo il caso in cui la base superiore del cilindro retto corrispondente alla torta è tangente alla superficie interna della cupola semisferica. Fissata l'altezza, questa torta è la più grande possibile.

Indichiamo i volumi della cupola e della torta con V_{cupola} e V_{torta} . Dobbiamo verificare che $V_{torta} < \frac{3}{5}V_{cupola}$. Questo equivale a mostrare che $\frac{V_{torta}}{V_{cupola}} < \frac{3}{5}$. Cerchiamo il massimo del rapporto tra i volumi della torta e della cupola, mostrando che tale massimo è sempre minore di $\frac{3}{5}$.

La figura mostra una sezione verticale di torta e cupola, con il piano di sezione perpendicolare alla base della cupola e passante per il suo centro.

Indichiamo con R il raggio della cupola semisferica e con r il raggio di base della torta. Consideriamo un angolo ϑ come indicato in figura.



Il metodo più efficiente per risolvere il quesito è considerare come incognita l'altezza h della torta.

Mostriamo la risoluzione anche nel caso in cui si scelgano come incognite il raggio r della torta oppure l'angolo ϑ .

METODO 1: l'incognita è l'altezza h

Il volume della cupola è:

$$V_{cupola} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Scriviamo il volume della torta in funzione di h . R , r e h sono i lati di un triangolo rettangolo, quindi per il teorema di Pitagora si ha $r = \sqrt{R^2 - h^2}$, con $0 \leq h \leq R$. Calcoliamo il volume della torta:

$$V_{torta} = \pi(\sqrt{R^2 - h^2})^2 \cdot h = \pi(R^2 - h^2) \cdot h.$$

Il rapporto tra i volumi è:

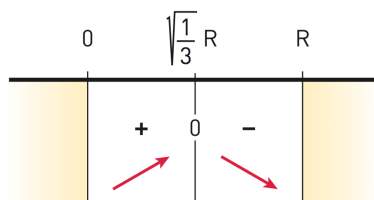
$$f(h) = \frac{\pi(R^2 - h^2) \cdot h}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \frac{h(R^2 - h^2)}{R^3} = \frac{3}{2} \frac{R^2 h - h^3}{R^3}.$$

Studiamo massimi e minimi di $f(h)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(h) = \frac{3}{2R^3} \cdot (R^2 - 3h^2).$$

Studiamo il segno di $f'(h)$ con $0 \leq h \leq R$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2R^3} \cdot (R^2 - 3h^2) \geq 0 &\rightarrow R^2 - 3h^2 \geq 0 \rightarrow 3h^2 \leq R^2 \rightarrow \\ h^2 \leq \frac{R^2}{3} &\rightarrow -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R \rightarrow 0 \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R. \end{aligned}$$



Pertanto, per $h = \sqrt{\frac{1}{3}}R$ il rapporto dei volumi è massimo e vale:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}R\right) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}R(R^2 - \frac{1}{3}R^2)}{R^3} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}R(\frac{2}{3}R^2)}{R^3} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,577 < \frac{3}{5}.$$

METODO 2: l'incognita è il raggio r

In alternativa, è possibile risolvere il quesito considerando come incognita la variabile r , ovvero il raggio di base della torta. Il volume della cupola non dipende da r :

$$V_{cupola} = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Per il teorema di Pitagora si ha $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, con $0 \leq r \leq R$. Calcoliamo il volume della torta in funzione di r :

$$V_{torta} = \pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Il rapporto tra i volumi è:

$$g(r) = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \frac{r^2 \sqrt{R^2 - r^2}}{R^3}.$$

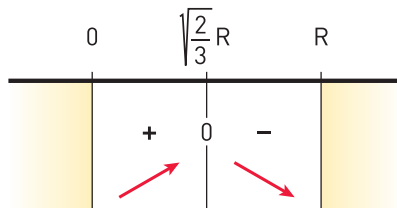
Studiamo massimi e minimi di $g(r)$, con $0 \leq r \leq R$:

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{3}{2R^3} \cdot \left[2r\sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}}(-2r) \right] = \\ &= \frac{3}{2R^3} \cdot 2r \left(\sqrt{R^2 - r^2} - r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = \\ &= \frac{3}{R^3} \cdot r \frac{2(R^2 - r^2) - r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{3}{2R^3} \cdot \frac{r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

Il segno della derivata coincide con quello del numeratore, poiché il denominatore è sempre positivo.

Ricordando che $0 \leq r \leq R$, abbiamo:

$$\begin{aligned} r(2R^2 - 3r^2) \geq 0 &\rightarrow 2R^2 \geq 3r^2 \rightarrow r^2 \leq \frac{2}{3}R^2 \rightarrow \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}R &\leq r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}R \rightarrow 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}R. \end{aligned}$$



Pertanto, per $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ il rapporto dei volumi è massimo e vale:

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{3}{2} \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2}}{R^3} = \frac{3}{2} \frac{\frac{2}{3}R^2 \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2}}{R^3} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,577 < \frac{3}{5}.$$

METODO 3: l'incognita è l'angolo ϑ

Il volume della semisfera è

$$V_{cupola} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

e il volume della torta è

$$V_{torta} = \pi r^2 \cdot h.$$

Come mostrato nella figura iniziale, r , R e ϑ sono gli elementi del triangolo rettangolo, quindi:

$$r = R \cos \vartheta \text{ e } h = R \sin \vartheta.$$

Dunque:

$$V_{torta} = \pi r^2 \cdot h = \pi (R \cos \vartheta)^2 \cdot R \sin \vartheta = \pi R^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta.$$

Pertanto la funzione che esprime il rapporto tra i volumi è:

$$m(\vartheta) = \frac{V_{torta}}{V_{cupola}} = \frac{\pi R^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta.$$

Poiché la figura è simmetrica, possiamo limitare lo studio della funzione all'intervallo $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Studiamo dunque massimi e minimi della funzione $m(\vartheta)$, con $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

Calcoliamo la derivata prima:

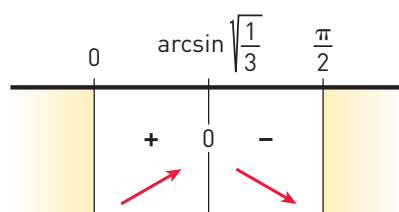
$$m'(\vartheta) = \frac{3}{2} [2 \cos \vartheta (-\sin \vartheta) \cdot \sin \vartheta + \cos^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta] = \frac{3}{2} \cos \vartheta (-2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta).$$

Poiché $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$ otteniamo:

$$m'(\vartheta) = \frac{3}{2} \cos \vartheta (-2 \sin^2 \vartheta + 1 - \sin^2 \vartheta) = \frac{3}{2} \cos \vartheta (-3 \sin^2 \vartheta + 1).$$

Studiamo il segno della derivata prima in $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Poiché nel primo quadrante si ha $\sin \vartheta \geq 0$ e $\cos \vartheta \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cos \vartheta (-3 \sin^2 \vartheta + 1) &\geq 0 \rightarrow -3 \sin^2 \vartheta + 1 \geq 0 \rightarrow \\ \sin^2 \vartheta &\leq \frac{1}{3} \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{3}} \leq \sin \vartheta \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow 0 \leq \vartheta \leq \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$



Dal grafico della derivata osserviamo che per $\vartheta = \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}$, ovvero per $\sin \vartheta = \sqrt{\frac{1}{3}}$, il rapporto tra i volumi è massimo.

Poiché:

$$m(\vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta = \frac{3}{2} (1 - \sin^2 \vartheta) \sin \vartheta,$$

il valore massimo del rapporto dei volumi è:

$$m\left(\arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,577 < \frac{3}{5}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Per determinare i valori di a e b , osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = \frac{\sqrt{2b} - 6}{0}.$$

Se $\sqrt{2b} - 6$ fosse diverso da 0, allora il limite considerato sarebbe $\pm\infty$, contraddicendo l'ipotesi data. Allora, deve essere $\sqrt{2b} - 6 = 0$, cioè $b = 18$. Sostituendo ora $b = 18$ nella funzione, otteniamo una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

I metodo Con de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 36} - 6}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+36}}}{1} = \frac{a}{2\sqrt{36}} = \frac{a}{12}.$$

II metodo Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{ax + 36} + 6$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 36} - 6}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + 36 - 36}{x(\sqrt{ax + 36} + 6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{ax + 36} + 6} = \frac{a}{12}.$$

Imponendo l'ipotesi $\frac{a}{12} = 1$, otteniamo $a = 12$.

Dunque i valori cercati risultano $a = 12$ e $b = 18$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Sia X una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo $[0; 2]$ e ha densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3.$$

Per prima cosa verifichiamo che $f(x)$ è effettivamente una funzione densità di probabilità, ovvero che:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0; 2];$
- $\int_0^2 f(x)dx = 1.$

Studiamo il segno della funzione $f(x)$:

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \geq 0 \longrightarrow \frac{3}{2}x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \geq 0.$$

Studiamo separatamente i due fattori:

- $\frac{3}{2}x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi in particolare per ogni $x \in [0; 2];$
- $1 - \frac{1}{2}x \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}x \leq 1 \quad \longrightarrow \quad x \leq 2.$

Abbiamo dimostrato che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0; 2]$.

Verifichiamo la seconda proprietà:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx &= \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx - \frac{3}{4} \int_0^2 x^3 dx = \\ \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_0^2 - \frac{3}{4} \left[\frac{1}{4} \cdot x^4 \right]_0^2 &= \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{4} &= 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che $f(x)$ è una funzione densità di probabilità.

Il valore medio dei numeri generati è:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^2 x \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^2 x^3 dx - \frac{3}{4} \int_0^2 x^4 dx = \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4} \cdot x^4 \right]_0^2 - \frac{3}{4} \left[\frac{1}{5} \cdot x^5 \right]_0^2 = \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{5} = \\ &= 6 - \frac{24}{5} = \frac{30-24}{5} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

La distribuzione dei numeri generati è continua, quindi la probabilità di generare un numero esatto, come $\frac{4}{3}$, è nulla.

Infatti:

$$p\left(X = \frac{4}{3}\right) = p\left(\frac{4}{3} \leq X \leq \frac{4}{3}\right) = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x) dx = 0.$$

Questa osservazione ci permette anche di dire che $p(X < k) = p(X \leq k)$, per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$.

Poiché due estrazioni consecutive di un numero sono eventi indipendenti, la probabilità che il secondo numero generato sia minore di 1 è:

$$\begin{aligned} p(X < 1) &= p(X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx - \frac{3}{4} \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_0^1 - \frac{3}{4} \left[\frac{1}{4} \cdot x^4 \right]_0^1 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{8-3}{16} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

La retta r passante per i due punti $A(-2, 3, 1)$ e $B(3, 0, -1)$ ha direzione \vec{AB} . Per scrivere le sue equazioni, determiniamo quelle della retta passante per A e parallela al vettore \vec{AB} .

Il vettore \vec{AB} ha componenti $(x_B - x_A; y_B - y_A, z_B - z_A) = (3 - (-2); 0 - 3; -1 - 1) = (5; -3; -2)$, quindi le equazioni parametriche della retta r sono:

$$\begin{cases} x = -2 + 5k \\ y = 3 - 3k \\ z = 1 - 2k. \end{cases}$$

Osserviamo che, in alternativa, avremmo potuto ricavare l'equazione cartesiana della retta imponendo direttamente il passaggio per A e B :

$$\begin{aligned} \frac{x - x_A}{x_B - x_A} &= \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \\ \Rightarrow \frac{x + 2}{3 + 2} &= \frac{y + 3}{-3} = \frac{z - 1}{-1 - 1} \\ \Rightarrow \frac{x + 2}{5} &= \frac{y - 3}{-3} = \frac{z - 1}{-2}. \end{aligned}$$

Per determinare l'equazione del piano π , ricordiamo che un piano generico ha equazione $ax + by + cz + d = 0$, dove (a, b, c) sono le coordinate del vettore normale.

Il piano π è perpendicolare alla retta r , quindi il vettore normale al piano coincide con la direzione della retta: $(a, b, c) = (5, -3, -2)$.

Il generico piano perpendicolare a r ha quindi equazione:

$$5x - 3y - 2z + d = 0.$$

Per determinare il valore del parametro d , imponiamo il passaggio del piano per il punto $C = (2, 2, -3)$:

$$5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + d = 0$$

da cui si ottiene $d = -10$.

Il piano cercato è quindi $5x - 3y - 2z - 10 = 0$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Osserviamo che se l'esponente a di x^a è un numero reale non intero, x^a è definita per $x > 0$, mentre se $a \in \mathbb{Z}$ allora x^a risulta definita per $x \neq 0$. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

dovrà quindi essere considerato in un intorno completo di $x = 0$ oppure solamente nell'intorno destro, $x > 0$, a seconda dei casi.

Per $a = 0$ il limite diventa:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^a} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - x) = \sin 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, $a = 0$ non è accettabile.

Per $a < 0$ il limite è finito e risulta uguale a 0.

Per $a > 0$ il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0$$

Vediamo se sono verificate le ipotesi del *teorema di De L'Hospital*. Poniamo $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x^a$.

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in 0: $f(x)$ è differenza di funzioni continue in 0 e $g(x)$ è una funzione potenza.
Inoltre $f(0) = g(0) = 0$.
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in \mathbb{R} .
- $g'(x) = a \cdot x^{a-1} \neq 0$ in $\mathbb{R} - \{0\}$.

Le ipotesi del *teorema di De L'Hospital* sono verificate, quindi possiamo applicarlo per calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{a \cdot x^{a-1}}.$$

Riconduciamo l'ultimo limite al limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto riscriviamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{a \cdot x^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{a x^{a-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{a} x^{3-a} \right).$$

- Se $3 - a > 0$ il limite precedente è 0 e quindi i valori $a < 3$ non sono accettabili.
- Se $3 - a = 0$ il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

quindi $a = 3$ è accettabile.

- Se $3 - a < 0$ il limite precedente è infinito, quindi $a > 3$ non è accettabile.

Pertanto l'unico valore di a accettabile è $a = 3$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

I centri delle sfere tangenti a $\pi : x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto $P(1; 0; 2)$ appartengono alla retta perpendicolare a π passante per P .

Il vettore perpendicolare a un piano generico di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è $\vec{n}(a; b; c)$, quindi il vettore perpendicolare a π ha coordinate $\vec{n}(1; 2; -1)$.

I centri delle sfere cercate appartengono quindi alla retta r che ha direzione $\vec{n}(1; 2; -1)$ e passa per il punto $P(1; 0; 2)$ e ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 0 + 2k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

Adesso dobbiamo imporre che il raggio delle sfera sia $\sqrt{6}$ ovvero che la distanza del punto $P(1; 0; 2)$ da un punto generico di r sia $\sqrt{6}$.

$$\sqrt{(1 + k - 1)^2 + (2k - 0)^2 + (2 - k - 2)^2} = \sqrt{6}$$

$$k^2 + 4k^2 + k^2 = 6$$

$$k = \pm 1$$

Sostituendo k nelle equazioni parametriche di r troviamo i centri cercati:

$$C_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Indichiamo con X lo spazio campionario dei possibili esiti di un lancio e con F_n l'evento corrispondente all'uscita della faccia che riporta il numero n , con $1 \leq n \leq 12$. Abbiamo:

$$p(F_n) = \begin{cases} \frac{1}{13} & \text{se } n \neq 3 \\ \frac{2}{13} & \text{se } n = 3 \end{cases}.$$

In particolare $p = p(F_3) = \frac{2}{13} \simeq 15,38\%$.

Consideriamo ora X' lo spazio campionario formato da tutti i possibili esiti di 5 lanci consecutivi e indichiamo con:

- E_0 l'evento corrispondente all'uscita di 5 numeri tutti diversi da 3;
- E_1 l'evento corrispondente all'uscita di 5 numeri di cui uno solo è 3;
- E l'evento corrispondente all'uscita di 5 numeri di cui almeno due sono 3.

Si ha che $E = X' - (E_0 \cup E_1)$. Gli eventi E_0 ed E_1 sono incompatibili, cioè non si possono verificare contemporaneamente, quindi $p(E_0 \cup E_1) = p(E_0) + p(E_1)$. Calcoliamo $p(E)$:

$$p(E) = P(X') - p(E_0) - p(E_1) = 1 - p(E_0) - p(E_1).$$

L'esito di ogni lancio è indipendente da quello del lancio precedente, quindi:

$$\begin{aligned} p(E_0) &= \binom{5}{0} (1 - p(F_3))^5 = \left(\frac{11}{13}\right)^5; \\ p(E_1) &= \binom{5}{1} (1 - p(F_3))^4 p(F_3) = 5 \left(\frac{11}{13}\right)^4 \frac{2}{13}. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$p(E) = 1 - \left(\frac{11}{13}\right)^5 - 5 \left(\frac{11}{13}\right)^4 \frac{2}{13} \simeq 17,19\%.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Studiamo la funzione $f(x) = \arctan(x) + x^3 + e^x$. Gli zeri di questa funzione corrispondono alle soluzioni dell'equazione data.

Osserviamo che f è continua e strettamente crescente su tutto \mathbb{R} poiché somma di tre funzioni continue e strettamente crescenti su tutto \mathbb{R} . Inoltre, è illimitata sia inferiormente sia superiormente, infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\frac{\pi}{2} - \infty + 0 = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{\pi}{2} + \infty + \infty = +\infty.\end{aligned}$$

Quindi, f è iniettiva e suriettiva su \mathbb{R} . La biettività assicura che f assume tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$ una e una sola volta. In particolare, esiste esattamente un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Un metodo alternativo per dedurre l'**esistenza** della soluzione è il seguente. Per il teorema di permanenza del segno applicato ai limiti calcolati sopra, esistono $a < 0$ e $b > 0$ tali che $f(x) < 0$ per ogni $x \in]-\infty; a]$ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [b; +\infty[$. Nell'intervallo $[a; b]$ valgono le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri che assicura che l'equazione ammette soluzione.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

Studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto:

$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Per la definizione di valore assoluto, in $[-3; 3]$ si ha:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{se } -3 < x < -2 \vee 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

L'intervallo $[-3; 3]$ è chiuso e limitato, come richiesto dal teorema di Rolle.

Analizziamo le ipotesi del teorema di Rolle.

Continuità in $[-3; 3]$.

L'espressione analitica è polinomiale, quindi la funzione è continua nei punti interni agli intervalli di definizione dei due tratti.

Analizziamo la continuità nei punti di ascissa $x = -2$ e $x = 2$.

Calcoliamo i limiti sinistro e destro nel punto di ascissa $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (4 - x^2) = 0,$$

$$f(-2) = 4 - (-2)^2 = 0$$

dunque la funzione è continua in $x = -2$.

Analogamente si può verificare che la funzione è continua in $x = 2$, quindi l'ipotesi di continuità è verificata.

Derivabilità in $] - 3; 3[$.

Deriviamo la funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } -2 < x < 2 \\ +2x & \text{se } -3 < x < -2 \vee 2 < x < 3 \end{cases}$$

L'espressione analitica della derivata è polinomiale, quindi la funzione è derivabile a eccezione eventualmente dei punti di ascissa $x = -2$ e $x = 2$.

Stabiliamo se la funzione è derivabile in $x = -2$, calcolando i limiti sinistro e destro. Poiché

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x = -4 \text{ e } f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-2x) = 4,$$

la funzione non è derivabile in $x = -2$. Analogamente si verifica che la funzione non è derivabile in $x = 2$ e quindi la seconda ipotesi del teorema di Rolle non è verificata.

Osserviamo che, nonostante non tutte le ipotesi del teorema siano verificate, esiste un punto interno all'intervallo in cui la derivata si annulla: $x = 0$. Tale esempio non è in contraddizione con il teorema di Rolle. Il teorema, infatti, assicura l'esistenza di almeno un punto interno all'intervallo in cui la derivata si annulla nel caso le ipotesi siano tutte verificate. Non esclude che punti in cui la derivata si annulla esistano anche se le ipotesi non sono verificate. Le ipotesi del teorema sono infatti condizioni sufficienti ma non necessarie.

Se consideriamo l'intervallo $[-1; 1]$, le prime due ipotesi del teorema sono verificate. Vale anche la terza ipotesi richiesta del teorema. Infatti: $f(-1) = f(1) = 4 - (\pm 1) = 3$. Pertanto il punto $x = 0$ trovato in precedenza è il punto di cui assicura l'esistenza il teorema di Rolle applicato all'intervallo $[-1; 1]$.

A. S. 2017-2018

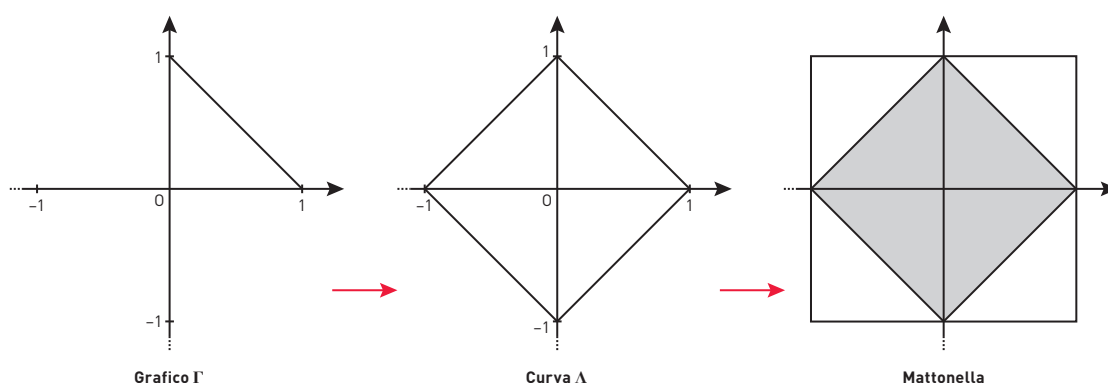
Testo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

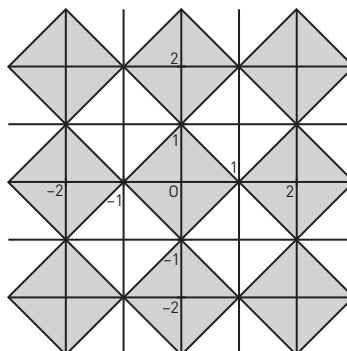
PROBLEMI

- 1** Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:
- si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[0; 1]$, che soddisfi le condizioni:
 - a) $f(0) = 1$;
 - b) $f(1) = 0$;
 - c) $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.
 - La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y , all'asse x e all'origine O , ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ , passante per i punti $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$, simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$.
 - La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q ; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:



La pavimentazione risultante è riportata di seguito:



1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ , così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1 - x)^n$, considerate per $x \in [0; 1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n , calcola $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} B(n)$ e interpreta i risultati in termini geometrici.

Il cliente decide di ordinare 5000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10 000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

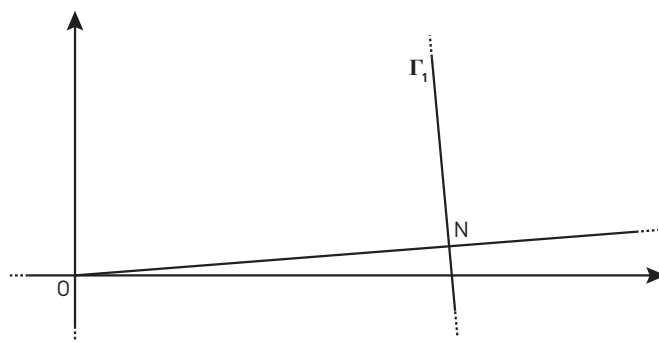
4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

- 2** Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

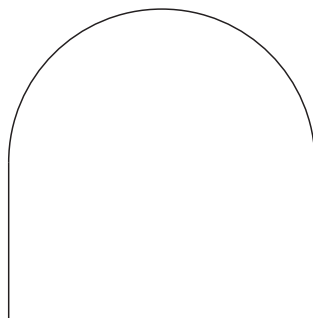
1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 , s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P; y_P)$ all'interno di T , questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O . Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



QUESTIONARIO

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?
3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.
4. Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.

- 5 Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

- 6 Determinare l'equazione della superficie sferica S , con centro sulla retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

tangente al piano $\pi : 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto $T(-4; 0; 1)$.

- 7 Determinare a in modo che

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) \, dx$$

sia uguale a 10.

- 8 In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?
- 9 Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3; 1; 0)$, $B(3; -1; 2)$, $C(1; 1; 2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.
- 10 Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Svolgimento del problema 1

1 Parte 1

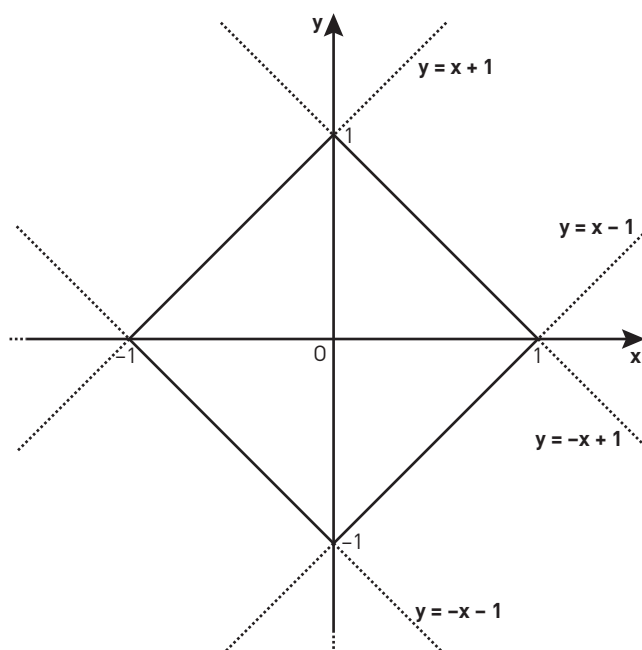
La funzione $y = f(x)$ ha per grafico il segmento Γ in figura 1 che giace sulla retta di equazione $y = -x + 1$, con $x \in [0; 1]$.

Verifichiamo che la funzione $f(x) = -x + 1$ soddisfa le condizioni date:

- a) $f(0) = -0 + 1 = 1$;
- b) $f(1) = -1 + 1 = 0$;
- c) $0 < x < 1 \rightarrow -1 < -x < 0 \rightarrow 1 - 1 < 1 - x < 1 + 0 \rightarrow$
 $0 < 1 - x < 1 \rightarrow 0 < f(x) < 1$.

La curva Λ in figura 1 si ottiene tracciando in ordine:

- il grafico Γ della funzione $y = -x + 1$, con $x \in [0; 1]$;
- il grafico simmetrico a Γ rispetto all'asse y , che corrisponde alla funzione di equazione $y = x + 1$, con $x \in [-1; 0]$;
- il grafico simmetrico a Γ rispetto all'asse x , la cui funzione associata ha equazione $y = x - 1$, con $x \in [0; 1]$;
- il grafico simmetrico a Γ rispetto all'origine O , la cui funzione associata ha equazione $y = -x - 1$, con $x \in [-1; 0]$.



Quindi troviamo:

$$\Lambda : \begin{cases} y = -|x| + 1, & \text{con } x \in [-1; 1] \text{ e } y \geq 0; \\ y = |x| - 1, & \text{con } x \in [-1; 1] \text{ e } y < 0; \end{cases}$$

che in modo più sintetico si può esprimere come $|y| = -|x| + 1$.

In forma implicita, l'equazione della curva Λ è allora:

$$|x| + |y| = 1.$$

Parte 2

Supponiamo che $y = f(x)$ sia una funzione polinomiale di secondo grado continua e derivabile su \mathbb{R} . Dunque il grafico è una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Imponiamo che verifichi le condizioni a) e b):

$$\text{a) } f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1;$$

$$\text{b) } f(1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 0 \quad \rightarrow \quad a + b + c = 0;$$

e l'ulteriore nuova condizione $f'(0) = 0$:

$$f'(x) = 2ax + b \quad \rightarrow \quad f'(0) = 2a \cdot 0 + b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0.$$

Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -b - c \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}.$$

In conclusione, $f(x) = -x^2 + 1$.

La parabola ottenuta è simmetrica rispetto all'asse y , ha vertice in $(0; 1)$, concavità verso il basso e $f(1) = 0$, quindi anche la condizione c) è verificata.

Passiamo ora all'analisi della parte colorata. L'area dell'intera mattonella Q è pari a 4 e il 55% di 4 è $0,55 \cdot 4 = \frac{11}{5}$.

Vediamo se l'area grigia delimitata dal grafico della funzione $y = -x^2 + 1$ per $0 \leq x \leq 1$ e dalle curve simmetriche è pari a $\frac{11}{5}$.

Sfruttando le simmetrie della curva chiusa, l'area grigia si può ottenere calcolando l'integrale:

$$4 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = 4 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 4 \left[-\frac{1}{3} + 1 \right] = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \neq \frac{11}{5}.$$

Quindi non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado.

Supponiamo ora che $y = f(x)$ sia una funzione polinomiale di terzo grado, quindi della forma

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

continua e derivabile su \mathbb{R} .

Imponiamo che la funzione verifichi le condizioni di costruzione a) e b):

$$a) f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 1 \rightarrow d = 1;$$

$$b) f(1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0;$$

e l'ulteriore condizione $f'(0) = 0$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(0) = 3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0.$$

Quindi:

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -1 - a \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Scriviamo l'equazione della cubica in funzione del parametro a :

$$y = ax^3 - (1 + a)x^2 + 1.$$

Per determinare a imponiamo che l'area grigia definita dalla polinomiale di terzo grado parametrica sia pari a $\frac{11}{5}$:

$$4 \int_0^1 [ax^3 - (1 + a)x^2 + 1] dx = \frac{11}{5} \rightarrow 4 \left[\frac{a}{4}x^4 - \frac{1+a}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{11}{5} \rightarrow$$

$$4 \left[\frac{a}{4} - \frac{1+a}{3} + 1 \right] = \frac{11}{5} \rightarrow a = \frac{7}{5}.$$

Sostituendo il valore di a trovato otteniamo il seguente polinomio di terzo grado:

$$f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1.$$

Vediamo se questa funzione polinomiale di terzo grado verifica la condizione c): $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.

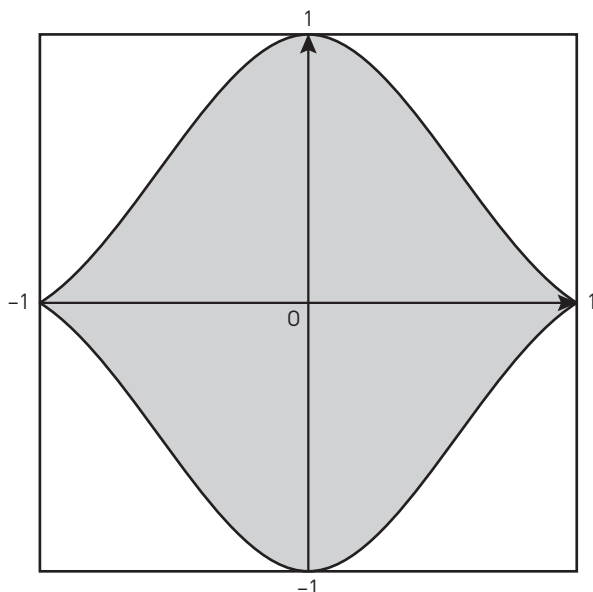
Osserviamo che $f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x$ e studiamone il segno:

$$f'(x) > 0 \rightarrow 7x^2 - 8x > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > \frac{8}{7}.$$

Ne segue che $f(x)$, nell'intervallo $[0; 1]$, è strettamente decrescente. Inoltre, poiché $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, possiamo concludere che $0 < f(x) < 1$ per ogni $x \in]0; 1[$.

In conclusione, la funzione polinomiale di terzo grado trovata soddisfa tutte le condizioni richieste.

Per disegnare la mattonella risultante, usiamo le simmetrie rispetto agli assi e all'origine, analogamente a quanto fatto nella **parte 1**.



Parte 3

Verifichiamo che la famiglia di funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $x \in [0; 1]$ rispetta le condizioni a), b) e c).

- a) $a_n(0) = 1 - 0^n = 1$;
- b) $a_n(1) = 1 - 1^n = 0$;
- c) $0 < x < 1 \rightarrow 0 < x^n < 1 \rightarrow -1 < -x^n < 0 \rightarrow 1 - 1 < 1 - x^n < 1 + 0 \rightarrow$
 $0 < 1 - x^n < 1 \rightarrow 0 < a_n(x) < 1$.

Verifichiamo che anche la famiglia di funzioni $b_n(x) = (1 - x)^n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $x \in [0; 1]$ rispetta le condizioni a), b) e c).

- a) $b_n(0) = (1 - 0)^n = 1^n = 1$;
- b) $b_n(1) = (1 - 1)^n = 0^n = 0$;
- c) $0 < x < 1 \rightarrow -1 < -x < 0 \rightarrow 1 - 1 < 1 - x < 1 + 0 \rightarrow 0 < 1 - x < 1 \rightarrow$
 $0 < (1 - x)^n < 1 \rightarrow 0 < b_n(x) < 1$.

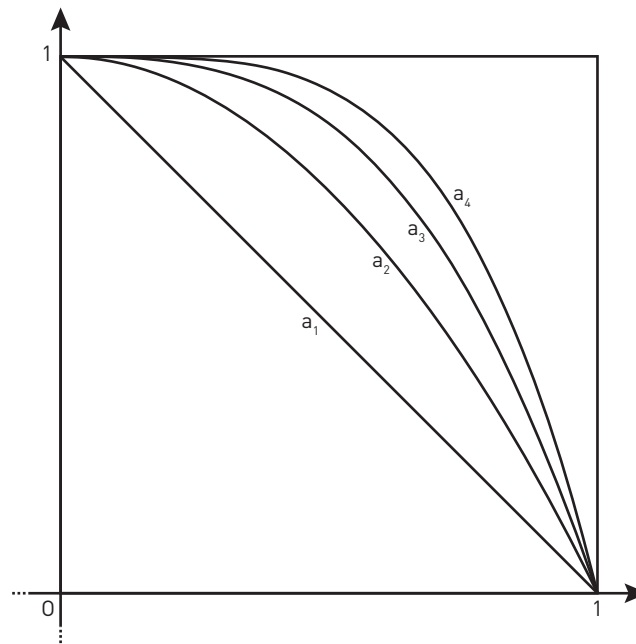
Sia ora

$$A(n) = 4 \int_0^1 (1 - x^n) dx = 4 \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4n}{n+1}.$$

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{n+1} = 4.$$

In termini geometrici, questo vuol dire che l'area $A(n)$, quando n tende all'infinito, tende all'area del quadrato Q . Quindi la *mattonella limite* risulta completamente grigia.



Sia invece

$$B(n) = 4 \int_0^1 (1-x)^n dx.$$

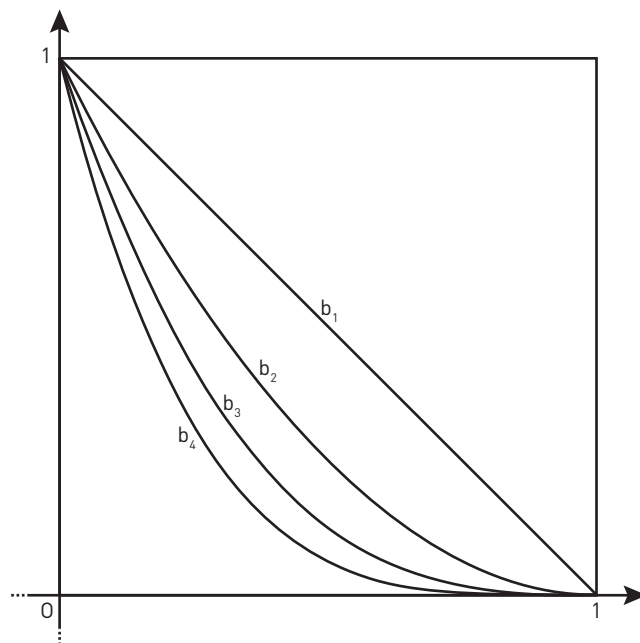
Ponendo $1-x = t \rightarrow -dx = dt$, abbiamo:

$$B(n) = 4 \int_1^0 -t^n dt = 4 \int_0^1 t^n dt = 4 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{4}{n+1}.$$

Allora:

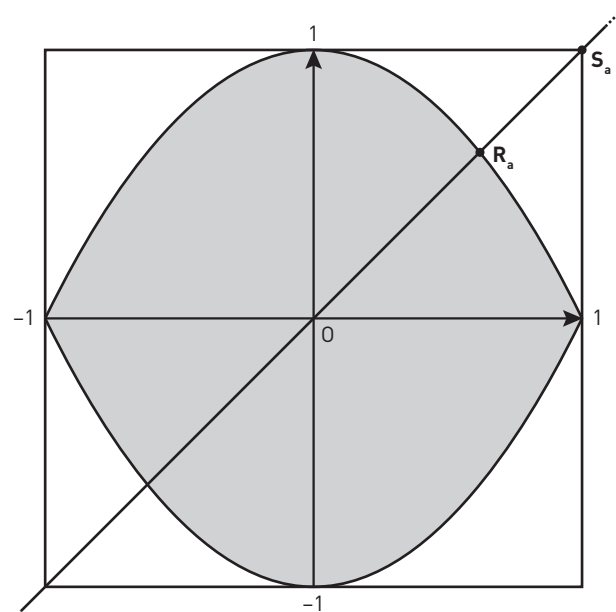
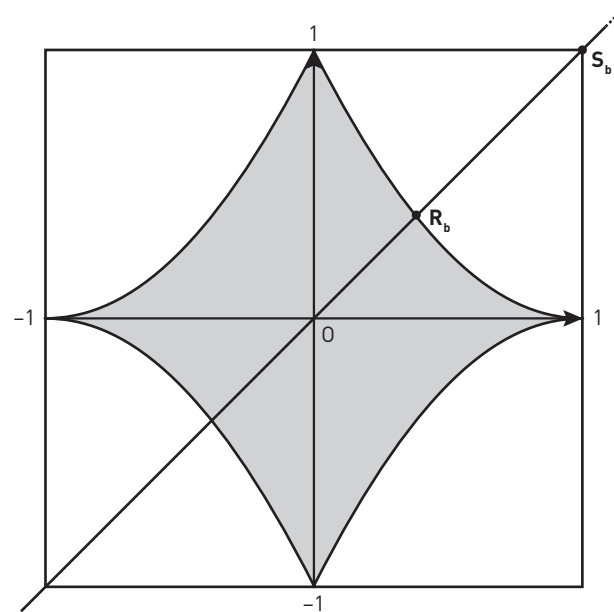
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n+1} = 0.$$

In termini geometrici, questo vuol dire che l'area $B(n)$, quando n tende all'infinito, tende ad annullarsi. Quindi la *mattonella limite* risulta completamente bianca.



Parte 4

Consideriamo le funzioni $a_2(x) = 1 - x^2$ e $b_2(x) = (1 - x)^2$. Le mattonelle corrispondenti A_2 e B_2 sono rappresentate sotto, insieme alla diagonale lungo cui la macchina sorvola per tornare alla posizione iniziale dopo aver depositato il colore.

Mattonella A_2 Mattonella B_2

Nel caso in cui una goccia di colore cada in un punto della diagonale d di una mattonella A_2 , la probabilità che cada sulla parte bianca è

$$P_a = 2 \cdot \frac{\overline{R_a S}}{d},$$

dove $d = 2\sqrt{2}$ e $S(1; 1)$.

Visto che

$$R_a : \begin{cases} y = x \\ y = 1 - x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x - 1 = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases},$$

si ha $R_a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$.

Otteniamo allora che

$$P_a = \frac{2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{5}-1-2}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \left| \frac{\sqrt{5}-3}{2} \right| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Analogamente

$$P_b = 2 \cdot \frac{\overline{R_b S}}{d},$$

dove

$$R_b : \begin{cases} y = x \\ y = (1-x)^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ 1-2x+x^2 = x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2-3x+1 = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Vale:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

quindi $R_b \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Quindi:

$$P_b = \frac{2\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{3-\sqrt{5}-2}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Se indichiamo con E_a, E_b gli eventi

$E_a = \text{«cade una goccia su una mattonella di tipo } A_2\text{»},$

$E_b = \text{«cade una goccia su una mattonella di tipo } B_2\text{»},$

le rispettive probabilità sono:

$$p(E_a) = p(E_b) = 20\% = \frac{1}{5}.$$

Quindi

$$P_a \cdot p(E_a) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 - \sqrt{5}}{10} \simeq 7,64\%$$

è la probabilità che una mattonella di tipo A_2 risulti danneggiata, mentre

$$P_b \cdot p(E_b) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{10} \simeq 12,36\%$$

è la probabilità che una mattonella di tipo B_2 risulti danneggiata.

Pertanto il numero di mattonelle danneggiate è circa

$$5000 \cdot 7,64\% + 5000 \cdot 12,36\% = 5000 \cdot 20\% = 1000.$$

Svolgimento del problema 2

2 **Parte 1**

Calcoliamo le equazioni delle rette r_k e s_k .

La retta r_k passa per il punto $(0; f_k(0))$ e ha come coefficiente angolare $f'_k(0)$. Si ha:

$$f_k(0) = 9; \quad f'_k(x) = -3x^2 + k; \quad f'_k(0) = k.$$

Ne segue che l'equazione di r_k è $y = kx + 9$.

La retta s_k passa per il punto $(1; f_k(1))$ e ha come coefficiente angolare $f'_k(1)$.

$$f_k(1) = -1 + k + 9 = k + 8$$

$$f'_k(1) = -3 + k$$

Dunque s_k ha equazione $y = (k - 3)x + 11$.

Il punto M di intersezione tra r_k e s_k si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (k - 3)x + 11 \end{cases} \quad \rightarrow \quad kx + 9 = (k - 3)x + 11$$

Da quest'ultima equazione ricaviamo l'ascissa del punto M che vale $x_M = \frac{2}{3}$.

Parte 2

Dalla risoluzione del precedente sistema troviamo l'ordinata del punto M : $y_M = \frac{2}{3}k + 9$.

Studiamo per quali valori di k si ha $y_M < 10$:

$$\frac{2}{3}k + 9 < 10 \quad \rightarrow \quad k < \frac{3}{2}.$$

Dunque il più grande k intero positivo che soddisfa la disequazione è proprio $k = 1$.

In corrispondenza di tale valore, la funzione ha equazione:

$$f_1(x) = -x^3 + x + 9$$

che, essendo un polinomio, è continua e derivabile per ogni valore reale.

Osserviamo che:

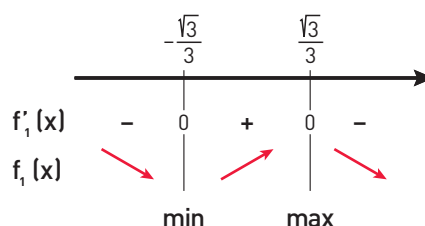
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x + 9) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x + 9) = -\infty$.

Quindi non ci sono né massimi né minimi assoluti.

La derivata prima per $k = 1$ è $f'_1(x) = -3x^2 + 1$. Studiamone il segno:

$$-3x^2 + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Il segno è riassunto nello schema.



Pertanto i punti stazionari sono:

- $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2}{9}\sqrt{3} + 9\right)$, che è un punto di minimo relativo;
- $P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{9}\sqrt{3} + 9\right)$, che è un punto di massimo relativo.

Studiamo ora la derivata seconda $f''_1(x) = -6x$, il cui segno è riassunto nello schema.



Dunque il punto $F(0; 9)$ è un punto di flesso.

Osserviamo che esiste un unico punto di intersezione tra il grafico di f_1 e l'asse x . Infatti, dallo studio della derivata prima e dal calcolo dei limiti si può concludere che la curva non può intersecare l'asse x in nessun punto di ascissa minore di $\frac{\sqrt{3}}{3}$, perché le ordinate dei punti di massimo e minimo sono positive.

Sicuramente, invece, la curva intersecherà l'asse x in un unico punto di ascissa α maggiore di $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

α è la soluzione reale dell'equazione $-x^3 + x + 9 = 0$ e non è razionale. Possiamo trovarne un valore approssimato utilizzando il teorema degli zeri.

Innanzitutto osserviamo che:

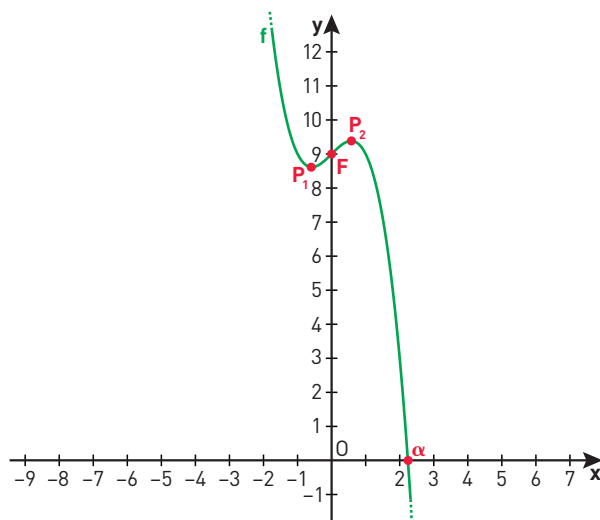
$$f_1(2) = 3 > 0 \quad \text{e} \quad f_1(3) = -15 < 0 \quad \rightarrow \quad 2 < \alpha < 3.$$

Analogamente troviamo che:

$$f_1(2,2) > 0 \quad \text{e} \quad f_1(2,3) < 0 \quad \rightarrow \quad 2,2 < \alpha < 2,3.$$

Essendo $f_1(2,25) < 0$, possiamo concludere che $\alpha \simeq 2,2$.

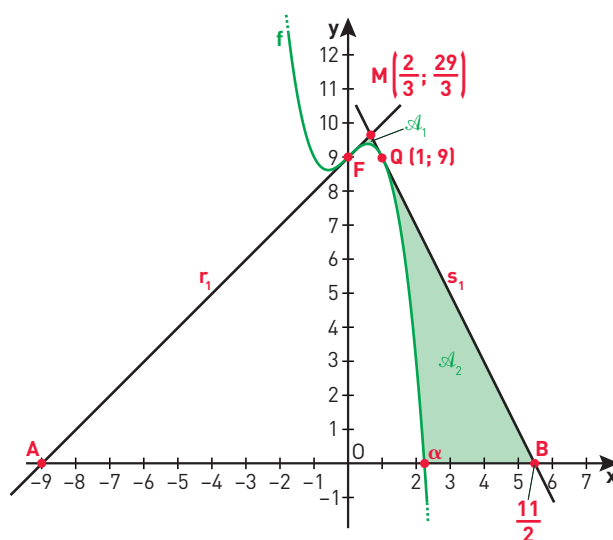
Rappresentiamo il grafico Γ_1 di f_1 .



Parte 3

La retta r_1 ha equazione $y = x + 9$, interseca l'asse x nel punto $A(-9; 0)$ e la curva Γ_1 in $(0; 9)$.

La retta s_1 ha equazione $y = -2x + 11$, interseca l'asse x nel punto $B\left(\frac{11}{2}; 0\right)$, la retta r_1 nel punto $M\left(\frac{2}{3}; \frac{29}{3}\right)$ ed è tangente a Γ_1 nel punto $Q(1; 9)$.



La probabilità richiesta p è il rapporto tra la somma delle aree \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 delle regioni piane evidenziate in figura e l'area del triangolo ABM .

L'area del triangolo ABM è:

$$\mathcal{A}_{ABM} = \frac{\overline{AB} \cdot y_M}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{11}{2} + 9 \right) \cdot \frac{29}{3} = \frac{841}{12}.$$

Calcoliamo \mathcal{A}_1 come somma di due integrali:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[x + 9 - (-x^3 + x + 9) \right] dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left[-2x + 11 - (-x^3 + x + 9) \right] dx = \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{4}{81} + \frac{11}{324} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Anche per il calcolo di \mathcal{A}_2 dobbiamo sommare due integrali definiti:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \int_1^{\alpha} \left[-2x + 11 - (-x^3 + x + 9) \right] dx + \int_{\alpha}^{\frac{11}{2}} (-2x + 11) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_1^{\alpha} + \left[-x^2 + 11x \right]_{\alpha}^{\frac{11}{2}} = \\ &= \left(\frac{\alpha^4}{4} - \frac{3}{2}\alpha^2 + 2\alpha - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{121}{4} + \alpha^2 - 11\alpha \right) = \\ &= \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^2}{2} - 9\alpha + \frac{59}{2}.\end{aligned}$$

Sostituiamo α con il suo valore approssimato 2,2; otteniamo così $\mathcal{A}_2 \simeq 13,14$.

L'area della regione del triangolo ABM che contiene i punti che si trovano al di sopra di Γ_1 è:

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \simeq 13,22.$$

In conclusione, la probabilità p richiesta è:

$$p = \frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_{ABM}} \simeq \frac{13,22}{\frac{841}{12}} \simeq 0,19 \quad \rightarrow \quad p \simeq 19\%.$$

Parte 4

Consideriamo una generica funzione polinomiale di grado n ,

$$y = p_n(x),$$

la cui derivata $y' = p'_n(x)$ ha grado $n - 1$.

Preso sulla curva un generico punto $A(a; p_n(a))$, il coefficiente angolare della perpendicolare alla tangente alla curva in A è $-\frac{1}{p'_n(a)}$, con $p'_n(a) \neq 0$. Quindi l'equazione della retta normale considerata è:

$$y - p_n(a) = -\frac{1}{p'_n(a)}(x - a).$$

Imponendo il passaggio per l'origine, si ottiene l'equazione:

$$-p_n(a) = -\frac{1}{p'_n(a)} \cdot (-a) \quad \rightarrow \quad -p_n(a) \cdot p'_n(a) = a.$$

L'equazione ottenuta è un'equazione polinomiale che ha per grado la somma dei gradi di p_n e p'_n , ovvero $n + n - 1$, cioè $2n - 1$.

Quindi, per il teorema fondamentale dell'algebra, tale equazione non può avere più di $2n - 1$ soluzioni reali.

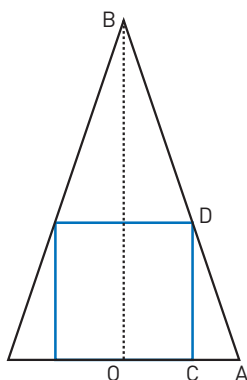
Osserviamo che il fascio di rette normali non contiene la retta parallela all'asse y , per la quale il coefficiente angolare non è definito. Potremmo dunque ipotizzare che ci possa essere un'ulteriore soluzione, che potrebbe aggiungersi al valore massimo $2n - 1$. Verifichiamo che non è così, infatti nel caso in cui $p'_n(a) = 0$, la retta tangente nel punto A è parallela all'asse x , mentre la normale è parallela all'asse y . Tale normale passa per l'origine solo se coincide con l'asse y ovvero se $a = 0$. Se $p'_n(a) = 0$ e $a = 0$ è comunque verificata l'equazione $-p_n(a) \cdot p'_n(a) = a$ trovata in precedenza. Concludiamo quindi che le sue soluzioni sono al più $2n - 1$ in quanto tale soluzione particolare, se c'è, è già inclusa nelle precedenti.

Svolgimento del quesito 1

- 1** Il testo del quesito non specifica se si tratta di coni e cilindri retti o obliqui. Osserviamo che, per il principio di Cavalieri, le formule del volume di coni e cilindri di data altezza e raggio di base non cambiano dal caso retto al caso obliquo. Possiamo quindi analizzare la situazione nel caso retto; i risultati ottenuti saranno validi anche per il caso obliquo.

Consideriamo dunque un cono retto di altezza H e raggio di base R , con inscritto un cilindro retto di altezza h e raggio di base r . Deve essere $0 < r < R$.

In figura è descritta una sezione del cono e del cilindro ottenuta con un piano passante per l'asse comune.

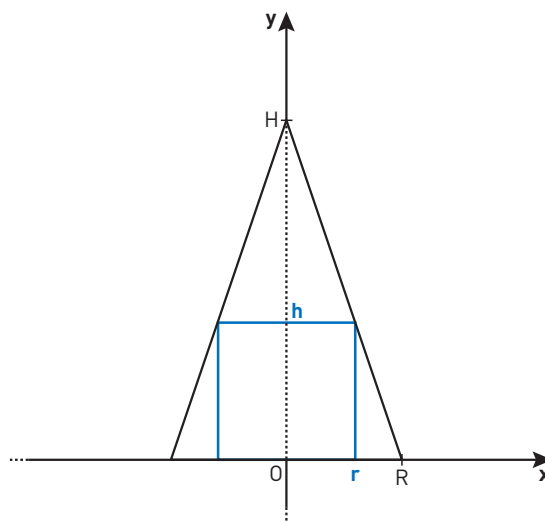


Possiamo determinare h sfruttando la similitudine dei triangoli OAB e CAD .

Otteniamo:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{CD}{CA} \quad \rightarrow \quad \frac{H}{R} = \frac{h}{R-r} \quad \rightarrow \quad h = \frac{H}{R}(R-r) = H \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

In alternativa, per ricavare h , potevamo inserire la figura precedente in un sistema di assi cartesiani, come mostrato di seguito; abbiamo indicato sugli assi le ascisse e le ordinate dei punti corrispondenti.



Il lato obliquo AB , corrispondente all'apotema del cono, appartiene allora alla retta di equazione:

$$y = H - \frac{H}{R}x.$$

Per $x = r$ otteniamo, come prima, l'altezza h del cilindro:

$$h = H - \frac{H}{R}r = H \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Il volume del cilindro è dato da:

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot \text{altezza} = r^2 \cdot \pi \cdot h = \pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Il volume del cono è dato da:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot H = \frac{\pi}{3} H R^2.$$

Il rapporto fra i due volumi è:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{cono}}} = \frac{\pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\frac{\pi}{3} H R^2} = \frac{3r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{3r^2(R-r)}{R^3} = \frac{3}{R^3} (Rr^2 - r^3).$$

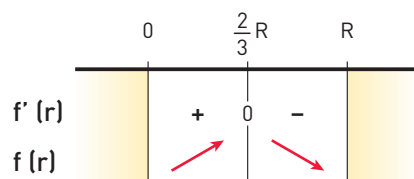
Valutiamo qual è il massimo assunto da questo rapporto, studiando il segno della derivata prima della funzione $f(r) = \frac{3}{R^3} (Rr^2 - r^3)$:

$$f'(r) = \frac{3}{R^3} (2Rr - 3r^2);$$

$$f'(r) > 0 \quad \rightarrow \quad 2Rr - 3r^2 > 0 \quad \rightarrow \quad r(2R - 3r) > 0.$$

Poiché $r > 0$, si ha:

$$r < \frac{2}{3} R.$$



Il rapporto è massimo per $r = \frac{2}{3}R$ e in questo caso vale:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{cono}}} = \frac{3}{R^3} \left[R \left(\frac{2}{3} R \right)^2 - \left(\frac{2}{3} R \right)^3 \right] = \frac{3}{R^3} R^3 \left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27} \right) = 3 \cdot \frac{12 - 8}{27} = \frac{4}{9}.$$

Poiché $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$, il volume del cilindro inscritto è sempre minore della metà del volume del cono.

Svolgimento del quesito 2

- 2** Indichiamo con p la probabilità che esca 4 nel lancio di uno dei dadi tetraedrici.

Per quanto detto nel testo del quesito si ha:

$$p(4) = p, \quad p(3) = 2p, \quad p(2) = 4p, \quad p(1) = 8p.$$

La somma delle quattro probabilità deve essere pari a 1, quindi:

$$p + 2p + 4p + 8p = 1 \quad \rightarrow \quad 15p = 1 \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{15}.$$

Le probabilità di uscita di ciascuna faccia risultano pertanto:

$$p(4) = \frac{1}{15}, \quad p(3) = \frac{2}{15}, \quad p(2) = \frac{4}{15}, \quad p(1) = \frac{8}{15}.$$

Calcoliamo la probabilità richiesta P , ovvero la probabilità di uscita di due numeri uguali nel lancio contemporaneo di due dadi, come somma di eventi incompatibili:

$$P = p(D_1 = 1 \wedge D_2 = 1) + p(D_1 = 2 \wedge D_2 = 2) + p(D_1 = 3 \wedge D_2 = 3) + p(D_1 = 4 \wedge D_2 = 4)$$

dove D_1 indica l'esito del primo dado e D_2 quello del secondo dado.

Gli esiti dei due dadi rappresentano eventi indipendenti, quindi:

$$P = p(1)p(1) + p(2)p(2) + p(3)p(3) + p(4)p(4) =$$

$$\left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 =$$

$$\frac{64 + 16 + 4 + 1}{225} = \frac{85}{225} = \frac{17}{45} \simeq 0,38.$$

In conclusione, la probabilità richiesta è circa uguale al 38%.

Anche se non richiesto dal quesito, osserviamo che nel caso di due dadi tetraedrici regolari, nei quali l'uscita di ogni faccia ha probabilità $\frac{1}{4}$, la probabilità di uscita di due numeri uguali nel lancio dei due dadi è pari a:

$$P = p(1)p(1) + p(2)p(2) + p(3)p(3) + p(4)p(4) =$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$4 \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \rightarrow \quad 25\%.$$

Svolgimento del quesito 3

- 3** Per lo svolgimento di questo quesito proponiamo due metodi.

Metodo 1

Per determinare le ascisse degli eventuali punti di tangenza tra la retta $y = -4x + k$ e il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, poniamo la derivata di $f(x)$ uguale al coefficiente angolare della retta:

$$f'(x) = -4 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 8x = -4 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3} \vee x_2 = 2.$$

Poiché

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 = \frac{95}{27}$$

e

$$f(2) = 8 - 4 \cdot 4 + 5 = -3,$$

i punti di tangenza sono $T_1\left(\frac{2}{3}; \frac{95}{27}\right)$ e $T_2(2; -3)$.

Sostituendo nell'equazione della retta, troviamo i corrispondenti valori di k .

$$T_1 : \quad \frac{95}{27} = -4 \cdot \frac{2}{3} + k \quad \rightarrow \quad k = \frac{167}{27}.$$

$$T_2 : \quad -3 = -4 \cdot 2 + k \quad \rightarrow \quad k = 5.$$

I valori di k richiesti sono dunque:

$$k = \frac{167}{27} \quad \vee \quad k = 5.$$

Metodo 2

In generale, due curve di equazione $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono tangenti in un punto se le due funzioni assumono lo stesso valore in quel punto e se, in tale punto, i grafici hanno la stessa tangente. Queste condizioni portano a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}.$$

Nel caso in esame:

$$f(x) = -4x + k;$$

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 5.$$

Risolvi il sistema corrispondente nelle incognite x e k :

$$\begin{cases} -4x + k = x^3 - 4x^2 + 5 \\ -4 = 3x^2 - 8x \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = 0 \\ 3x^2 - 8x + 4 = 0 \end{cases}.$$

Risolvi la seconda equazione:

$$3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3} \quad \vee \quad x_2 = 2.$$

Se sostituiamo $x = \frac{2}{3}$ nella prima equazione otteniamo:

$$\frac{8}{27} - 4 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 5 - k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} + 5 \quad \rightarrow \quad k = \frac{167}{27}.$$

Se sostituiamo invece $x = 2$ nella prima equazione otteniamo:

$$8 - 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 - k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 8 - 16 + 8 + 5 \quad \rightarrow \quad k = 5.$$

Riassumendo:

- per $k = \frac{167}{27}$ la retta e la curva sono tangenti nel punto di ascissa $x = \frac{2}{3}$;
- per $k = 5$ la retta e la curva sono tangenti nel punto di ascissa $x = 2$.

Svolgimento del quesito 4

4 La funzione

$$f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$$

è trascendente fratta. Il denominatore è sempre diverso da 0 per ogni valore di x poiché

$$5 + e^{-x} - \cos x \geq 5 + e^{-x} - 1 = 4 + e^{-x} > 0.$$

Anche il numeratore è definito per ogni x reale.

Il dominio della funzione è quindi \mathbb{R} ed è possibile calcolare i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

Determiniamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$$

risulta una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ perché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - e^{\sin x}) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + e^{-x} - \cos x) = +\infty.$$

La funzione $f(x)$ verifica le condizioni del teorema di De l'Hospital e quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \cos x e^{\sin x}}{-e^{-x} + \sin x}.$$

Il numeratore è una funzione limitata non nulla poiché vale

$$3 - e \leq 3 - \cos x e^{\sin x} \leq 3 + e.$$

Inoltre il denominatore diverge negativamente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x} + \sin x) = -\infty.$$

Quindi il limite del rapporto esiste ed è nullo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \cos x e^{\sin x}}{-e^{-x} + \sin x} = 0.$$

Determiniamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Il numeratore diverge positivamente in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^{\sin x}) = +\infty,$$

mentre il denominatore è una funzione limitata superiormente per $x \rightarrow +\infty$:

$$5 + e^{-x} - \cos x \leq 5 + 1 + 1 = 7 \quad \text{per } x \geq 0.$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} \geq \frac{3x - e^{\sin x}}{7} \quad \text{per } x \geq 0$$

e

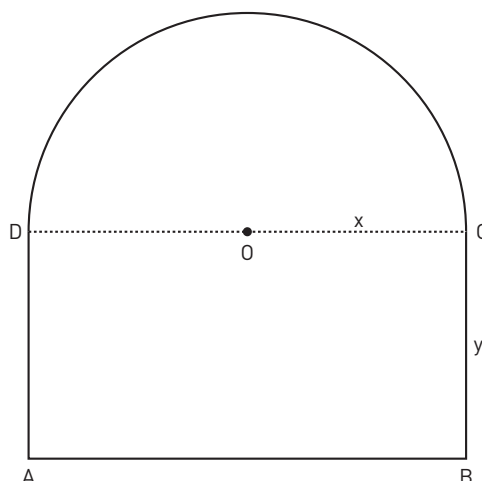
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{7} = +\infty.$$

Per il teorema del confronto vale allora:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Svolgimento del quesito 5

- 5** Consideriamo la figura $ABCD$ mistilinea formata dal rettangolo $ABCD$ e dal semicerchio di centro O .



Indichiamo con x la misura del raggio OC e con y quella del segmento BC . Calcoliamo il perimetro $2p$ della suddetta figura:

$$2p = \overline{2OC} + \overline{2BC} + \pi \overline{OC} = 2x + 2y + \pi x.$$

Imponiamo tale perimetro uguale a 2 (omettiamo per il momento l'unità di misura) e ricaviamo la variabile y :

$$2x + 2y + \pi x = 2 \quad \rightarrow \quad y = 1 - \frac{2 + \pi}{2}x.$$

Poiché x e y sono misure di segmenti, deve essere $x > 0$ e $y > 0$, da cui:

$$x > 0, \quad 1 - \frac{2 + \pi}{2}x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \frac{2}{2 + \pi}.$$

Calcoliamo l'area della figura mistilinea, che dipende da x :

$$\text{Area}(x) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \frac{\pi \overline{OC}^2}{2} = 2xy + \frac{\pi}{2}x^2.$$

Sostituendo a y l'espressione in funzione di x troviamo:

$$\text{Area}(x) = 2x \left(1 - \frac{2 + \pi}{2}x \right) + \frac{\pi}{2}x^2 = 2x - (2 + \pi)x^2 + \frac{\pi}{2}x^2 = -\left(2 + \frac{\pi}{2} \right)x^2 + 2x.$$

La funzione $\text{Area}(x)$ è un polinomio di secondo grado il cui grafico corrisponde a una parabola con concavità rivolta verso il basso. Il suo valore massimo è assunto in corrispondenza del vertice V di ascissa $x_V = -\frac{b}{2a}$:

$$x_V = -\frac{2}{2 \cdot \left[-\left(2 + \frac{\pi}{2} \right) \right]} = \frac{2}{4 + \pi}.$$

Questo valore di x consente di recintare la superficie di area massima; le corrispondenti dimensioni del rettangolo $ABCD$ sono:

$$\overline{AB} = 2x_V = 2 \cdot \frac{2}{4 + \pi} = \frac{4}{4 + \pi} \simeq 0,56;$$

$$\overline{BC} = y_V = 1 - \frac{2 + \pi}{2} x_V = 1 - \frac{2 + \pi}{2} \cdot \frac{2}{4 + \pi} = 1 - \frac{2 + \pi}{4 + \pi} = \frac{2}{4 + \pi} \simeq 0,28.$$

Le dimensioni del rettangolo sono dunque approssimativamente 0,56 m e 0,28 m.

Svolgimento del quesito 6

- 6** Troviamo l'equazione della retta s perpendicolare al piano π e passante per il punto $T(-4; 0; 1)$. Poiché il vettore normale al piano π è $\vec{n}(3; -1; -2)$, si ha:

$$s : \begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = 0 - k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad s : \begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il centro C della superficie sferica S appartiene alla retta r , quindi ha coordinate del tipo $C(\alpha; \alpha; \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e appartiene alla retta s , quindi deve essere:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha = -4 + 3k \\ \alpha = -k \\ \alpha = 1 - 2k \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} -4 + 3k = -k \\ \alpha = -k \\ \alpha = 1 - 2k \end{cases} \rightarrow \\ \begin{cases} 4k = 4 \\ \alpha = -k \\ \alpha = 1 - 2k \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \rightarrow C(-1; -1; -1). \end{aligned}$$

Il raggio R della superficie sferica è \overline{CT} , quindi:

$$R^2 = (-4 + 1)^2 + (0 + 1)^2 + (1 + 1)^2 = (-3)^2 + 1^2 + 2^2 = 14.$$

L'equazione della superficie sferica S è:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0$$

Svolgimento del quesito 7

- 7** Osserviamo innanzitutto che $a + 1 > a$ per ogni valore reale di a . Gli estremi di integrazione sono quindi ordinati e non dobbiamo distinguere fra più casi.

Calcoliamo l'integrale in funzione del parametro a :

$$\begin{aligned}\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) \, dx &= \int_a^{a+1} 3(x^2 + 1) \, dx = 3 \int_a^{a+1} (x^2 + 1) \, dx = \\ 3 \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_a^{a+1} &= 3 \left[\frac{(a+1)^3}{3} + (a+1) - \frac{a^3}{3} - a \right] = \\ (a+1)^3 + 3(a+1) - a^3 - 3a &= 3a^2 + 3a + 4.\end{aligned}$$

Imponiamo che il valore dell'integrale sia uguale a 10:

$$3a^2 + 3a + 4 = 10 \quad \rightarrow \quad 3a^2 + 3a - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad a^2 + a - 2 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$a = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \rightarrow \quad a = -2 \quad \text{e} \quad a = 1.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili poiché la funzione integranda è un polinomio definito su tutto l'asse reale.

Svolgimento del quesito 8

8 Supponiamo che non sia possibile pareggiare nella singola partita.

Chiamiamo A e B i due giocatori. Poiché hanno la stessa probabilità di vincere ogni partita, questa è $\frac{1}{2}$.

Calcoliamo la probabilità che A vinca il gioco in al più 12 partite.

I possibili risultati sono: 10-0 (A vince 10 partite, B vince 0 partite), 10-1 e 10-2.

Indichiamo questi tre eventi con A_1 , A_2 e A_3 .

Il gioco si può modellizzare con lo schema delle prove ripetute, dove la probabilità di successo è $\frac{1}{2}$ ed è uguale alla probabilità di insuccesso.

Affinché si verifichi A_1 , il giocatore A deve vincere 10 partite di seguito, quindi:

$$p(A_1) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^{10}}.$$

Affinché si verifichi A_2 , A deve perdere una sola partita tra le prime 10 e vincere l'undicesima. La probabilità è quindi:

$$p(A_2) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2^{11}}.$$

Affinché si verifichi A_3 , A deve perdere due partite tra le prime 11 e vincere la dodicesima. Quindi:

$$p(A_3) = \binom{11}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{2^{12}} = 55 \cdot \frac{1}{2^{12}}.$$

Poiché gli eventi A_1 , A_2 e A_3 sono incompatibili, la probabilità che vinca A in al più 12 partite è:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = \frac{1}{2^{10}} + 10 \cdot \frac{1}{2^{11}} + 55 \cdot \frac{1}{2^{12}} = \frac{4 + 20 + 55}{2^{12}} = \frac{79}{2^{12}}.$$

Per simmetria, la probabilità che B vinca il gioco in al più 12 partite è la stessa di A .

La probabilità che uno dei due giocatori vinca il gioco in al più 12 partite è:

$$2 \cdot \frac{79}{2^{12}} = \frac{79}{2^{11}} \simeq 0,039 \rightarrow \text{circa } 3,9\%.$$

Svolgimento del quesito 9

- 9** Per verificare che il triangolo è equilatero, calcoliamo le misure dei lati.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \\ &= \sqrt{(3 - 3)^2 + (-1 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{0 + 4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \\ &= \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2} = \\ &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4 + 0 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Poiché $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, il triangolo ABC è equilatero.

Per tre punti non allineati passa un solo piano dello spazio, dunque il triangolo ABC appartiene al piano α se e solo se i suoi vertici sono punti del piano. Verifichiamolo.

$$\text{Punto } A : \quad x_A + y_A + z_A - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 3 + 1 + 0 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \text{vero.}$$

$$\text{Punto } B : \quad x_B + y_B + z_B - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 3 - 1 + 2 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \text{vero.}$$

$$\text{Punto } C : \quad x_C + y_C + z_C - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 1 + 1 + 2 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \text{vero.}$$

Il vertice P del tetraedro appartiene alla retta r passante per il baricentro G del triangolo ABC e perpendicolare al piano α . Le coordinate del baricentro sono:

$$\begin{aligned}G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) &\rightarrow \\ G\left(\frac{3 + 3 + 1}{3}; \frac{1 - 1 + 1}{3}; \frac{0 + 2 + 2}{3}\right) &\rightarrow G\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

Poiché α ha equazione $x + y + z - 4 = 0$, la direzione di r è data dal vettore $(l; m; n) = (1; 1; 1)$, formato dai coefficienti di x , y e z . La retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_G + lt \\ y = y_G + mt \\ z = z_G + nt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} + t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Il punto P appartiene a r , quindi le sue coordinate sono del tipo

$$P\left(\frac{7}{3} + t; \frac{1}{3} + t; \frac{4}{3} + t\right).$$

Possiamo procedere in quattro modi.

Metodo 1

Poniamo $\overline{PA} = \overline{AB}$, che equivale a $\overline{PA}^2 = \overline{AB}^2$.

$$\overline{PA}^2 = \left(\frac{7}{3} + t - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + t - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t - 0\right)^2$$

$$\overline{AB}^2 = 8$$

$$\left(-\frac{2}{3} + t\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + t\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t\right)^2 = 8$$

Risolviamo l'equazione nell'incognita t .

$$\frac{4}{9} + t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} + t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{16}{9} + t^2 + \frac{8}{3}t = 8 \quad \rightarrow$$

$$3t^2 + \frac{24}{9} = 8 \quad \rightarrow \quad t^2 = \frac{16}{9} \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = \pm \frac{4}{3}.$$

$$\text{Se } t_1 = \frac{4}{3}, \quad P_1\left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}; \frac{1}{3} + \frac{4}{3}; \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) \quad \rightarrow \quad P_1\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$$\text{Se } t_2 = -\frac{4}{3}, \quad P_2\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}; \frac{1}{3} - \frac{4}{3}; \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) \quad \rightarrow \quad P_2(1; -1; 0).$$

Metodo 2

Calcoliamo \overline{PG} con il teorema di Pitagora:

$$\overline{PG} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AG}^2}.$$

$ABCP$ è un tetraedro regolare, quindi deve essere $\overline{AP} = \overline{AB} = 2\sqrt{2}$. Determiniamo \overline{AG}^2 :

$$\overline{AG}^2 = \left(\frac{7}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Dunque:

$$\overline{PG} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AG}^2} = \sqrt{8 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

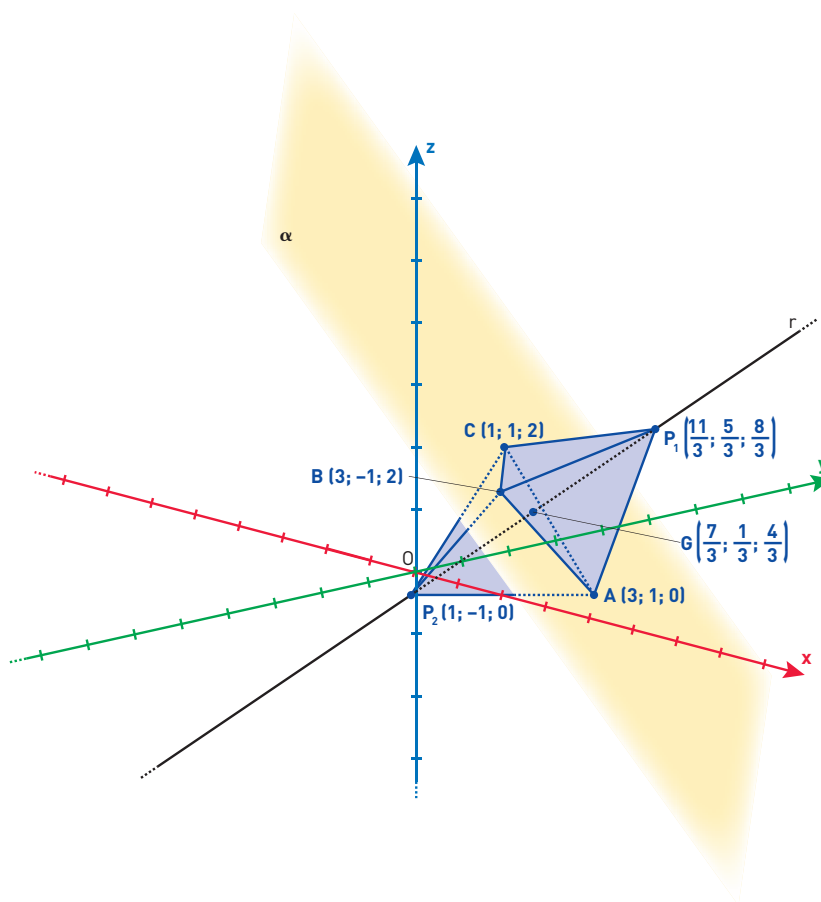
La distanza di P dal piano α è:

$$\frac{\left| \frac{7}{3} + t + \frac{1}{3} + t + \frac{4}{3} + t - 4 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|3t|}{\sqrt{3}}.$$

Questa distanza deve essere uguale a \overline{PG} , cioè:

$$\frac{|3t|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \rightarrow |3t| = 4 \rightarrow 3t = \pm 4 \rightarrow t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = -\frac{4}{3}.$$

Le coordinate dei punti P_1 e P_2 si determinano come nel **metodo 1**.



Metodo 3

Consideriamo il generico punto $P(x; y; z)$.

Affinché il tetraedro sia regolare, deve essere $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = \overline{AB}$, ovvero $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 = \overline{AB}^2$. Ciò si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 8 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 8 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 8. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono due soluzioni, che corrispondono alle coordinate dei punti P_1 e P_2 trovati nei metodi precedenti.

Metodo 4

Consideriamo il generico punto $P(x; y; z)$.

In un tetraedro regolare, l'altezza del triangolo di base deve essere congruente alle altezze delle facce laterali. Poiché le facce sono triangoli equilateri, le altezze coincidono con le mediane.

Chiamiamo M, N, Q i punti medi di AB, BC, CA . Le loro coordinate sono:

$$M(3; 0; 1) \quad N(2; 0; 2) \quad Q(2; 1; 1).$$

Calcoliamo \overline{CM} :

$$\overline{CM} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

Deve essere $\overline{PM} = \overline{PN} = \overline{PQ} = \overline{CM}$, ovvero $\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 = \overline{PQ}^2 = \overline{CM}^2$.

Dal sistema

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 6 \\ (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 6 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 \end{cases}$$

si ottengono le stesse coordinate dei punti P_1 e P_2 trovati nei metodi precedenti.

Svolgimento del quesito 10

- 10** Consideriamo la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ con $k \in \mathbb{R}$ e imponiamo che sia soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Calcoliamo le derivate prima e seconda della funzione:

$$y' = 2ke^{kx+2};$$

$$y'' = 2k^2e^{kx+2}.$$

Sostituiamo y' e y'' nell'equazione differenziale:

$$2k^2e^{kx+2} - 4ke^{kx+2} - 6e^{kx+2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2e^{kx+2}(k^2 - 2k - 3) = 0.$$

Poiché $2e^{kx+2} > 0$ per ogni k e per ogni x reali, deve essere:

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \quad \rightarrow$$

$$k = 1 \pm 2 \quad \rightarrow \quad k_1 = 3, \quad k_2 = -1.$$

Pertanto i valori del parametro k che soddisfano la richiesta sono $k_1 = 3$ e $k_2 = -1$.

A. S. 2018-2019

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

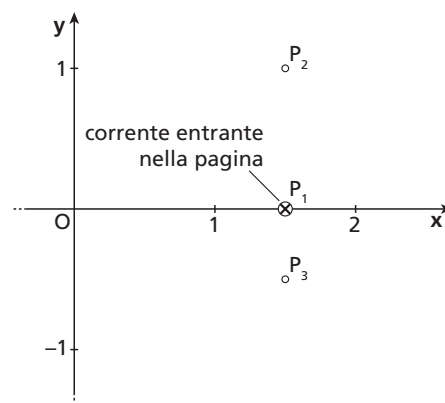
$$f(x) = ax^2 - x + b, \quad g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in \mathbb{R} con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2; 1)$.
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0; -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g .
- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

$$P_1\left(\frac{3}{2}; 0\right), P_2\left(\frac{3}{2}; 1\right) \text{ e } P_3\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2,0$ A, i_2 e i_3 . Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1 , i_2 e i_3 , lungo il contorno di S , a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3 .

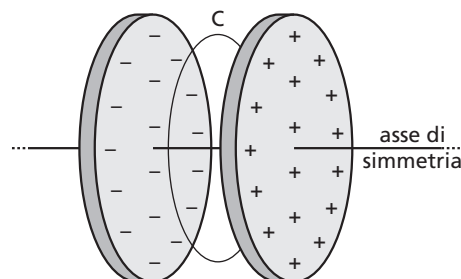


■ Figura 1

- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0,20 \, \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1,5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S . Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω .

PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R , poste a distanza d , dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



■ Figura 2

All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico \vec{B} . Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di \vec{B} , espressa in tesla (T), varia secondo la legge

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \quad \text{con } r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k , spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di \vec{B} e del campo elettrico \vec{E} nei punti interni al condensatore?
- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r . Determinare la circuitazione di \vec{B} lungo C e da essa ricavare che il flusso di \vec{E} , attraverso la superficie circolare delimitata da C , è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right).$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine.

Studiare la funzione F individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F , specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f . Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f , l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^b f(t) dt$.

QUESTIONARIO

- 1** Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $\frac{12}{5}$ e ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f .

- 2** È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019}.$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}.$$

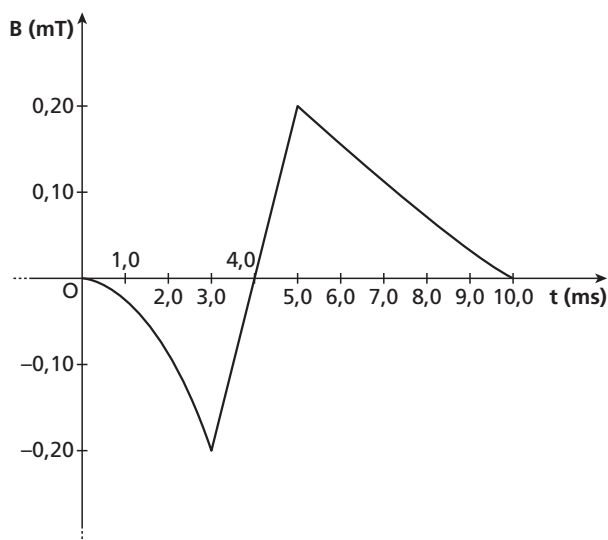
- 3** Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S , determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

4 Dati i punti $A(2; 0; -1)$ e $B(-2; 2; 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2} \overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10; 8; 7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S .

5 Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.

- Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
- Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
- Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

6 Una spira di rame, di resistenza $R = 4,0 \text{ m}\Omega$, racchiude un'area di 30 cm^2 ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura.



■ Figura 3

Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

- a.** da 0,0 ms a 3,0 ms; **b.** da 3,0 ms a 5,0 ms; **c.** da 5,0 ms a 10 ms.

7 In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento a esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0,80c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

8 Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1,00 \text{ mT}$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria a elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38,1 \text{ cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10,5 \text{ cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con \vec{B} .

Costanti fisiche		
carica elementare	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
massa del protone	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
velocità della luce	c	$2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**.

Nel sito su.zanichelli.it/calcolatrice_esame trovi anche la versione con una calcolatrice grafica **Texas Instruments**.

PROBLEMA 1

- La funzione $g(x)$ è il prodotto di una funzione polinomiale e una funzione esponenziale, quindi ha come dominio tutto \mathbb{R} , è continua e derivabile indefinitamente per ogni valore di x reale e non ammette asintoti verticali.

Determiniamo l'andamento della funzione agli estremi del dominio, calcolando i limiti con il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{(2x - 2)e^{x^2 - 2x}} = 0.$$

Essendo tale limite finito, l'asse x è asintoto orizzontale per la funzione $g(x)$, che quindi non può tendere all'infinito per nessun valore di x .

Per determinare i punti di massimo e minimo calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$g'(x) = ae^{2x - x^2} + (ax + b)(2 - 2x)e^{2x - x^2} = [-2ax^2 + 2(a - b)x + a + 2b]e^{2x - x^2}.$$

Il fattore esponenziale è sempre positivo, quindi il segno di $g'(x)$ dipende unicamente dal fattore polinomiale di secondo grado. Per stabilire il suo segno, calcoliamo il determinante dell'equazione associata:

$$\frac{\Delta}{4} = (a - b)^2 + 2a(a + 2b) = 3a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + (a + b)^2.$$

Poiché $a \neq 0$ per ipotesi, il $\frac{\Delta}{4}$, esprimibile come somma di due quadrati, risulta una quantità necessariamente positiva. L'equazione associata ammette quindi due soluzioni reali e distinte, corrispondenti alle ascisse dei punti di massimo e minimo relativi della funzione $g(x)$, che sono anche punti di massimo e di minimo assoluti per le considerazioni precedenti.

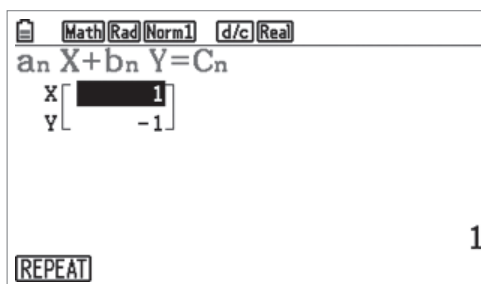
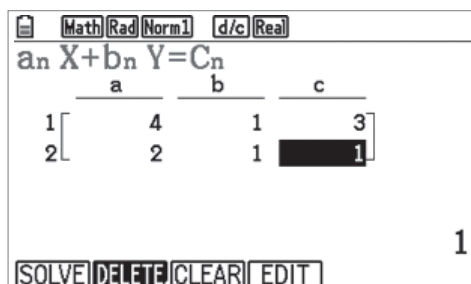
Per determinare i valori di a e b richiesti, imponiamo il passaggio delle due funzioni per il punto $A(2; 1)$:

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ g(2) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - 2 + b = 1 \\ (2a + b)e^0 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 3 - 4a \\ 2a + 3 - 4a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Con la calcolatrice grafica

Ricorriamo all'ambiente *Equation* per risolvere il sistema.

Scegliamo il numero di incognite e inseriamo i coefficienti delle due equazioni. Risolviamo il sistema digitando *F1* (*Solve*) e otteniamo i valori di a , b e c .



- Le funzioni da considerare d'ora in avanti sono:

$$f(x) = x^2 - x - 1,$$

$$g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}.$$

Il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta una parabola che volge la concavità verso l'alto e ha il vertice in $V\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$. Il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti $C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ e $D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ e l'asse y nel punto $B(0; -1)$.

Come già osservato al punto precedente, la funzione $g(x)$ è continua in \mathbb{R} e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per g .

Determiniamo i punti di intersezione fra il grafico di $g(x)$ e gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow B(0; -1);$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x-1)e^{2x-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow E(1; 0).$$

Il segno della funzione $g(x)$ dipende solo dal segno del fattore polinomiale, quindi è positiva per $x > 1$. Sfruttando il calcolo della derivata svolto nel punto precedente, otteniamo:

$$g'(x) = (-2x^2 + 4x - 1)e^{2x-x^2}.$$

Studiamo il segno di $g'(x)$, che dipende da quello del fattore polinomiale:

$$-2x^2 + 4x - 1 > 0 \rightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

I punti di minimo e di massimo assoluti hanno coordinate rispettivamente:

$$M_1\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}e}{2}\right), \quad M_2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}e}{2}\right).$$

Calcoliamo la derivata seconda di $g(x)$:

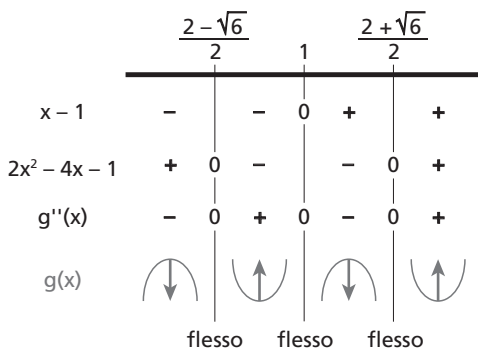
$$g''(x) = 2(2x^3 - 6x^2 + 3x + 1)e^{2x-x^2}.$$

Osserviamo che $g''(1) = 0$, quindi il polinomio cubico è divisibile per $(x-1)$. Applicando la regola di Ruffini otteniamo:

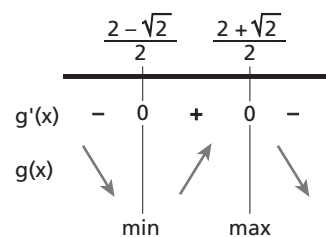
$$g''(x) = 2(x-1)(2x^2 - 4x - 1)e^{2x-x^2}.$$

Studiamo il segno di $g''(x)$, che dipende da quello dei fattori polinomiali:

$$(x-1)(2x^2 - 4x - 1) > 0 \rightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{2} < x < 1 \vee x > \frac{2+\sqrt{6}}{2}.$$



■ Figura 5



■ Figura 4

I punti di flesso della funzione g hanno coordinate:

$$F_1\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}e}{2e}\right), \quad F_2(1; 0), \quad F_3\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}e}{2e}\right).$$

Osserviamo che i punti estremanti M_1 e M_2 della funzione g sono simmetrici rispetto al punto $F_2(1; 0)$, così come i punti F_1 e F_3 . Questo suggerisce che il grafico di $g(x)$ risulti simmetrico rispetto a F_2 . Verifichiamolo analiticamente.

Le equazioni della simmetria di centro $F_2(1; 0)$ sono:

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases}.$$

Se le applichiamo alla funzione $y = g(x)$ ricaviamo:

$$-y' = (2 - x' - 1)e^{2(2-x')-(2-x')^2} \rightarrow -y' = (-x' + 1)e^{4-2x'-4-x'^2+4x'} \rightarrow y' = (x' - 1)e^{2x'-x'^2}$$

che coincide con $y = g(x)$.

Per verificare la tangenza dei grafici di f e g nel punto $B(0; -1)$, osserviamo che entrambi i grafici intersecano l'asse y nel punto B come trovato in precedenza. Calcoliamo i valori delle derivate delle due funzioni nel punto B .

$$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(0) = -1;$$

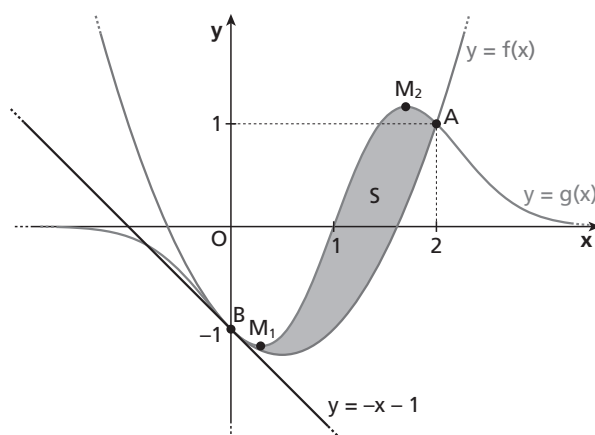
$$g'(x) = (-2x^2 + 4x - 1)e^{2x-x^2} \rightarrow g'(0) = -1.$$

Quindi il punto B è di tangenza per $f(x)$ e $g(x)$ e l'equazione della tangente comune è $y = -x - 1$. Disegniamo in un unico diagramma cartesiano i grafici probabili di f e g . Ricordiamo che, per quanto visto al primo punto, i due grafici si intersecano anche in $A(2; 1)$.

Determiniamo l'area della regione piana S delimitata dai grafici di f e g calcolando l'integrale definito:

$$\int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 [(x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1] dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{2x-x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = -\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

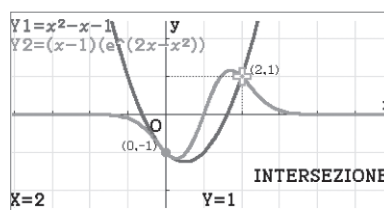
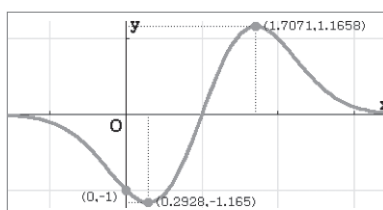
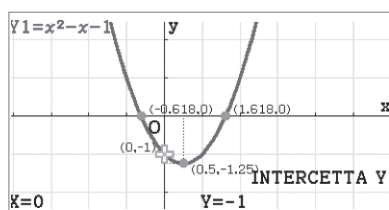


■ Figura 6

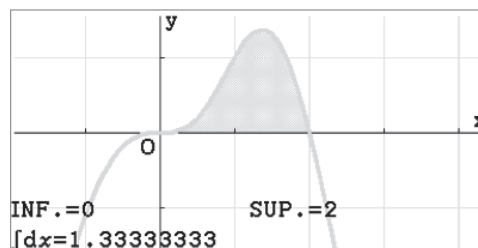
Con la calcolatrice grafica

Possiamo disegnare il grafico delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Per visualizzare le intersezioni con gli assi, le coordinate dei punti di minimo e massimo relativo e le intersezioni tra le due curve premiamo F5 (G-SOLV). Disegniamo i due grafici nella stessa schermata per determinare le intersezioni.



Possiamo calcolare il valore dell'integrale definito compreso tra le due curve scrivendo in *Graphs* la funzione $g(x) - f(x)$ come $Y2 - Y1$ e usando in sequenza i comandi $F5$ (G-SOLV), $F6$ e $F1$ e poi impostando gli estremi di integrazione.



- Per il calcolo della circuitazione $\Gamma(\vec{B})$ del campo magnetico generato dalle correnti i_1 , i_2 e i_3 lungo il contorno γ di S , utilizziamo il teorema della circuitazione di Ampère:

$$\Gamma_{\gamma}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_k i_k$$

dove la sommatoria è estesa alle sole correnti concatenate alla curva γ , cioè quelle che attraversano la superficie S .

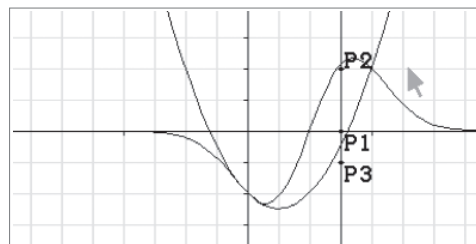
Verifichiamo quali, tra le tre correnti, risultano concatenate a γ . Osservando il grafico di f e g , occorre calcolare le ordinate delle funzioni per $x = \frac{3}{2}$ e confrontarle con le ordinate dei punti proposti.

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{2} \simeq 1,06; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Poiché $g\left(\frac{3}{2}\right) > 1$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) > -\frac{1}{2}$, le correnti concatenate a γ sono solo i_1 e i_2 .

Con la calcolatrice grafica

Nell'ambiente *Geometry* disegna i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e i punti $P1$, $P2$ e $P3$. Dal grafico risulta che il punto $P3$ è esterno alla regione S .



Per stabilire i segni delle correnti, stabiliamo un'orientazione per γ e la supponiamo antioraria.

In questo modo, la corrente i_1 entrante risulta negativa. La formula per la circuitazione del campo magnetico diventa:

$$\Gamma_{\gamma}(\vec{B}) = \mu_0 (-2,0 + i_2).$$

Se il verso di i_2 è entrante, oppure uscente con $0 \text{ A} < i_2 < 2,0 \text{ A}$, la circuitazione è negativa.

Se il verso di i_2 è uscente e vale $2,0 \text{ A}$, la circuitazione è nulla.

Se il verso di i_2 è uscente e maggiore di $2,0 \text{ A}$, la circuitazione è positiva.

- Facendo ruotare la spira intorno all'asse x si genera una forza elettromotrice indotta, il cui valore si può calcolare utilizzando la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\text{fem} = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$$

dove, se assumiamo che a $t = 0$ la spira giaccia nel piano xy :

$$\Phi_S(\vec{B}) = BS \cos(\omega t).$$

Calcoliamo:

$$\text{fem} = - \frac{d[BS \cos(\omega t)]}{dt} = BS\omega \sin(\omega t).$$

Il suo valore massimo si ottiene se $\sin(\omega t) = 1$, per cui $fem_{\max} = BS\omega$. Sapendo che $i_{\max} = 5,0 \text{ mA}$ e $R = 0,20 \Omega$, per la prima legge di Ohm:

$$fem_{\max} = i_{\max} R$$

da cui

$$fem_{\max} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

Tenendo conto che $B = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ e che $S = \frac{4}{3} \text{ m}^2$, si ha:

$$\omega = \frac{fem_{\max}}{BS} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}}{(1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T})\left(\frac{4}{3} \text{ m}^2\right)} = 0,050 \text{ rad/s}.$$

PROBLEMA 2

- L'unità di misura di a è il secondo, per garantire la consistenza delle unità di misura nella somma $t^2 + a^2$. Sostituiamo le unità di misura nell'espressione di B , indicando con x quella di k :

$$T = \frac{x \cdot s}{\sqrt{(s^2 + s^2)^3}} \cdot m \rightarrow T = \frac{x \cdot s \cdot m}{s^3} = \frac{x \cdot m}{s^2}$$

e quindi l'unità di misura di k è $\frac{T \cdot s^2}{m}$.

La differenza di potenziale variabile produce, tra le piastre del condensatore, un campo elettrico variabile il quale, a sua volta, genera un campo magnetico in accordo con il teorema di Ampère-Maxwell per la circuitazione $\Gamma(\vec{B})$ del campo magnetico. Nella regione compresa tra le armature, il teorema assume la seguente forma:

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

dove il termine al secondo membro è anche noto come corrente di spostamento i_s .

La direzione del campo elettrico \vec{E} all'interno del condensatore è quella dell'asse di simmetria, che indichiamo con \hat{x} . Le linee del campo magnetico generato dalla corrente di spostamento sono linee circolari concentriche, con centro sull'asse di simmetria, e giacciono su piani paralleli alle armature e perpendicolari all'asse di simmetria. Pertanto \vec{E} e \vec{B} sono perpendicolari in ogni punto.

- Sui punti della circonferenza C il campo magnetico ha modulo costante ed è tangente in ogni punto alla circonferenza. Pertanto la circuitazione di C vale:

$$\Gamma(\vec{B}) = 2\pi r B = \frac{2\pi k t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r^2.$$

Dal teorema di Ampère-Maxwell ricaviamo:

$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{\Gamma(\vec{B})}{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}},$$

pertanto:

$$\Phi(\vec{E}) = \int \left(\frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \right) dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \int \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + c \right).$$

Poiché all'istante iniziale $t = 0$ la d.d.p. tra le armature è nulla, dev'essere nullo anche il campo elettrico \vec{E} . Questa condizione consente di trovare il valore della costante di integrazione c :

$$\Phi(\vec{E}) \Big|_{t=0} = 0 \rightarrow \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + c \right]_{t=0} = 0 \rightarrow -\frac{1}{a} + c = 0 \rightarrow c = \frac{1}{a}.$$

Quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right).$$

Riscriviamo l'espressione del campo elettrico sfruttando la definizione del suo flusso attraverso la superficie delimitata dalla circonferenza C , di area $S = \pi r^2$:

$$\Phi(\vec{E}) = ES = E\pi r^2 \rightarrow \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right) = E\pi r^2 \rightarrow E = \frac{2k}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right).$$

Troviamo ora l'espressione della d.d.p.:

$$\Delta V = Ed = \frac{2kd}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right).$$

Calcoliamo il limite di $|\vec{B}|$ per $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r = \lim_{t \rightarrow +\infty} kr \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = 0,$$

in quanto il numeratore della frazione è un infinito di ordine 1, mentre il denominatore si comporta come $\sqrt{(t^2)^3}$ e quindi è un infinito di ordine 3.

L'analisi dal punto di vista fisico è concorde con il risultato ottenuto: infatti la differenza di potenziale ΔV , al trascorrere del tempo, tende a un valore costante dato da:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta V = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2kd}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right) = \frac{2k}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{d}{a},$$

per cui anche il campo elettrico tende a un valore costante e la corrente di spostamento i_s tende a zero.

- Entrambe le funzioni $F(t)$ e $f(t)$ sono continue e derivabili in \mathbb{R} . Deriviamo $F(t)$ rispetto a t , supponendo $a > 0$:

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} (t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} 2t = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = f(t).$$

Quindi $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$. Inoltre il suo grafico passa per l'origine, in quanto:

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0.$$

Studiamo la funzione $F(t)$.

- Dominio: $t \in \mathbb{R}$.
- Segno: dal momento che $\sqrt{t^2 + a^2} \geq \sqrt{a^2} = a$, risulta $\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \leq 0$, quindi $F(t)$ è ovunque negativa o nulla.
- Simmetrie: $F(t)$ è una funzione pari. Infatti:

$$F(-t) = \frac{1}{\sqrt{(-t)^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = F(t).$$

Il suo grafico, quindi, è simmetrico rispetto all'asse y .

- Limiti:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a}.$$

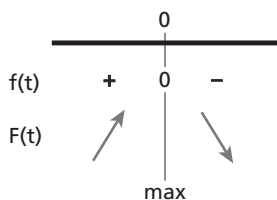
Il grafico della funzione ammette quindi la retta di equazione $y = -\frac{1}{a}$ come asintoto orizzontale, sia destro sia sinistro.

- Studiamo il segno della derivata di $F(t)$ per determinare dove $F(t)$ è crescente e dove è decrescente e per determinare i suoi punti stazionari.

Poiché $F'(t) = f(t)$, basta studiare il segno di $f(t)$:

$$f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} > 0 \rightarrow t < 0$$

perché il denominatore è positivo per ogni $t \in \mathbb{R}$.



■ Figura 7

Quindi $F(t)$ ha un punto di massimo nell'origine $O(0; 0)$.

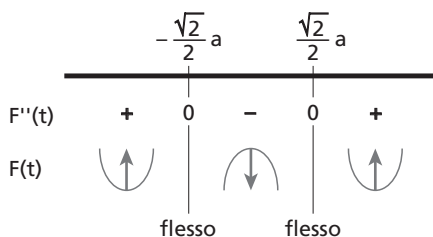
Per trovare i punti di flesso di $F(t)$ calcoliamo la sua derivata seconda, cioè la derivata prima di $f(t)$:

$$\begin{aligned} F''(t) = f'(t) &= -\frac{d}{dt} \left[t(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = - \left[(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} + t \left(-\frac{3}{2} \right) (2t) (t^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} \right] = \\ &= -(t^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} [(t^2 + a^2) - 3t^2] = -(t^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} (a^2 - 2t^2) = \frac{2t^2 - a^2}{\sqrt{(t^2 + a^2)^5}}. \end{aligned}$$

La derivata seconda $F''(t)$ si annulla in $t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Studiamo la concavità di $F(t)$:

$$F''(t) > 0 \rightarrow 2t^2 - a^2 > 0.$$



■ Figura 8

I punti di ascissa $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$ risultano dunque punti di flesso per la funzione F .

I due punti sono simmetrici rispetto all'asse y e quindi hanno la stessa ordinata:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 = F\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}} - \frac{1}{a} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6} - 3}{3a}. \end{aligned}$$

Quindi i punti di flesso hanno coordinate:

$$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a; \frac{\sqrt{6} - 3}{3a}\right), \quad F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a; \frac{\sqrt{6} - 3}{3a}\right).$$

Le equazioni delle rette r e s tangenti al grafico di F nei punti di flesso F_1 e F_2 sono date da

$$r: y - y_{F_1} = f(t_{F_1})(t - t_{F_1})$$

$$s: y - y_{F_2} = f(t_{F_2})(t - t_{F_2})$$

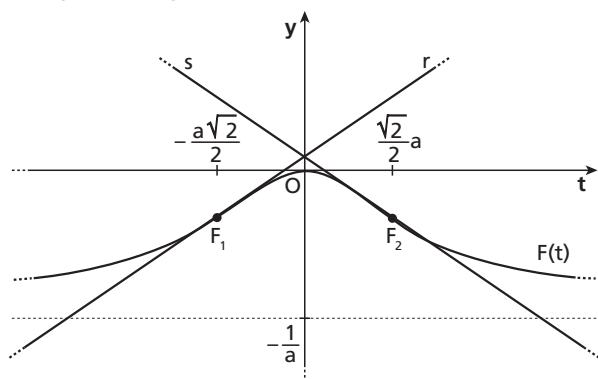
le cui pendenze sono:

$$f(t_{F_1}) = -\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 + a^2\right)^3}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}a^3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{a^2}$$

e, per simmetria:

$$f(t_{F_2}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{a^2}.$$

Disegniamo il grafico probabile di $F(t)$, tracciando anche l'asintoto e le rette tangenti nei punti di flesso.



■ Figura 9

- Le ascisse t_{F_1} e t_{F_2} dei punti di flesso di F soddisfano la condizione $F''(t_{F_1}) = F''(t_{F_2}) = 0$, cioè $f'(t_{F_1}) = f'(t_{F_2}) = 0$; quindi tali ascisse sono le ascisse dei punti stazionari di $f(t)$. Riportiamo nel seguente schema i segni di $f(t)$ e $f'(t)$.

	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$			0	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$		
$f(t)$	+		+	0	-		-
$f'(t)$	+	0	-		-	0	+

■ Figura 10

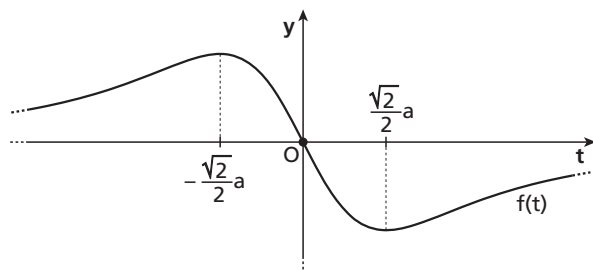
Per dedurre il grafico di $f(t)$ da quello di $F(t)$, notiamo le seguenti proprietà.

- $F(t)$ è strettamente crescente per $t \in]-\infty; 0[$, quindi $f(t)$ è positiva per $t \in]-\infty; 0[$.
- $F(t)$ è strettamente decrescente per $t \in]0; +\infty[$, quindi $f(t)$ è negativa per $t \in]0; +\infty[$.
- Il punto di massimo di $F(t)$ coincide con lo zero di $f(t)$.
- I punti di flesso del grafico di $F(t)$ corrispondono a punti stazionari di $f(t)$. In particolare in $t_{F_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ la funzione $f(t)$ ha un massimo relativo e in $t_{F_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ la funzione $f(t)$ ha un minimo relativo.
- Inoltre la funzione $F(t)$ tende a un valore finito per $t \rightarrow \pm\infty$, quindi $f(t)$ tende a 0 per $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0.$$

- Infine la funzione $F(t)$ è pari, quindi $f(t)$ è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Disegniamo il grafico probabile di $f(t)$.



■ Figura 11

Poiché $f(t)$ è dispari, ogni integrale della forma

$$\int_{-b}^b f(t) dt,$$

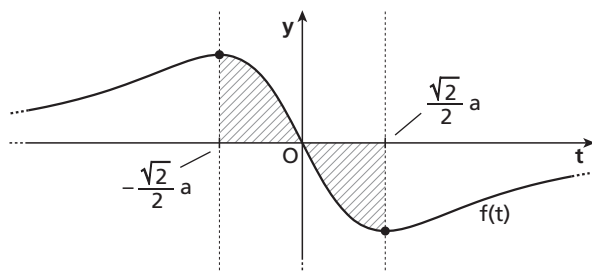
con $b > 0$, è nullo.

L'area della regione compresa tra l'asse delle ascisse, la retta di equazione $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e il grafico della funzione $f(t)$ è:

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^0 f(t) dt = F(0) - F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = 0 - y_{F_1} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3a} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Poiché la funzione $f(t)$ è simmetrica rispetto all'origine, l'area A' della superficie compresa tra il grafico di f , l'asse delle ascisse e le rette di equazione $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e $t = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ è pari al doppio dell'area appena calcolata:

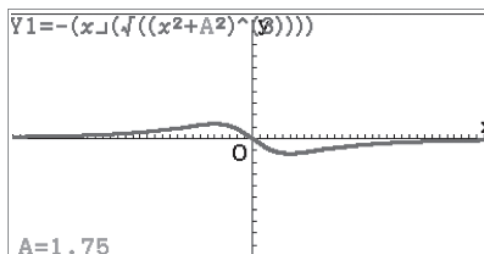
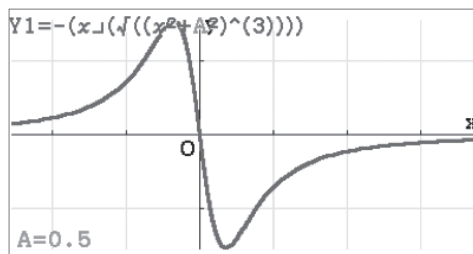
$$A' = 2A = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$



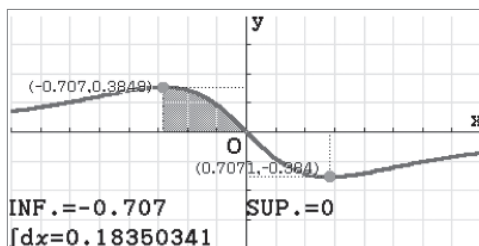
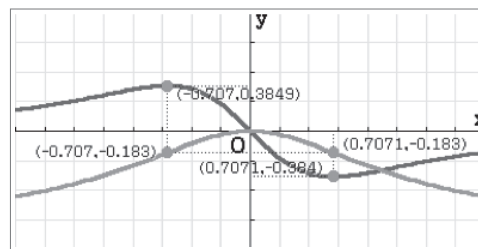
■ Figura 12

Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *Dyna Graph* per disegnare la funzione $f(t)$. Per visualizzare le principali caratteristiche comuni al variare di a usiamo il comando $F3$ (VAR) per impostare con SET i valori con cui far variare a . Al variare del parametro a il grafico conserva la sua simmetria rispetto all'origine degli assi. Pertanto, la sua primitiva è una funzione simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.



Nell'ambiente *Graph* disegniamo la funzione $F(t)$ per $a = 1$. Possiamo scrivere la funzione con il parametro e poi impostarne il valore. Possiamo determinare i punti di flesso di $F(t)$ determinando i punti di minimo e massimo relativi di $f(t)$. Per farlo, usiamo il comando $F5$ (G-SOLV) e poi $F2$ (MAX) e $F3$ (MIN). Per determinare le ordinate dei punti di flesso digitiamo in successione $F5$ (G-SOLV), $F6$ e $F1$ (Y-CAL).



Possiamo anche calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $f(t)$, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione.

2 Riscriviamo la funzione $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2019} = x(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018}).$$

Risolviamo l'equazione:

$$g(x) = 0 \rightarrow x(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018}) = 0 \rightarrow x = 0 \vee 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018} = 0.$$

La prima equazione ha come unica soluzione 0, mentre la seconda equazione è impossibile, poiché $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto somma di quadrati. Quindi esiste ed è unico x_0 tale che $g(x_0) = 0$ e in particolare $x_0 = 0$.

Determiniamo il valore di:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2019} \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2018}} \right)}{1,1^x}.$$

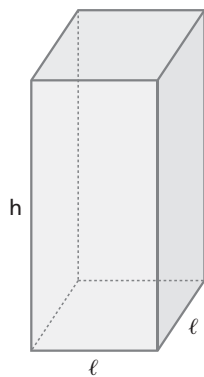
Al numeratore $1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2018}}$ tende a 1 per $x \rightarrow +\infty$ e quindi:

$$\frac{x^{2019} \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2018}} \right)}{1,1^x} \sim \frac{x^{2019}}{1,1^x}.$$

Per la gerarchia degli infiniti, x^β è un infinito di ordine inferiore rispetto a b^x quando $x \rightarrow +\infty$ per ogni $\beta > 0$ e $b > 1$, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2019}}{1,1^x} = 0.$$

3 Consideriamo un parallelepipedo rettangolo a base quadrata e indichiamo con l lo spigolo della base quadrata e con h l'altezza ($l, h > 0$).



■ Figura 14

L'area della superficie totale vale: $S = 2l^2 + 4lh$.

Vogliamo rendere minima la somma delle lunghezze degli spigoli: $L = 8l + 4h = 4(2l + h)$. I valori di l e h che rendono minima la funzione L sono gli stessi che minimizzano la funzione $A = 2l + h$, data dalla somma delle tre dimensioni.

Da $S = 2l^2 + 4lh$ è possibile ricavare $h = \frac{S - 2l^2}{4l}$. Poiché l e h sono positivi, troviamo la limitazione:

$$\frac{S - 2l^2}{4l} > 0 \rightarrow S - 2l^2 > 0 \rightarrow 0 < l < \frac{\sqrt{2S}}{2}.$$

Sostituiamo in A l'espressione ottenuta per h :

$$A = A(l) = 2l + h = 2l + \frac{S - 2l^2}{4l} = \frac{6l^2 + S}{4l}.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$A'(l) = \frac{12l \cdot 4l - (6l^2 + S) \cdot 4}{16l^2} = \frac{6l^2 - S}{4l^2}.$$

Troviamo gli zeri della derivata e studiamo il segno, tenendo conto della limitazione su l :

$$A'(l) = 0 \rightarrow \frac{6l^2 - S}{4l^2} = 0 \rightarrow l = \sqrt{\frac{S}{6}} = \frac{\sqrt{6S}}{6};$$

$$A'(l) > 0 \rightarrow \frac{6l^2 - S}{4l^2} > 0 \rightarrow 6l^2 - S > 0 \rightarrow l > \frac{\sqrt{6S}}{6}.$$

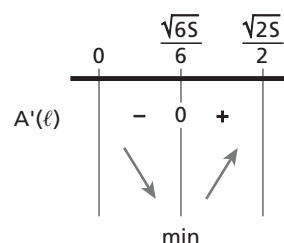
Compiliamo il quadro dei segni, sempre tenendo conto delle limitazioni.

Dunque $l = \frac{\sqrt{6S}}{6}$ è punto di minimo per la funzione $A(l)$ e soddisfa le limitazioni su l .

L'altezza del parallelepipedo vale in questo caso:

$$h = \frac{S - 2l^2}{4l} = \frac{S - 2 \cdot \frac{S}{6}}{4 \sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{\sqrt{6S}}{6}.$$

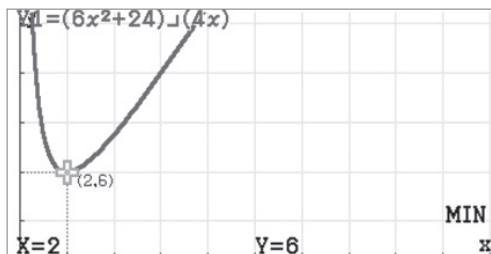
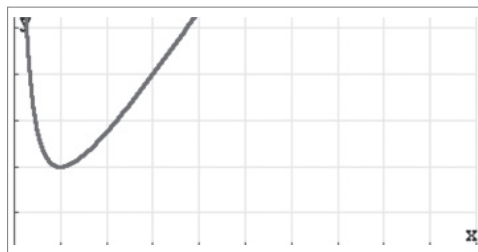
■ Figura 15



Quindi il parallelepipedo a base quadrata la cui somma delle lunghezze degli spigoli è minima è in realtà un cubo; la somma delle lunghezze degli spigoli vale $12 \cdot \frac{\sqrt{6S}}{6} = 2\sqrt{6S}$.

Con la calcolatrice grafica

Rappresentiamo graficamente la funzione $A(l)$ per un valore definito di S , per esempio $S = 24$.



4 Un punto generico P dello spazio ha coordinate $P(x; y; z)$.

La sua distanza dai punti $A(2; 0; -1)$ e $B(-2; 2; 1)$ è:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2}, \quad \overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Imponiamo la condizione $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$, equivalente a $\overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2$:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = 2[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2].$$

Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

che è l'equazione di una superficie sferica S di centro

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) \rightarrow C\left(-\frac{12}{2}; -\frac{-8}{2}; -\frac{-6}{2}\right) \rightarrow C(-6; 4; 3)$$

e raggio

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} = \sqrt{\frac{12^2}{4} + \frac{(-8)^2}{4} + \frac{(-6)^2}{4} - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \simeq 6,93.$$

Verifichiamo che il punto $T(-10; 8; 7)$ appartiene alla superficie S mostrando che le sue coordinate soddisfano l'equazione della superficie:

$$(-10)^2 + 8^2 + 7^2 + 12 \cdot (-10) - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 7 + 13 = 0 \rightarrow$$

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \rightarrow 0 = 0 \text{ Vero.}$$

Il vettore \overrightarrow{CT} , che rappresenta il raggio della superficie sferica passante per T , ha componenti:

$$\overrightarrow{CT}(x_T - x_C; y_T - y_C; z_T - z_C) \rightarrow \overrightarrow{CT}(-10 + 6; 8 - 4; 7 - 3) \rightarrow \overrightarrow{CT}(-4; 4; 4).$$

Il piano α passante per T e tangente alla superficie S è lo stesso piano passante per T e perpendicolare a \overrightarrow{CT} . Se indichiamo con $(r_x; r_y; r_z)$ le componenti di \overrightarrow{CT} , troviamo:

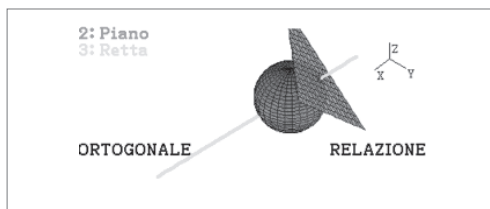
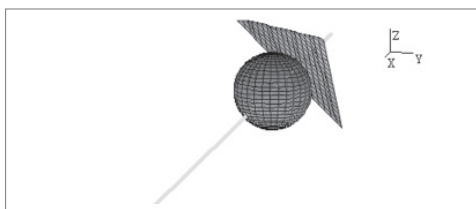
$$r_x(x - x_T) + r_y(y - y_T) + r_z(z - z_T) = 0 \rightarrow$$

$$-4(x + 10) + 4(y - 8) + 4(z - 7) = 0 \rightarrow -4x - 40 + 4y - 32 + 4z - 28 = 0 \rightarrow$$

$$-4x + 4y + 4z - 100 = 0 \rightarrow x - y - z + 25 = 0.$$

Con la calcolatrice grafica

Possiamo verificare graficamente i risultati trovati nell'ambiente *3D Graph* disegnando la sfera di raggio $4\sqrt{3}$ e centro $C(-6; 4; 3)$, il piano di equazione $x - y - z + 25 = 0$ e il vettore di componenti $(-4; 4; 4)$ applicato al centro C .



5 Stabiliamo innanzitutto il numero di casi possibili nel lancio di 4 dadi con facce numerate da 1 a 6: esso è $6^4 = 1296$.

- Calcoliamo la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5. Ciò equivale a richiedere che la somma dei numeri usciti sia 4 (che avviene nell'unico caso in cui le uscite sono tutte 1), oppure che la somma dei numeri usciti sia 5 (che avviene se tre numeri sono 1 e un numero è 2). Per quest'ultima eventualità ci sono 4 casi possibili: (1; 1; 1; 2); (1; 1; 2; 1); (1; 2; 1; 1) e (2; 1; 1; 1). Quindi la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5 è uguale a $\frac{5}{1296}$.

- Calcoliamo la probabilità dell'evento E = «Il prodotto dei 4 numeri usciti è multiplo di 3». Ciò equivale a richiedere che almeno uno dei numeri usciti sia 3 oppure 6.

Possiamo usare la probabilità dell'evento contrario \bar{E} = «Il prodotto dei 4 numeri usciti non è multiplo di 3», che è equivalente a richiedere che non escano mai né il 3 né il 6. In tal caso i possibili esiti favorevoli per ogni dado sono 4 (infatti sono favorevoli le uscite 1, 2, 4 e 5) e perciò la probabilità richiesta è uguale a:

$$p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{4^4}{1296} = 1 - \frac{256}{1296} = \frac{1040}{1296} = \frac{65}{81}.$$

- Calcoliamo la probabilità dell'evento E = «Il massimo numero uscito è 4». Ciò equivale a richiedere che almeno un numero sia 4 e che nessun dei restanti sia 5 oppure 6.

Per calcolare $p(E)$, consideriamo prima di tutto l'evento E_1 = «I numeri usciti sono tutti minori o uguali a 4»: in questo caso abbiamo $4^4 = 256$ possibilità e, ragionando nello stesso modo, $3^4 = 81$ è il numero dei casi per l'evento E_2 = «I numeri usciti sono tutti minori o uguali a 3».

Osserviamo che $E_2 \subset E_1$ e che l'evento E è equivalente all'evento $E_1 - E_2$. Infatti il numero di casi favorevoli dell'evento E di cui si vuole calcolare la probabilità corrisponde a stabilire quante tra le 256 possibilità

di numeri usciti minori o uguali a 4 presentano almeno un 4, escludendo quindi tutti i casi in cui tutti i numeri siano minori o uguali a 3. Il numero di casi favorevoli dell'evento E è uguale quindi alla differenza $256 - 81 = 175$. In conclusione, la probabilità richiesta è $p(E) = \frac{175}{1296}$.

Il terzo punto si può risolvere anche, in alternativa, esprimendo la probabilità cercata come somma delle probabilità dei seguenti eventi incompatibili:

1. Escono tutti 4:

$$p_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4}.$$

2. Escono tre 4 e un numero minore di 4 (1, 2 o 3):

$$p_2 = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{3}{6}\right)^1 = 4 \cdot \frac{3}{6^4}.$$

3. Escono due 4 e due numeri minori di 4 (1, 2 o 3):

$$p_3 = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{3^2}{6^4}.$$

4. Escono un 4 e tre numeri minori di 4 (1, 2 o 3):

$$p_4 = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{3^3}{6^4}.$$

Dunque:

$$p(E) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{6^4} + 4 \cdot \frac{3}{6^4} + 6 \cdot \frac{3^2}{6^4} + 4 \cdot \frac{3^3}{6^4} = \frac{1 + 12 + 54 + 108}{1296} = \frac{175}{1296}.$$

Con la calcolatrice grafica

Nell'ambiente *Run-Matrix* possiamo eseguire più rapidamente alcuni dei calcoli necessari, usando il comando $F3(nCr)$ per il calcolo delle combinazioni.

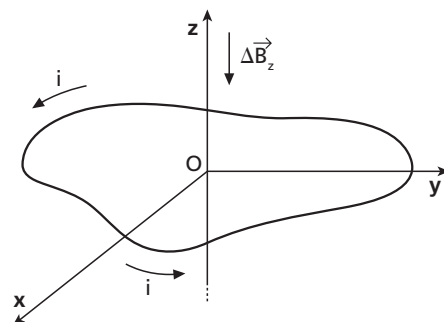
- 6** In un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ supponiamo che il campo magnetico \vec{B} sia diretto lungo z , e quindi la spira giaccia nel piano Oxy . Poiché la superficie della spira non varia, la variazione $\Delta\Phi(\vec{B})$ del flusso di \vec{B} attraverso di essa è determinata dalla variazione della componente B_z del campo magnetico lungo l'asse z . Per la legge di Faraday-Neumann la variazione di flusso nel tempo provoca una corrente indotta nella spira. Detta R la resistenza della spira, la legge per l'intensità media i della corrente indotta è la seguente:

$$i = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t},$$

in cui il segno meno esprime la legge di Lenz che determina il verso della corrente.

Ci sono due casi possibili:

- B_z diminuisce (intervalli da 0,0 ms a 3,0 ms e da 5,0 ms a 10,0 ms) e i scorre in senso antiorario, come in figura. Così la corrente indotta i genera un campo magnetico parallelo e concorde con l'asse z , che contrasta la variazione (negativa) di B_z .



■ Figura 16

- B_z aumenta (intervallo da 3,0 ms a 5,0 ms) e i scorre in senso orario, come nella figura a fianco. Così la corrente indotta i genera un campo magnetico parallelo e discorde rispetto all'asse z , che contrasta la variazione (positiva) di B_z .

Calcoliamo la corrente indotta media nei tre casi richiesti.

- a. Dal grafico fornito nel testo del quesito vediamo che all'intervallo di tempo $\Delta t = (3,0 - 0,0) \text{ ms} = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ corrisponde la seguente variazione di B_z :

$$\Delta B_z = (-0,20 - 0,00) \text{ mT} = -2,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

La corrispondente variazione di flusso è il prodotto di ΔB_z per l'area $A = 30 \text{ cm}^2 = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ della superficie della spira:

$$\Delta \Phi(\vec{B}) = A \Delta B_z = (3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)(-2,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}) = -6,0 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}.$$

Dalla legge di Faraday-Neumann, con $R = 4,0 \text{ m}\Omega = 4,0 \cdot 10^{-3} \Omega$, otteniamo quindi:

$$i = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta \Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{1}{4,0 \cdot 10^{-3} \Omega} \left(\frac{-6,0 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}}{3,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \right) = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ A}.$$

Procediamo in modo simile per gli altri due casi.

- b. $\Delta t = (5,0 - 3,0) \text{ ms} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$$\Delta B_z = [0,20 - (-0,20)] \text{ mT} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$\Delta \Phi(\vec{B}) = (3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)(4,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}) = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

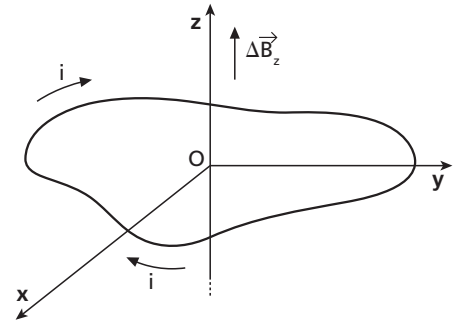
$$i = -\frac{1}{4,0 \cdot 10^{-3} \Omega} \left(\frac{1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}{2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \right) = -0,15 \text{ A}$$

- c. $\Delta t = (10,0 - 5,0) \text{ ms} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$$\Delta B_z = (0,00 - 0,20) \text{ mT} = -2,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$\Delta \Phi(\vec{B}) = (3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)(-2,0 \cdot 10^{-4} \text{ T}) = -6,0 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

$$i = -\frac{1}{4,0 \cdot 10^{-3} \Omega} \left(\frac{-6,0 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}}{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \right) = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$



■ Figura 17

- 7** Indichiamo con S il sistema di riferimento del laboratorio e con $(x; t)$ le sue coordinate spazio-temporali. Indichiamo con S' il sistema di riferimento solidale con la navicella, e con $(x'; t')$ le sue coordinate spazio-temporali.

Le due osservazioni della particella in S sono eventi di coordinate:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m} \\ t_2 = 2,0 \text{ ns} = 2,0 \cdot 10^{-9} \text{ s} \end{cases}$$

Assumendo che S e S' coincidano a $t = t' = 0$, gli stessi eventi, nel sistema S' , hanno coordinate iniziali:

$$\begin{cases} x'_1 = 0 \\ t'_1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x'_2 \text{ da determinare} \\ t'_2 \text{ da determinare} \end{cases}$$

La velocità media della particella nel sistema S è:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0,25 \text{ m}}{2,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}}.$$

Moltiplicando e dividendo per c otteniamo:

$$v_m = \frac{0,25 \text{ m}}{2,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}} \cdot \frac{c}{3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \frac{5}{12} c.$$

Componiamo relativisticamente v_m con la velocità $v = 0,80c = \frac{4}{5}c$ di S' rispetto a S e otteniamo la velocità media v'_m della particella in S' :

$$v'_m = \frac{v_m - v}{1 - \frac{v_m v}{c^2}} = \frac{\frac{5}{12}c - \frac{4}{5}c}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5}} = -\frac{23}{40}c.$$

Il coefficiente di dilatazione per passare da S a S' è:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}.$$

Usiamo le trasformazioni di Lorentz per trovare x'_2 e t'_2 :

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \\ t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'_2 = \frac{5}{3}\left[0,25 \text{ m} - \frac{4}{5}c(2,0 \cdot 10^{-9} \text{ s})\right] = -0,38 \text{ m} \\ t'_2 = \frac{5}{3}\left[2,0 \cdot 10^{-9} \text{ s} - \frac{4(0,25 \text{ m})}{5c}\right] = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ s} \end{cases}$$

La distanza e l'intervallo di tempo misurati in S' sono quindi:

$$\begin{cases} |\Delta x'| = |x'_2 - x'_1| = |x'_2| = 0,38 \text{ m} \\ \Delta t' = t'_2 - t'_1 = t'_2 = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ s} \end{cases}$$

Notiamo che non è corretto applicare tra S e S' le formule della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze. Infatti in nessuno dei due sistemi di riferimento i due eventi hanno luogo nello stesso punto, né sono simultanei.

8 La velocità \vec{v} del protone è la somma di un vettore \vec{v}_{\parallel} parallelo al campo magnetico \vec{B} e di un vettore \vec{v}_{\perp} a esso perpendicolare.

La componente circolare del moto è determinata dalla forza di Lorentz $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$, il cui modulo è $F = ev_{\perp}B$.

La forza di Lorentz è una forza centripeta e, per la seconda legge di Newton, $F = m_p \frac{v_{\perp}^2}{r}$, con r raggio del moto.

Vale quindi la seguente uguaglianza: $ev_{\perp}B = m_p \frac{v_{\perp}^2}{r}$. Da essa ricaviamo:

$$v_{\perp} = \frac{r e B}{m_p}.$$

Il periodo della componente circolare del moto è $T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m_p}{eB}$.

Il passo dell'elica, cioè lo spostamento compiuto dal protone nella direzione del campo magnetico nel tempo T , è $\Delta x = v_{\parallel}T$.

Ricaviamo v_{\parallel} da questa equazione e sostituiamo l'espressione di T :

$$v_{\parallel} = \frac{\Delta x}{T} = \frac{\Delta x e B}{2\pi m_p}.$$

Ora che abbiamo espresso le due componenti della velocità \vec{v} in funzione delle grandezze note, possiamo calcolare il modulo di \vec{v} :

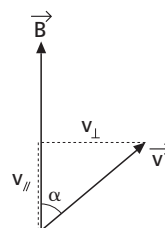
$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{eB}{m_p} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^2}.$$

Sostituendo i dati otteniamo:

$$v = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,00 \cdot 10^{-3} \text{ T})}{1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \sqrt{(0,105 \text{ m})^2 + \left(\frac{0,381 \text{ m}}{2\pi}\right)^2} = 1,16 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

L'angolo α formato dai vettori \vec{B} e \vec{v} è:

$$\alpha = \arctan \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \arctan \frac{2\pi r}{\Delta x} = \arctan \frac{2\pi(0,105 \text{ m})}{0,381 \text{ m}} = 60,0^\circ.$$



■ Figura 18

A. S. 2018-2019

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA 1

Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{k}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

- Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione f è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di k le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $\tan \gamma = 3$?
- Posto $k = 1$, sia r una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti S e T i punti d'intersezione tra r e il grafico della funzione f , siano S' e T' le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x . Come deve essere scelto il valore di t , in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T'$?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio R , espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con ρ ed espressa in coulomb al metro cubo (C/m^3), è uniforme.

- Indicata con x la distanza di un punto P dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

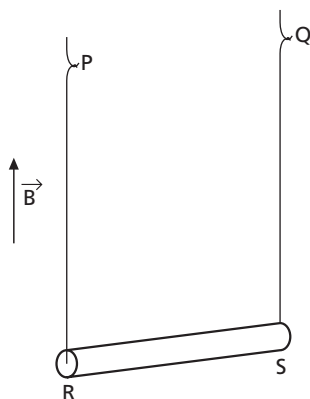
$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ \frac{k R^3}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases}$$

dove k è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica ρ e la dimensione fisica.

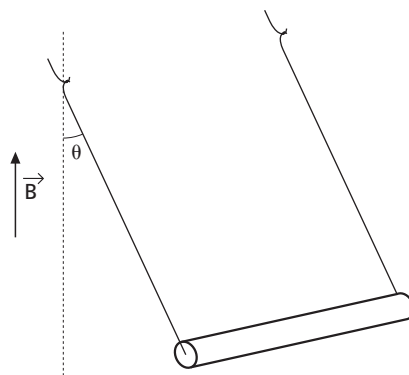
- Sia q una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica q a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica q a distanza infinita dal centro della sfera?

PROBLEMA 2

In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l , misurata in metri (m), di massa m , misurata in chilogrammi (kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q , posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico \vec{B} , uniforme e costante, perpendicolare al filo (**fig. 1**) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i , misurata in ampere (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo θ con la direzione verticale (**fig. 2**).



■ Figura 1



■ Figura 2

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo \vec{B} agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS . Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?
- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS . Considerando costanti \vec{B} , la massa m e la lunghezza l del filo RS , verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = \arctan\left(\frac{Bl}{mg} \cdot i\right)$, in cui g è l'accelerazione di gravità.
- Posto $\theta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy , le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.
- Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

QUESTIONARIO

- 1 Determinare il valore di questo limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

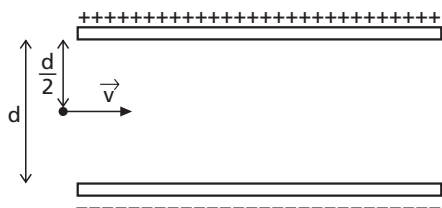
- 2 Data la funzione $f(x) = x \sin x$ e fissato un numero $k > 0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k \cdot f(kx) dx$$

(dove x_0 indica il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0) = 0$) non dipende dalla scelta di k .

- 3 Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato BC . Dimostrare che, se la lunghezza di AM è la metà di BC , allora ABC è un triangolo rettangolo.
- 4 Dopo aver verificato che il punto $T(1; 0; 1)$ appartiene al piano $\pi: x - 2y + 2z = 3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1; 0; 5)$ e tangente in T al piano π .
- 5 Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.
- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
 - Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

- 6** Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato $l = 4,0$ cm, distanti $d = 3,0$ cm, è soggetto a una d.d.p. $\Delta V = 15$ V. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità $v_0 = 2,5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia 20 cm?



■ Figura 3

- 7** Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10 cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5,00 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.
- 8** Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità $B = 0,20$ T, con velocità di modulo $v_0 = 1,5 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, che forma un angolo di 10° con la direzione di \vec{B} . Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

Costanti fisiche		
carica elementare	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
massa dell'elettrone	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa del protone	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
massa particella alfa	m_α	$6,645 \cdot 10^{-27}$ kg
costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

PROBLEMA 1

- La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{k}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

definita su $[0; +\infty[$ con $k > 0$, è sicuramente continua e infinitamente derivabile nel suo dominio per $x \neq 1$ perché le due funzioni $y = kx$ e $y = \frac{k}{x^2}$ che la definiscono nei due intervalli sono continue e infinitamente derivabili nei rispettivi domini naturali \mathbb{R} e $\mathbb{R} - \{0\}$.

Verifichiamo ora la continuità in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (kx) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k}{x^2} = k = f(1),$$

per cui $f(x)$ è continua anche in $x = 1$ per ogni valore di k .

Studiamo ora la derivabilità. La derivata prima vale:

$$f'(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{2k}{x^3} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

La funzione è derivabile nel suo dominio per $x \neq 1$. Verifichiamo la derivabilità in $x = 1$.

Poiché risulta:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} k = k \text{ e } f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{2k}{x^3}\right) = -2k,$$

e quindi $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ per $k > 0$, la funzione non è mai derivabile in $x = 1$.

Elenchiamo alcune caratteristiche della funzione $f(x)$ utili per disegnare il suo grafico.

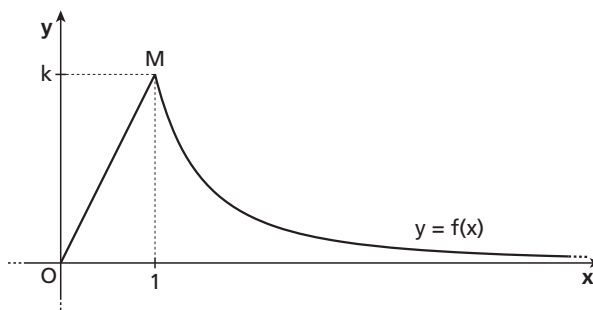
- $f(x)$ esiste ed è continua su $[0; +\infty[$;
- $f(x)$ interseca gli assi nell'origine $O(0; 0)$;
- $f(x)$ è sempre positiva per $x > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^2} = 0^+$, per cui l'asse x è un asintoto orizzontale destro;
- la derivata prima (già calcolata) non si annulla mai ed è positiva per $0 \leq x < 1$, intervallo in cui la funzione è crescente, ed è negativa per $x > 1$, dove la funzione è decrescente;
- $f(x)$ presenta dunque un punto di massimo assoluto nel suo punto di non derivabilità $M(1; k)$.

Calcoliamo poi la derivata seconda per studiare la concavità della funzione.

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{6k}{x^4} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

La derivata seconda è dunque nulla per $0 \leq x < 1$, dove la funzione $f(x)$ è lineare, e positiva per $x > 1$, dove la funzione $f(x)$ volge la concavità verso l'alto.

Si ricava il grafico della funzione $f(x)$.



■ Figura 4

Indicati con α e β gli angoli che le due rette tangenti, destra e sinistra, nel punto M formano con il semiasse positivo delle ascisse, si ha $\tan \alpha = -2k$ e $\tan \beta = k$.

Poiché l'angolo γ è l'angolo acuto formato dalle due semirette tangenti in M , si ha:

$$\tan \gamma = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \right| = \left| \frac{-2k - k}{1 - 2k^2} \right| = \left| \frac{3k}{2k^2 - 1} \right|.$$

Imponendo $\tan \gamma = 3$, e ricordando che un'equazione del tipo $|A(x)| = c$ si sdoppia nelle due equazioni $A(x) = c \vee A(x) = -c$, troviamo:

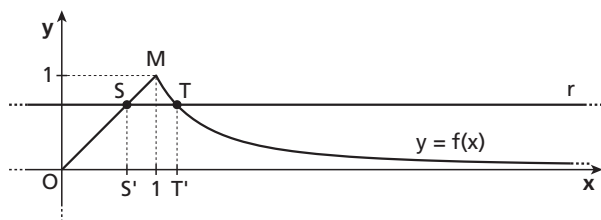
$$\left| \frac{3k}{2k^2 - 1} \right| = 3 \rightarrow 2k^2 - k - 1 = 0 \vee 2k^2 + k - 1 = 0 \rightarrow k = 1 \vee k = -\frac{1}{2} \vee k = \frac{1}{2} \vee k = -1.$$

Con la condizione $k > 0$, solo i valori $k = \frac{1}{2} \vee k = 1$ sono accettabili.

- Posto $k = 1$, si ottiene la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

di cui disegniamo il grafico.



■ Figura 5

Il grafico di $f(x)$ interseca la retta r di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$, nei punti S e T di coordinate:

$$\begin{cases} y = x \\ y = t \end{cases} \rightarrow S(t, t);$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{t}} \\ y = t \end{cases} \rightarrow T\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, t\right) \text{ essendo accettabile solo il punto con } x > 0.$$

Osserviamo che, essendo $0 < t < 1$, l'ascissa di S è compresa fra 0 e 1 mentre l'ascissa di T è maggiore di 1.

Le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x hanno coordinate: $S'(t; 0)$ e $T'\left(\frac{1}{\sqrt{t}}; 0\right)$.

Il rettangolo $SS'T'T$ ha l'altezza $SS' = t$ e la base $S'T' = \frac{1}{\sqrt{t}} - t$, per cui la sua area vale:

$$A(t) = t \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - t\right) = \sqrt{t} - t^2.$$

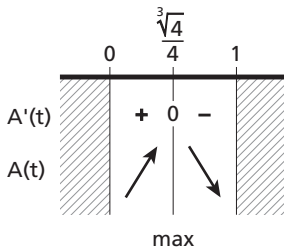
Per determinare il valore massimo, calcoliamo la sua derivata prima:

$$A'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = \frac{1 - 4t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}.$$

Studiamo il suo segno notando che il denominatore, per $0 < t < 1$, è sempre positivo mentre per il numeratore si ha:

$$1 - 4t\sqrt{t} > 0 \rightarrow t\sqrt{t} < \frac{1}{4} \rightarrow t^3 < \frac{1}{16} \rightarrow t < \frac{\sqrt[3]{4}}{4}.$$

Riportiamo il segno nel seguente schema.



■ Figura 6

L'area massima del rettangolo si ottiene quindi per $t = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

- Detta $Q > 0$ la carica complessiva della distribuzione sferica di raggio R , la densità di carica uniforme vale $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Utilizzando il teorema di Gauss per il campo elettrico, consideriamo una sfera S concentrica a quella della distribuzione di carica e di raggio x con $0 \leq x \leq R$.

Il flusso del campo elettrico $\Phi(\vec{E})$ attraverso la sfera S vale:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{\epsilon_0},$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto.

Dalla definizione di flusso del campo elettrico si ha:

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 0^\circ = E \cdot 4\pi x^2,$$

dove A rappresenta l'area della superficie sferica di raggio x .

Uguagliando le due espressioni si ottiene che:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} x, \text{ con } 0 \leq x \leq R.$$

Se invece consideriamo una sfera S concentrica a quella della distribuzione di carica ma di raggio x con $x > R$, il flusso del campo elettrico attraverso S per il teorema di Gauss vale:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\epsilon_0}.$$

Dalla definizione di flusso del campo elettrico si ha sempre:

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 0^\circ = E \cdot 4\pi x^2.$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{x^2}, \text{ con } x > R.$$

Possiamo allora scrivere la funzione $E(x)$ nella forma:

$$E(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ k \frac{R^3}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases},$$

con $k = \frac{\rho}{3\epsilon_0}$. L'unità di misura della costante k è:

$$\frac{C}{m^3} \cdot \frac{C^2}{Nm^2} = \frac{N}{Cm} = \frac{kg}{C \cdot s^2} = \frac{kg}{A \cdot s^3}.$$

Le dimensioni fisiche della costante k sono perciò: $[k] = \frac{[\text{massa}]}{[\text{corrente}] \cdot [\text{tempo}]^3}.$

- Per determinare il lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica positiva q dal centro O della sfera a un punto A posto a distanza $2R$ dal centro della sfera stessa, occorre calcolare il potenziale elettrico nel punto iniziale e finale.

Sulla superficie della sfera di raggio R il potenziale vale:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} = kR^2.$$

Il campo elettrico all'interno della sfera uniformemente carica è radiale e vale:

$$E(x) = kx, \text{ con } 0 \leq x \leq R.$$

Poiché $E(x) = -\frac{dV}{dx}$, cioè $dV = -E(x)dx$, si ha:

$$\int_0^R dV = -k \int_0^R x dx \rightarrow V(R) - V(0) = -k \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^R \rightarrow V(R) - V(0) = -\frac{k}{2} R^2 \rightarrow$$

$$V(0) = V(R) + \frac{k}{2} R^2 = \frac{3}{2} kR^2.$$

Alla distanza $2R$ dal centro della sfera, nel punto A , si ha:

$$V(2R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{2R} = \frac{k}{2} R^2.$$

Il lavoro per spostare la carica q dal centro alla distanza $2R$ vale:

$$L_{O \rightarrow A} = -q\Delta V = q[V(0) - V(2R)] = q\left(\frac{3}{2} kR^2 - \frac{k}{2} R^2\right) = qkR^2.$$

A distanza infinita dal centro O il potenziale tende a zero, cioè si può porre $V(+\infty) = 0$; il lavoro per portare la carica q dal centro della sfera a distanza infinita da essa vale pertanto:

$$L_{O \rightarrow +\infty} = -q\Delta V = q[V(0) - V(+\infty)] = q\left(\frac{3}{2} kR^2 - 0\right) = \frac{3}{2} qkR^2.$$

PROBLEMA 2

- Su di un filo di lunghezza l percorso da una corrente d'intensità i e immerso in un campo magnetico \vec{B} , agisce la forza magnetica $\vec{F} = i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$, dove \vec{l} è un vettore che ha modulo pari alla lunghezza del filo l , direzione coincidente con quella del filo e verso della corrente i .

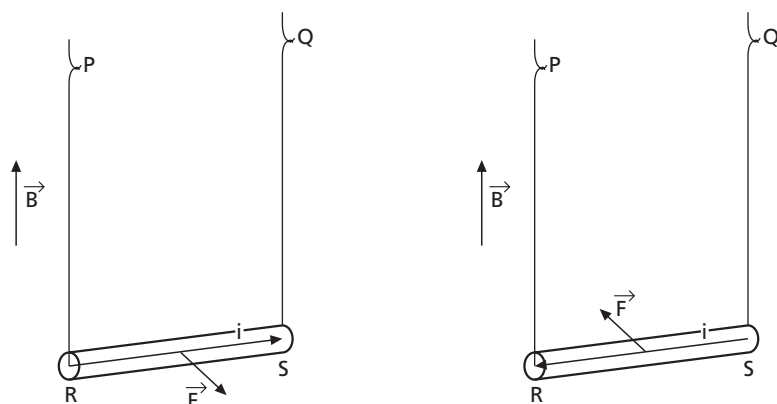
Nella situazione proposta il vettore campo magnetico è perpendicolare al filo, perciò l'intensità di tale forza vale:

$$F = ilB \sin 90^\circ = ilB.$$

La direzione della forza F è perpendicolare sia al filo RS sia al campo magnetico.

Il verso della forza dipende, per la «regola della mano destra», dal verso della corrente che scorre nel filo.

Nella figura seguente sono rappresentate le due possibili situazioni.

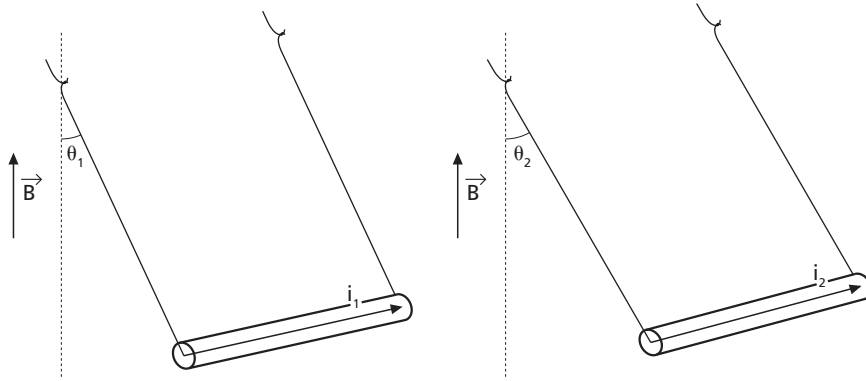


■ Figura 7

Per quanto riguarda la posizione di equilibrio del filo, oltre ad essere legata al verso della corrente, come detto in precedenza, dipende anche dall'intensità della corrente.

In particolare maggiore è l'intensità della corrente, maggiore è l'intensità della forza magnetica e quindi è maggiore anche l'ampiezza θ dell'angolo che si viene a formare all'equilibrio con la direzione verticale.

Nella figura sottostante sono illustrate due situazioni: se $i_1 > i_2$ allora all'equilibrio si ha $\theta_1 > \theta_2$.



■ Figura 8

- Sul filo RS agiscono tre forze che si equilibrano: la forza magnetica \vec{F}_M , la forza peso \vec{F}_P , e la reazione vincolare \vec{R}_V .

Nella figura a fianco è rappresentata la situazione descritta, vista di lato.

Per determinare l'ampiezza dell'angolo θ , all'equilibrio deve risultare:

$$\begin{cases} R_V \sin \theta = F_M \\ R_V \cos \theta = F_P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_V \sin \theta = ilB \\ R_V \cos \theta = mg \end{cases}$$

da cui, dividendo membro a membro, si ottiene:

$$\tan \theta = \frac{ilB}{mg} \rightarrow \theta(i) = \arctan\left(\frac{ilB}{mg} \cdot i\right).$$

- La funzione $\theta(x) = y = \arctan(kx)$ ha come dominio $D =]-\infty; +\infty[$ e come immagine $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Ricaviamo l'equazione della sua funzione inversa:

$$y = \arctan(kx) \rightarrow \tan y = kx \rightarrow x = \frac{1}{k} \tan y,$$

da cui, scambiando le variabili:

$$y = \frac{1}{k} \tan x \rightarrow \theta^{-1}(x) = y = \frac{1}{k} \tan x,$$

che ha come dominio $D =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ e come insieme immagine $I =]-\infty; +\infty[$.

Entrambi i grafici delle funzioni $y = \theta(x)$ e $y = \theta^{-1}(x)$ passano per l'origine $O(0; 0)$; essi risultano tangenti in O se le derivate delle due funzioni sono uguali per $x = 0$. Calcoliamo le due derivate:

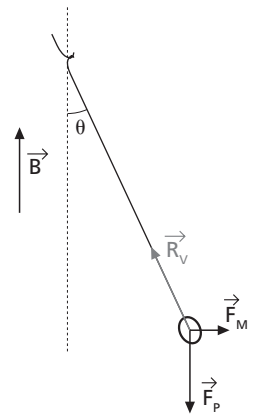
$$D[\theta(x)] = \frac{1}{1+(kx^2)} \cdot k = \frac{k}{1+k^2x^2} \rightarrow D[\theta(0)] = k;$$

$$D[\theta^{-1}(x)] = \frac{1}{k \cos^2 x} \rightarrow D[\theta^{-1}(0)] = \frac{1}{k}.$$

Deve risultare:

$$k = \frac{1}{k} \rightarrow k^2 = 1 \rightarrow k = \pm 1.$$

Per la condizione $k > 0$, solo $k = 1$ è accettabile.



■ Figura 9

Detti α e β gli angoli che le due rette tangenti nell'origine ai grafici delle due funzioni formano con il semiasse positivo delle ascisse, si ha $\tan \alpha = k$ e $\tan \beta = \frac{1}{k}$ e quindi:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{k - \frac{1}{k}}{1 + k \cdot \frac{1}{k}} = \frac{k^2 - 1}{2k}.$$

Per formare un angolo di 30° , essendo $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deve risultare $\left| \frac{k^2 - 1}{2k} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, da cui:

$$\frac{k^2 - 1}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 3k^2 - 2\sqrt{3}k - 3 = 0 \rightarrow k = \sqrt{3} \vee k = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{k^2 - 1}{2k} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 3k^2 + 2\sqrt{3}k - 3 = 0 \rightarrow k = -\sqrt{3} \vee k = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Per la condizione $k > 0$, solo $k = \sqrt{3}$ e $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono accettabili.

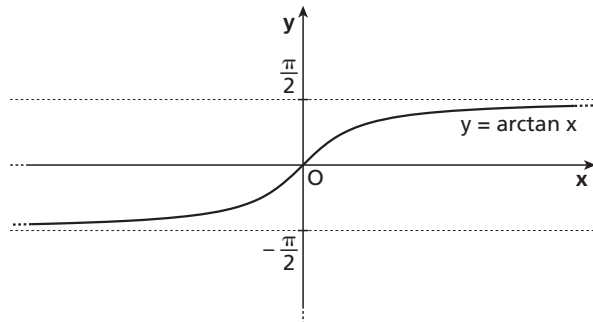
- Per determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $\theta(x) = \arctan x$ il cui grafico passi per l'origine $O(0; 0)$ occorre innanzitutto calcolare l'integrale indefinito utilizzando il metodo d'integrazione per parti:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + c.$$

Imponendo il passaggio per O si ottiene $c = 0$, pertanto:

$$F(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}.$$

Il grafico di $\theta(x) = \arctan x$ è il seguente.



■ Figura 10

La funzione $\theta(x)$ ha dominio $D =]-\infty; +\infty[$, è dispari, passa per l'origine, è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, presenta due asintoti orizzontali di equazioni $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$.

Per dedurre dal grafico di $\theta(x)$ il grafico della sua primitiva $y = F(x)$, occorre ricordare che:

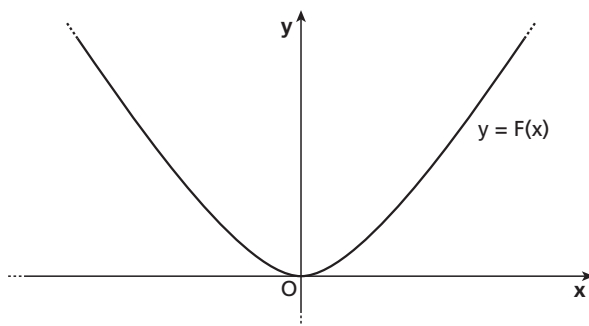
$$F(0) = 0;$$

$F(x)$ è crescente per $x > 0$, dove $\theta(x)$ è positiva, ed $F(x)$ è decrescente per $x < 0$, dove $\theta(x)$, è negativa;

nell'origine O la funzione $F(x)$ presenta un punto di minimo assoluto;

$F(x)$ è una funzione pari, mai negativa e risulta $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = +\infty$.

Pertanto il grafico qualitativo di $y = F(x)$ è il seguente.



■ Figura 11

QUESTIONARIO

1 Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

si presenta nella forma indeterminata 1^∞ .

Ricordando che se $A > 0$ vale l'identità $A = e^{\ln A}$, e considerato $A = (1 - \sin x)$, il limite si può riscrivere nella forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [e^{\ln(1 - \sin x)}]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 - \sin x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo portato il limite all'esponente grazie alla continuità della funzione esponenziale.

Per calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x}$, che è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, applichiamo il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \ln(1 - \sin x)}{Dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = -1.$$

Quindi il limite proposto vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

2 Data la funzione $f(x) = x \sin x$, risulta:

$$f(kx) = kx \sin(kx).$$

Per determinare il minimo valore positivo di x_0 tale che:

$$f(kx_0) = 0 \rightarrow kx_0 \sin(kx_0) = 0,$$

occorre notare che se $f(kx_0) = 0$, allora x_0 deve essere la minore soluzione positiva di $\sin(kx_0) = 0$, da cui:

$$kx_0 = \pi \rightarrow x_0 = \frac{\pi}{k}.$$

Per il calcolo dell'integrale indefinito $\int k f(kx) dx$ occorre integrare per parti:

$$\begin{aligned} \int k f(kx) dx &= \int k^2 x \sin(kx) dx = k \int x \cdot k \sin(kx) dx = -kx \cos(kx) + k \int \cos(kx) dx = \\ &= -kx \cos(kx) + \sin(kx) + c. \end{aligned}$$

L'integrale definito richiesto vale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} k^2 x \sin(kx) dx = [-kx \cos(kx) + \sin(kx)]_0^{\frac{\pi}{k}} = -\pi \cos \pi + \sin \pi - 0 = \pi,$$

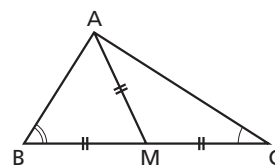
pertanto il suo valore non dipende dalla scelta di k .

3 Per ipotesi si ha che $AM \cong BM \cong CM$.

I triangoli AMB e AMC sono isosceli rispettivamente sulle basi AB e AC , per cui in particolare $\widehat{MAB} \cong \widehat{MBA}$ e $\widehat{MCA} \cong \widehat{MAC}$.

Detto $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = \alpha$, per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo AMB si ha che $\widehat{AMC} = 2\alpha$; poiché inoltre la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180° , risulta:

$$\widehat{MCA} = \widehat{MAC} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$



■ Figura 12

Perciò per l'angolo \widehat{BAC} troviamo $\widehat{BAC} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$, quindi il triangolo ABC è rettangolo.

4 Il punto $T(1; 0; 1)$ appartiene al piano $\pi: x - 2y + 2z = 3$ perché sostituendo le sue coordinate nell'equazione, si ottiene $1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$ che è un'uguaglianza verificata.

Per la condizione di tangenza, il centro C della superficie sferica appartiene alla retta r passante per il punto T e perpendicolare al piano π .

L'equazione parametrica della retta r è:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Il centro $C(1 + t; -2t; 1 + 2t)$ della superficie sferica è equidistante dai punti T e P . Per trovare t risolviamo l'equazione:

$$\begin{aligned} \overline{CT}^2 &= \overline{CP}^2 \rightarrow (1+t-1)^2 + (-2t-0)^2 + (1+2t-1)^2 = \\ (1+t-1)^2 + (-2t)^2 + (1+2t-5)^2 &\rightarrow 4t^2 = 4t^2 + 16 - 16t \rightarrow t = 1, \end{aligned}$$

per cui il centro ha coordinate $C(2; -2; 3)$.

In alternativa, avremmo potuto usare il fatto che il centro C della superficie sferica appartiene al piano luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti $T(1; 0; 1)$ e $P(1; 0; 5)$. Tale piano, che chiamiamo α :

- è perpendicolare al vettore \overline{TP} di componenti $(1-1; 0-0; 5-1)$, ovvero $\overline{TP}(0; 0; 4)$, e quindi α è parallelo al piano coordinato Oxy ;
- passa per il punto medio di TP , di coordinate $(\frac{1+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+5}{2}) = (1; 0; 3)$.

L'equazione del piano α è dunque $z = 3$.

Il punto C si ottiene dall'intersezione tra r e α .

Sostituendo le equazioni parametriche di r nell'equazione di α troviamo: $1 + 2t = 3 \rightarrow t = 1$, per cui il centro ha coordinate $C(2; -2; 3)$.

Il raggio della superficie sferica vale $\overline{CT} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2 + (3-1)^2} = 3$.

L'equazione della superficie sferica richiesta è pertanto:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0.$$

5 Calcoliamo le probabilità richieste secondo l'approccio classico, col rapporto tra il numero di casi favorevoli e quello dei casi possibili.

Se da un mazzo di 40 carte da gioco si estraggono contemporaneamente 6 carte, i casi possibili sono: $C_{40,6}$.

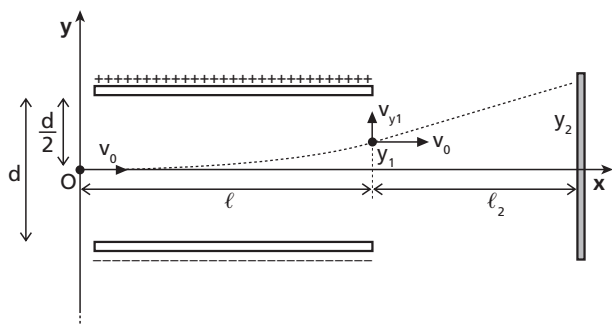
- Se nessuna delle carte estratte è rossa, significa che tutte e 6 le carte estratte fanno parte delle 20 carte nere presenti nel mazzo. I casi favorevoli a questo evento sono: $C_{20,6}$. La prima probabilità richiesta vale dunque:

$$p_1 = \frac{C_{20,6}}{C_{40,6}} = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{40}{6}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6!} \cdot \frac{6!}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35} = \frac{34}{3367} \simeq 1\%.$$

- Se tra le carte estratte vi sono esattamente 2 assi, significa che 2 carte devono essere scelte tra i 4 assi mentre le restanti 4 carte devono far parte delle 36 carte del mazzo che non sono assi. I casi favorevoli di questo evento sono $C_{4,2} \cdot C_{36,4}$. La seconda probabilità richiesta vale dunque:

$$p_2 = \frac{C_{4,2} \cdot C_{36,4}}{C_{40,6}} = \frac{\binom{4}{2} \binom{36}{4}}{\binom{40}{6}} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!} \cdot \frac{6!}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35} = \frac{1683}{18278} \simeq 9,2\%.$$

- 6 Quando l'elettrone entra nel condensatore viene deflesso verso l'alto a causa del campo elettrico esistente tra le armature. Dai dati del problema, deduciamo che tale deflessione non gli impedisce di uscire dal condensatore. Una volta uscito, l'elettrone prosegue di moto rettilineo uniforme conservando l'inclinazione della traiettoria presente nel punto di uscita. Per descrivere il moto dell'elettrone, scegliamo un sistema di riferimento Oxy con origine O nel punto d'ingresso dell'elettrone, asse x orizzontale e asse y verticale.



■ Figura 13

All'interno del condensatore, esiste un campo elettrico E che dipende dalla differenza di potenziale V e dalla distanza d tra le armature secondo la formula:

$$E = \frac{V}{d}.$$

Quando entra nel condensatore, l'elettrone è quindi soggetto a una forza F verticale e costante, diretta verso l'alto. Indicando con e il valore assoluto della carica dell'elettrone, la forza risulta:

$$F = eE = \frac{eV}{d}.$$

Indicando con m la massa dell'elettrone, questa forza produce un'accelerazione:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eV}{md} = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})(15 \text{ V})}{(9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m})} = 8,8 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2.$$

Il moto dell'elettrone è dato dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x con velocità v_0 e di un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse y con accelerazione a . Il tempo impiegato dall'elettrone per attraversare la lunghezza l del condensatore è:

$$t_1 = \frac{l}{v_0} = \frac{4,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Lo spazio nel frattempo percorso lungo la direzione verticale è:

$$y_1 = \frac{1}{2} at_1^2 = \frac{1}{2} (8,8 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2) (1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s})^2 = 0,011 \text{ m}.$$

La componente verticale della velocità con cui l'elettrone esce dal condensatore, e che rimane costante durante il resto del moto, è:

$$v_1 = at_1 = (8,8 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2) (1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}) = 1,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Ne segue che per avere una deflessione finale $y_2 = 20 \text{ cm}$ deve trascorrere un intervallo di tempo:

$$t_2 = \frac{y_2 - y_1}{v_1} = \frac{0,20 \text{ m} - 0,011 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$$

Nel frattempo, lo spazio percorso nel moto rettilineo orizzontale è:

$$l_2 = v_0 t_2 = (2,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}) (1,3 \cdot 10^{-7} \text{ s}) = 33 \text{ cm}.$$

Lo schermo deve pertanto essere posto a una distanza:

$$L = l + l_2 = 4,0 \text{ cm} + 33 \text{ cm} = 37 \text{ cm}.$$

7 Il protone e la particella α si respingono a vicenda poiché sono entrambe cariche positivamente. Dato che la forza elettrica è conservativa, l'energia meccanica del sistema delle due particelle si conserva. Assumiamo che il protone venga sparato esattamente lungo la direzione congiungente il protone con la particella α . Mentre il protone si avvicina alla particella α esso diminuisce la propria velocità. Viceversa, la particella α aumenta la propria velocità lungo la stessa direzione e lo stesso verso del moto del protone. Tuttavia, la velocità del centro di massa si mantiene costante dato che non esistono forze esterne agenti sulle due particelle. La velocità v_{cm} del centro di massa può essere determinata nella situazione iniziale:

$$v_{\text{cm}} = \frac{m_p v_0 + m_\alpha \cdot 0}{m_p + m_\alpha} = \frac{m_p v_0}{m_p + m_\alpha}.$$

Fintanto che la particella α vede il protone avvicinarsi a essa, la distanza tra le due particelle diminuisce. La distanza di massimo avvicinamento r si verifica perciò quando il protone annulla la sua velocità rispetto alla particella α . In questa situazione, le due particelle si muovono alla stessa velocità v rispetto al sistema di riferimento esterno. Di conseguenza, tale velocità deve coincidere con la velocità del centro di massa:

$$v = \frac{m_p v_0}{m_p + m_\alpha}.$$

Per determinare la distanza r di massimo avvicinamento si può applicare la conservazione dell'energia meccanica del sistema delle due particelle. L'energia meccanica iniziale deve essere uguale a quella finale:

$$\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} + \frac{1}{2} m_p v_0^2 = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v^2$$

in cui r_0 è la distanza iniziale. La distanza di massimo avvicinamento risulta:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{\pi\epsilon_0}{e^2} [m_p v_0^2 - (m_p + m_\alpha) v^2]} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{\pi\epsilon_0}{e^2} \left[m_p v_0^2 - (m_p + m_\alpha) \frac{m_p^2 v_0^2}{(m_p + m_\alpha)^2} \right]} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{\pi\epsilon_0 m_p m_\alpha v_0^2}{e^2 (m_p + m_\alpha)}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{10 \cdot 10^{-2} \text{ m}} + \frac{\pi(8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(6,645 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(5,00 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2}{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 (1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 6,645 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}} = \\ &= 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}. \end{aligned}$$

8 Per annullare la forza $\vec{F}_B = -e\vec{v}_0 \times \vec{B}$ esercitata sull'elettrone dal campo magnetico, il campo elettrico \vec{E} deve generare una forza $\vec{F}_E = -e\vec{E}$ di uguale direzione e modulo, ma di verso opposto:

$$-e\vec{E} = -(-e\vec{v}_0 \times \vec{B})$$

per cui:

$$\vec{E} = -\vec{v}_0 \times \vec{B}.$$

Indicato con θ l'angolo di 10° formato da \vec{v}_0 e \vec{B} , per avere l'uguaglianza dei moduli nella relazione precedente deve risultare:

$$E = v_0 B \sin \theta = (1,5 \cdot 10^4 \text{ m/s})(0,20 \text{ T}) \sin 10^\circ \simeq 521 \text{ V/m}.$$

La direzione del campo elettrico deve essere perpendicolare al piano formato dal vettore velocità \vec{v}_0 dell'elettrone e dal vettore campo magnetico \vec{B} . Il verso deve essere opposto a quello calcolato con la regola della mano destra applicata ai vettori \vec{v}_0 e \vec{B} . Con riferimento alla figura qui a fianco, il campo elettrico risulta perpendicolare e uscente dal foglio.

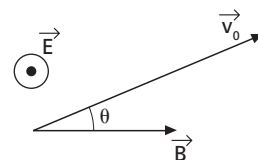


Figura 14

A. S. 2018-2019

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA 1

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a . Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.

- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente \vec{B} , viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\varepsilon(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\varepsilon$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx . Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\varepsilon}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = \frac{9}{2}$ e $k = 1$, calcolare l'energia ε assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

PROBLEMA 2

Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B, posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B.

- Determinare, in un punto C della retta r , l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 , al variare di C su r . Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB. Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x .
- Fissati i parametri reali positivi h e k , studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f .

Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty]$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

QUESTIONARIO

- 1** Fissati i numeri reali positivi a e b , con $a \geq b$, provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x (x^a + x^b) = a.$$

- 2** È assegnata la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

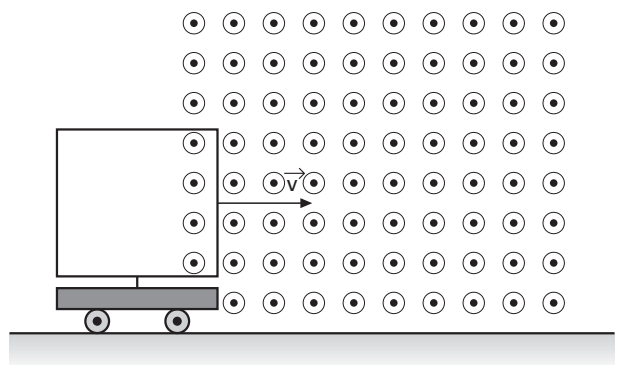
$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt.$$

Studiare il segno della funzione f e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx.$$

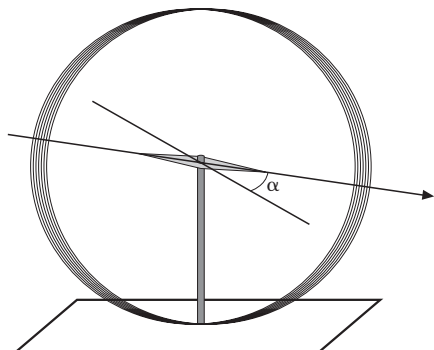
- 3** Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.
- 4** Considerati i punti $A(2; 3; 6)$, $B(6; 2; -3)$, $C(3; -6; 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA , OB , OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.
- 5** Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?
- 6** Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità $v = 0,90 c$. Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni $a = 40$ cm, $b = 50$ cm e $h = 20$ cm, con il lato b disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se l'astronauta lancia la scatola con una velocità $v_s = 0,50 c$ nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?

- 7** Una bobina è costituita da N spire quadrate di lato l , ha una resistenza elettrica R ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante \vec{v} ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico \vec{B} , uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se il carrello viene lanciato con velocità \vec{v} verso la stessa regione?



■ Figura 1

- 8** Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio $R = 15$ cm. Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a R , al centro della bobina, come in figura.



■ Figura 2

Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo α . Spiegare la causa di questa deviazione.

In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di α e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione α	10°	20°	30°	40°	50°
Intensità di corrente	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

Costanti fisiche		
carica elementare	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
massa del protone	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A ²
velocità della luce nel vuoto	c	$2,998 \cdot 10^8$ m/s
elettronvolt	eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$ J

PROBLEMA 1

- La funzione $f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $x \geq 0$, l'espressione $\frac{9}{2}(1 + xe^{a-x})$ è sempre positiva e quindi lo è anche la funzione $f_a(x)$, indipendentemente dal valore del parametro reale a .

Per $x < 0$, il segno dell'espressione $\frac{9a}{4(x-1)^4}$ dipende invece dal segno del parametro reale a , poiché il denominatore è sempre positivo. In particolare, per $x < 0$:

- $f_a(x)$ è positiva $\forall a > 0$;
- $f_a(x)$ è nulla per $a = 0$;
- $f_a(x)$ è negativa $\forall a < 0$.

Quindi:

- se $a > 0$, $f_a(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$;
- se $a = 0$, $f_a(x) = 0$ per $x < 0$ e $f_a(x) > 0$ per $x \geq 0$;
- se $a < 0$, $f_a(x) < 0$ per $x < 0$ e $f_a(x) > 0$ per $x \geq 0$.

La funzione $f_a(x)$ è continua e infinitamente derivabile per $x \neq 0$. Studiamo la continuità in $x = 0$ calcolando i valori dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) = \frac{9}{2} = f_a(0); \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9a}{4(x-1)^4} = \frac{9a}{4}.$$

Affinché $f_a(x)$ sia continua anche in $x = 0$ deve risultare:

$$\frac{9a}{4} = \frac{9}{2} \rightarrow a = 2.$$

Se $a \neq 2$, la funzione presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità di prima specie.

Per determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione, calcoliamo la sua derivata prima:

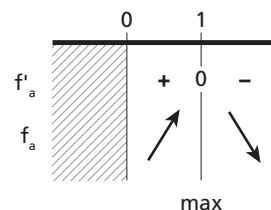
$$f'_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1-x)e^{a-x} & \text{per } x > 0 \\ -\frac{9a}{(x-1)^5} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

Per $x > 0$, la derivata $f'_a(x)$ si annulla per $x = 1$ e il suo segno è positivo per $0 < x < 1$ e negativo per $x > 1$, per cui in corrispondenza di $x = 1$ esiste un punto di massimo relativo di coordinate $M(1; \frac{9}{2}(1 + e^{a-1}))$.

Il punto M risulta anche un punto di massimo assoluto per la funzione $f_a(x)$ in $[0; +\infty[$. Per verificare che M è un punto di massimo assoluto su tutto \mathbb{R} dobbiamo valutare cosa succede per valori negativi di x .

Per $x < 0$, la derivata $f'_a(x)$ non si annulla mai e il suo segno dipende dal parametro a .

- Se $a > 0$, $f'_a(x)$ è positiva, quindi $f_a(x)$ è strettamente crescente e assume valori inferiori a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_a(x) = \frac{9a}{4}$. Per dimostrare che M è un massimo assoluto, basta verificare che $\frac{9a}{4} < \frac{9}{2}(1 + e^{a-1})$, cioè che $\frac{a}{2} - 1 < e^{a-1}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.



■ Figura 3

Tale disequazione si può risolvere graficamente, rappresentando le funzioni di equazioni: $y = \frac{a}{2} - 1$ e $y = e^{a-1}$ e confrontando i due grafici.

Come si deduce dal grafico a lato, la disequazione è soddisfatta per ogni $a \in \mathbb{R}$ e quindi in particolare per $a > 0$, che è il caso che stiamo esaminando.

- Se $a = 0$, $f_a(x)$ è costantemente nulla per cui il punto M , di ordinata positiva, è un punto di massimo assoluto per $f_a(x)$.
- Se $a < 0$, $f_a(x)$ è negativa per cui il punto M , di ordinata positiva, è un punto di massimo assoluto per $f_a(x)$.

- La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9}{2(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ottenuta per $a = 2$ è continua anche in $x = 0$, come verificato al punto precedente.

Per verificare se è anche derivabile in $x = 0$, consideriamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1-x)e^{2-x} & \text{per } x > 0 \\ -\frac{18}{(x-1)^5} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Poiché i valori dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{2}(1-x)e^{2-x} = \frac{9}{2}e^2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{18}{(x-1)^5} = 18$$

sono finiti e diversi, la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso.

Studiamo l'andamento di $f(x)$.

Alcune caratteristiche le abbiamo già determinate al punto precedente.

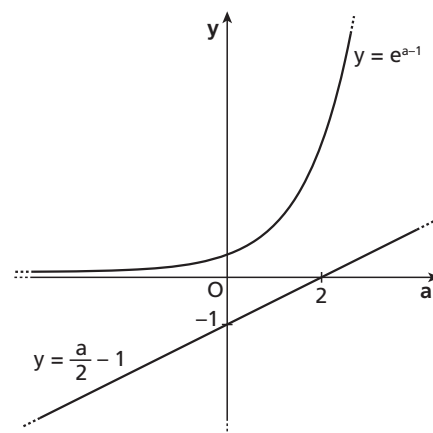
- La funzione $f(x)$ esiste ed è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$ e interseca l'asse y nel punto $A(0; \frac{9}{2})$.
- La funzione $f(x)$ è sempre positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x}) = \frac{9}{2}$, per cui esiste un asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{9}{2}$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{2(x-1)^4} = 0, \text{ per cui esiste un asintoto orizzontale sinistro di equazione } y = 0.$$

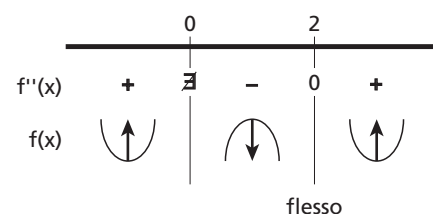
- Dal segno della derivata prima abbiamo ricavato che la funzione è crescente per $x < 1$ e decrescente per $x > 1$ e presenta un punto di massimo assoluto in $M(1; \frac{9}{2}(1+e))$.
- Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile e presenta un punto angoloso.
- Per determinare gli eventuali punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(x-2)e^{2-x} & \text{per } x > 0 \\ \frac{90}{(x-1)^6} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

La funzione $f''(x)$ è positiva per $x < 0 \vee x > 2$, negativa per $0 < x < 2$ e si annulla per $x = 2$. In corrispondenza di questa ascissa è presente un punto di flesso di coordinate $F(2; \frac{27}{2})$ per la funzione $f(x)$.



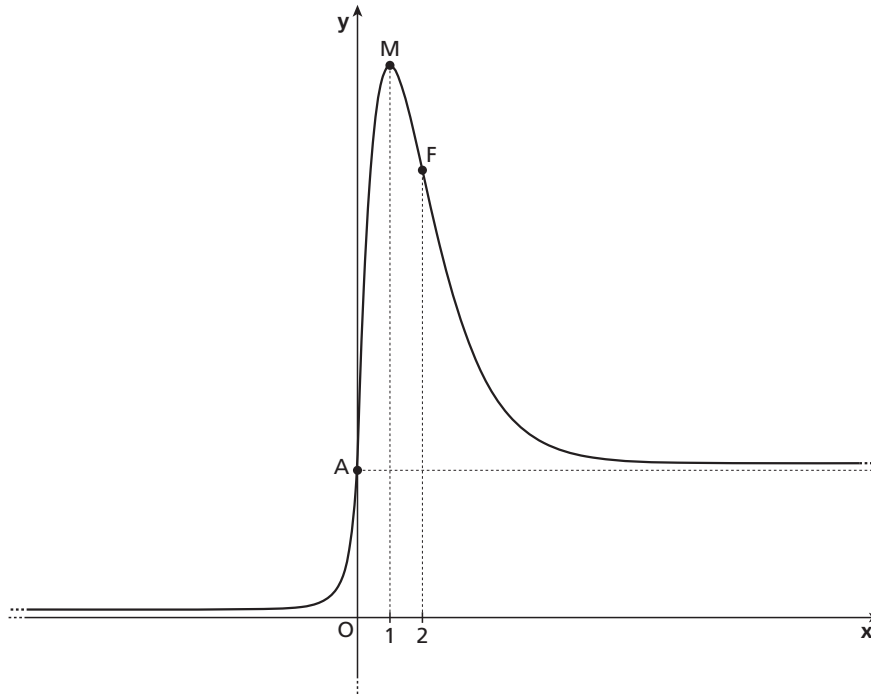
■ Figura 4



■ Figura 5

In $x = 0$ la derivata seconda non è definita, per cui non ci sono altri punti di flesso.

Si ricava quindi il seguente grafico della funzione $y = f(x)$.



■ Figura 6

- Per calcolare l'ampiezza in gradi dell'angolo ottuso formato dalle semitangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità $x = 0$, ricordiamo che abbiamo già calcolato i valori della derivata destra e sinistra:

$$f'_+(0) = \frac{9}{2}e^2 \text{ e } f'_-(0) = 18.$$

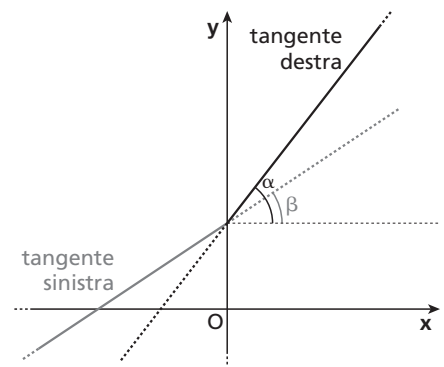
Indicati con α e β gli angoli che le due semirette tangenti, rispettivamente destra e sinistra, formano con il semiasse positivo delle ascisse, si ha $\tan \alpha = \frac{9}{2}e^2 \simeq 33$ e $\tan \beta = 18$.

Disegniamo le due rette tangenti, senza preoccuparci delle unità di misura sugli assi ma solo della posizione reciproca delle due rette.

Applichiamo la formula di sottrazione della tangente e troviamo:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{9}{2}e^2 - 18}{1 + 81e^2} \text{ da cui}$$

$$\alpha - \beta = \arctan \frac{\frac{9}{2}e^2 - 18}{1 + 81e^2} \simeq 1,5^\circ.$$



■ Figura 7

L'angolo richiesto è il supplementare di quello ricavato e vale circa $178,5^\circ$.

Esaminiamo ora la relazione tra le funzioni $g(x)$ e $f(x)$.

Per $x \geq 0$ è definita la funzione $g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$. Calcoliamo $g(3 - x)$ sostituendo i valori: $g(3 - x) = h[1 + (3 - k(3 - x))e^{k(3-x)-1}] = h[1 + (3 - 3k + kx)e^{3k-kx-1}] = h[1 + (3 - 3k + kx)e^{3k-kx-1}]$.

Affinché risulti $g(3-x) = f(x)$ per ogni $x \geq 0$ occorre che sia $3k - kx - 1 = 2 - x$ per ogni x positivo, da cui $k = 1$, e $h = \frac{9}{2}$.

- Ogni protone possiede un'energia cinetica $K = 42 \text{ MeV} = 42 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 6,728 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ e una massa $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; se trascuriamo gli effetti relativistici, possiamo determinare la velocità posseduta da ogni protone con la formula:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ da cui } v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,728 \cdot 10^{-12} \text{ J}}{1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \simeq 8,968 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

All'interno del campo magnetico, ortogonale alla loro traiettoria, i protoni avvertono la forza di Lorentz il cui modulo è $F_L = qvB$, dove q è la carica del protone che è quella elementare e vale $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, v è la velocità del protone e B è l'intensità del campo magnetico; tale forza agisce da forza centripeta, per cui i protoni si muovono su una traiettoria circolare.

Per calcolare il raggio r di curvatura della traiettoria circolare descritta, occorre uguagliare il modulo della forza di Lorentz con quello della forza centripeta:

$$qvB = m \frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 8,968 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,24 \text{ T}} \simeq 3,902 \text{ m.}$$

- La funzione $\varepsilon(x)$ rappresenta l'energia del protone dopo x cm di cammino nell'acqua, quindi l'energia assorbita dall'acqua nei primi x cm di cammino del protone è rappresentata dalla funzione $\varepsilon_a(x) = \varepsilon(0) - \varepsilon(x)$. Il problema propone la relazione $y = -\frac{d\varepsilon}{dx}$, dove $-d\varepsilon$ è l'energia assorbita dall'acqua nel tratto dx (in cm) e $y = g(x) = \frac{9}{2}[1 + (3-x)e^{x-1}]$.

Per calcolare l'energia assorbita dall'acqua nei primi 3 cm di cammino del protone, occorre risolvere l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$g(x) = -\frac{d\varepsilon}{dx} \rightarrow -d\varepsilon = g(x)dx$$

e integrare in x sull'intervallo da 0 cm a 3 cm:

$$\int_0^3 \frac{9}{2}[1 + (3-x)e^{x-1}]dx = \int_0^3 \frac{9}{2}dx + \int_0^3 \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1}dx.$$

Il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1}dx = \frac{9}{2} \int (3-x)e^{x-1}dx$$

può essere effettuato per parti:

$$\frac{9}{2} \int \underbrace{(3-x)}_{\text{fattore finito}} \underbrace{e^{x-1}}_{\text{fattore differenziale}} dx = \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1} - \frac{9}{2} \int (-1)e^{x-1}dx = \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1} + \frac{9}{2}e^{x-1} + c.$$

L'energia richiesta vale quindi:

$$\int_0^3 \frac{9}{2}dx + \int_0^3 \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1}dx = \left[\frac{9}{2}x \right]_0^3 + \left[\frac{9}{2}(3-x)e^{x-1} + \frac{9}{2}e^{x-1} \right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{2}e^{-1} - \frac{9}{2}e^{-1} + \frac{9}{2}e^2 = \frac{27}{2} - 18e^{-1} + \frac{9}{2}e^2 \simeq 40,129 \text{ MeV.}$$

L'energia assorbita dall'acqua nei primi 3 cm di cammino del protone è 40,129 MeV.

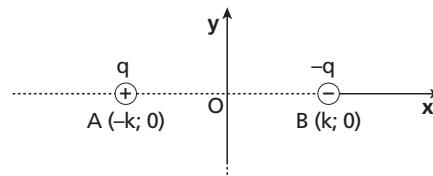
PROBLEMA 2

- Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy in modo che il punto medio tra A e B sia l'origine $O(0; 0)$, la retta r passante per A e B coincida con l'asse x e l'asse del segmento AB coincida con l'asse y .

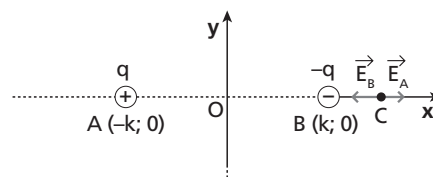
La carica positiva q è posta nel punto $A(-k; 0)$ e la carica negativa $-q$ nel punto $B(k; 0)$, con $k > 0$.

Un generico punto C sull'asse delle ascisse ha coordinate $C(x; 0)$; distinguiamo diversi casi per determinare il campo elettrico risultante in C .

- Se $x > k$, il vettore campo elettrico \vec{E}_C risultante in C è un vettore diretto nel verso negativo dell'asse x perché è la somma vettoriale tra il campo elettrico \vec{E}_B generato in C dalla carica $-q$ (nel verso negativo dell'asse x) e il campo elettrico \vec{E}_A generato in C dalla carica q (nel verso positivo dell'asse x) e meno intenso del precedente perché il punto A è più lontano dal punto C rispetto al punto B .



■ Figura 8



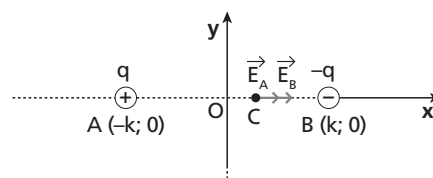
■ Figura 9

Indicata con K_0 la costante di Coulomb nel vuoto ($K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 8,9876 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$), il modulo del vettore campo elettrico in C vale:

$$E_C = K_0 \frac{q}{(x-k)^2} - K_0 \frac{q}{(x+k)^2} = K_0 q \left[\frac{1}{(x-k)^2} - \frac{1}{(x+k)^2} \right].$$

- Se $-k < x < k$, il vettore campo elettrico \vec{E}_C risultante in C è un vettore diretto nel verso positivo dell'asse x perché è la somma vettoriale tra il campo elettrico \vec{E}_B generato in C dalla carica $-q$ e il campo elettrico \vec{E}_A generato in C dalla carica q (entrambi nel verso positivo dell'asse x).

In tal caso il modulo del vettore campo elettrico in C vale:

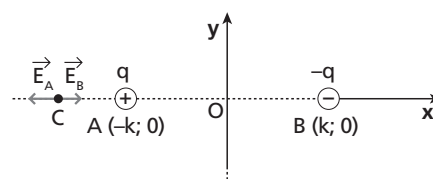


■ Figura 10

$$E_C = K_0 \frac{q}{(x-k)^2} + K_0 \frac{q}{(x+k)^2} = K_0 q \left[\frac{1}{(x-k)^2} + \frac{1}{(x+k)^2} \right].$$

- Se $x < -k$, il vettore campo elettrico \vec{E}_C risultante in C è un vettore diretto nel verso negativo dell'asse x perché è la somma vettoriale tra il campo elettrico \vec{E}_B generato in C dalla carica $-q$ (nel verso positivo dell'asse x) e il campo elettrico \vec{E}_A generato in C dalla carica q (nel verso negativo dell'asse x) ma più intenso del precedente perché il punto C è più vicino al punto A rispetto al punto B .

In tal caso, il modulo del vettore campo elettrico in C vale:



■ Figura 11

$$E_C = K_0 \frac{q}{(-x+k)^2} - K_0 \frac{q}{(-x-k)^2} = K_0 q \left[\frac{1}{(x-k)^2} - \frac{1}{(x+k)^2} \right].$$

- Se $x = k \vee x = -k$, cioè se il punto C coincidesse con il punto A oppure con il punto B , il campo elettrico non sarebbe definito; per valori di $x \rightarrow \pm k$ il modulo del campo elettrico tende a $+\infty$.

Dall'analisi dei casi precedenti si può dedurre anche che non esistono punti sulla retta r in cui il campo elettrico si annulla; infatti, in tal caso, in un punto C della retta AB dovrebbero esistere due campi elettrici opposti generati dalle cariche q e $-q$. Tale situazione non si può verificare in un punto compreso tra A e B perché in tale situazione i campi elettrici generati in C hanno verso concorde e non si possono annullare. Ma non si può verificare neppure nei punti esterni al segmento AB perché, anche se di verso opposto, i due vettori campi elettrici generati in C dalle due cariche hanno moduli diversi avendo C distanze diverse da A e B .

- Sia $P(0; y)$ un punto posto sull'asse delle ordinate, coincidente nel riferimento cartesiano da noi scelto con l'asse del segmento AB . Rappresentiamo graficamente i vettori campo elettrico \vec{E}_A ed \vec{E}_B , generati rispettivamente nel punto P dalle cariche elettriche q e $-q$, e il loro vettore risultante \vec{E}_P .

Per simmetria, essendo P equidistante sia da A sia da B , i vettori \vec{E}_A ed \vec{E}_B hanno lo stesso modulo. Scomponendo tali vettori in componenti cartesiane, le componenti verticali sono opposte per cui si annullano. Il vettore risultante \vec{E}_P è quindi un vettore orizzontale, parallelo all'asse x , avente il modulo doppio rispetto a quello della componente orizzontale del vettore \vec{E}_A (oppure \vec{E}_B).

Il modulo del vettore \vec{E}_A vale:

$$E_A = K_0 \frac{q}{AP^2} = \frac{K_0 q}{y^2 + k^2}.$$

Considerato l'angolo $\alpha = \widehat{PAB}$, la componente orizzontale $E_{A,x}$ del vettore \vec{E}_A vale $E_{A,x} = E_A \cos \alpha$. Considerato poi il triangolo rettangolo AOP , per la definizione di coseno di un angolo si ha:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} = \frac{k}{\sqrt{y^2 + k^2}},$$

per cui:

$$E_{A,x} = \frac{K_0 q}{y^2 + k^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{y^2 + k^2}} = \frac{K_0 k q}{\sqrt{(y^2 + k^2)^3}}$$

e quindi:

$$E_P = 2 \cdot E_{A,x} = \frac{2K_0 k q}{\sqrt{(y^2 + k^2)^3}}.$$

Sostituendo la variabile x alla y , così come richiesto nel problema, si ottiene che l'intensità del campo elettrico in P in funzione della distanza x dal punto medio di AB vale:

$$E_P = \frac{2K_0 k q}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}} = \frac{2K_0 k q}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcolando il limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2K_0 k q}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}} = 0^+$, si dimostra formalmente anche che l'intensità del campo elettrico generato nel punto P dalle due cariche q e $-q$ decresce quando P si allontana dal punto medio di AB .

- Studiamo il grafico della funzione $f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = h(x^2 + k^2)^{-\frac{3}{2}}$, che ha dominio \mathbb{R} per ogni h, k

reali positivi, è continua e infinitamente derivabile.

Poiché $f(-x) = \frac{h}{[(-x)^2 + k^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = f(x)$, la funzione $f(x)$ è una funzione pari e il suo grafico

è simmetrico rispetto all'asse y .

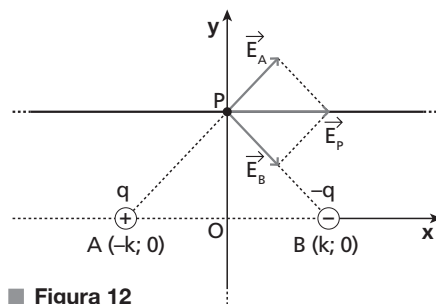
La funzione è sempre positiva e il suo grafico non interseca mai l'asse x .

Interseca invece l'asse y nel punto di coordinate $(0; \frac{h}{k^3})$.

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}} = 0^+,$$

per cui l'asse x di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione.



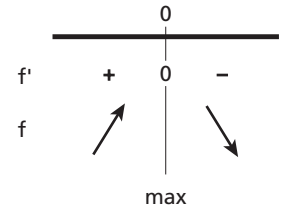
■ Figura 12

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}h(x^2 + k^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = \frac{-3hx}{(x^2 + k^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Il suo segno è positivo per $x < 0$, negativo per $x > 0$ e si annulla per $x = 0$, in corrispondenza del quale vi è un punto di massimo relativo assoluto di coordinate $M(0; \frac{h}{k^3})$.

■ Figura 13



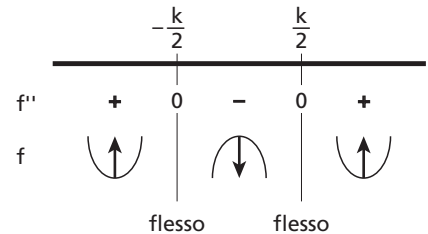
Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$$f''(x) = -3h(x^2 + k^2)^{-\frac{5}{2}} - 3hx(-\frac{5}{2})(x^2 + k^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2x = \frac{3h(4x^2 - k^2)}{(x^2 + k^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

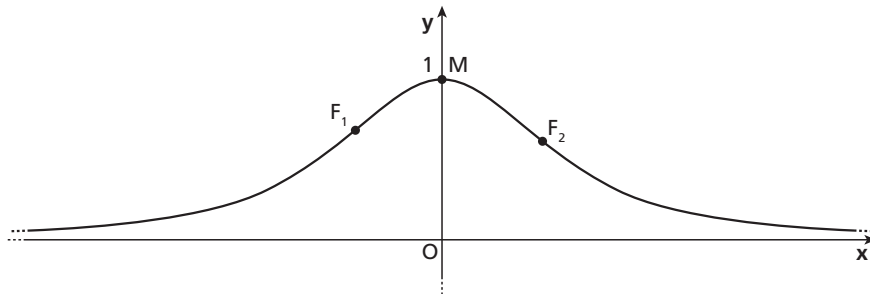
Il suo segno è positivo per $x < -\frac{k}{2} \vee x > \frac{k}{2}$, negativo per $-\frac{k}{2} < x < \frac{k}{2}$ e si annulla per $x = \pm \frac{k}{2}$, in corrispondenza dei quali vi sono due punti di flesso di coordinate:

$$F_1(-\frac{k}{2}; \frac{8\sqrt{5}h}{25k^3}) \text{ e } F_2(\frac{k}{2}; \frac{8\sqrt{5}h}{25k^3}).$$

■ Figura 14



La funzione $y = f(x)$ ha dunque un andamento «a campana»; in figura rappresentiamo il suo grafico relativo al caso $h = k = 1$.



■ Figura 15

- Affinché la funzione $g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$ sia una primitiva di $f(x)$ deve risultare $g'(x) = f(x)$.

Calcoliamo la derivata prima di $g(x)$:

$$g'(x) = b(x^2 + k^2)^{-a} + (-a)(x^2 + k^2)^{-a-1} \cdot 2x \cdot bx = \frac{b(x^2 + k^2) - 2abx^2}{(x^2 + k^2)^{a+1}} = \frac{b(1 - 2a)x^2 + bk^2}{(x^2 + k^2)^{a+1}}.$$

Affinché $g'(x)$ coincida con $f(x)$ deve quindi risultare:

$$a + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } bk^2 = h \rightarrow b = \frac{h}{k^2}.$$

Posto ora $h = k^2$, la funzione $f(x)$ diventa:

$$f(x) = \frac{k^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

che ha come primitiva la funzione:

$$g(x) = \frac{x}{(x^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

La funzione $f(x)$, che è sempre positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, rappresenta la densità di probabilità di una varia-

bile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty[$ se l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ vale 1.
Calcoliamo quindi l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{k^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{k^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + k^2}} \right]_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + k^2}} - 0 \right] =$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{a}\right)^2}} = 1.$$

Quindi è vero che la funzione $f(x)$ rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty[$.

Per calcolare la media della variabile aleatoria occorre calcolare il valore dell'integrale

$$M(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x) dx,$$

cioè:

$$M(X) = \int_0^{+\infty} \frac{xk^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{xk^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{k^2}{2} \int_0^a \frac{2x}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-k^2}{\sqrt{x^2 + k^2}} \right]_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-k^2}{\sqrt{a^2 + k^2}} + k \right] = k.$$

La media della variabile aleatoria vale quindi k .

Per calcolare la mediana della variabile aleatoria occorre determinare il valore m (positivo) tale che l'integrale $\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$, cioè la metà del valore esteso a tutto l'intervallo di definizione $[0; +\infty[$.

Poiché risulta: $\int_0^m f(x)dx = \int_0^m \frac{k^2}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + k^2}} \right]_0^m = \frac{m}{\sqrt{m^2 + k^2}} - 0 = \frac{m}{\sqrt{m^2 + k^2}}$, risolviamo la seguente equazione nell'incognita m elevando al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 + k^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{m^2}{m^2 + k^2} = \frac{1}{4} \rightarrow 4m^2 = m^2 + k^2 \rightarrow m^2 = \frac{k^2}{3} \rightarrow m = \frac{k}{\sqrt{3}} = \frac{k}{3}\sqrt{3}.$$

La mediana della variabile aleatoria vale quindi $\frac{k}{3}\sqrt{3}$.

QUESTIONARIO

1 La funzione $f(x) = \log_x(x^a + x^b)$ è definita per $x > 0 \wedge x \neq 1$.

All'interno dell'argomento del logaritmo si può raccogliere a fattor comune il monomio x^a ; usando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$f(x) = \log_x(x^a + x^b) = \log_x \left[x^a \left(1 + \frac{x^b}{x^a} \right) \right] = \log_x x^a + \log_x \left(1 + \frac{x^b}{x^a} \right) = a \log_x x + \log_x (1 + x^{b-a}) =$$

$$a + \log_x (1 + x^{b-a}).$$

- Se $a > b$ e $x \rightarrow +\infty$, il termine x^{b-a} tende a 0 per cui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(x^a + x^b) = a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(1 + x^{b-a}) = a + 0 = a.$$

- Se $a = b$, il termine x^{b-a} vale costantemente 1 per cui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(x^a + x^b) = a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(1 + x^{b-a}) = a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x 2.$$

Usando la formula del cambiamento di base di un logaritmo otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{\ln x} = 0$$

per cui anche in questo caso si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x (x^a + x^b) = a.$$

- 2** La funzione integranda $y = e^{x^2}$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$, è continua, infinitamente derivabile ed è sempre positiva, poiché la funzione esponenziale è sempre positiva.

Ricordando che il significato geometrico di integrale definito è la misura dell'area del trapezoide corrispondente, studiamo il segno della funzione integrale $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$:

- se $x = 1$, $f(1) = \int_1^1 e^{t^2} dt = 0$;
- se $x > 1$, $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt > 0$;
- se $x < 1$, $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt = -\int_x^1 e^{t^2} dt < 0$.

Per studiare la crescita di $f(x)$ calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno. Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale si trova $f'(x) = e^{x^2}$ che, come abbiamo analizzato in precedenza, è una funzione sempre positiva; pertanto la funzione $f(x)$ è crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ora la derivata seconda di $f(x)$: $f''(x) = 2xe^{x^2}$.

L'integrale richiesto vale:

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = \int_0^1 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

In alternativa, per il calcolo dell'integrale si può usare una delle regole di integrazione per la funzione composta, evitando il calcolo di $f''(x)$:

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = [\ln |f'(x)|]_0^1 = [\ln e^{x^2}]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

- 3** Per ipotesi $ABCD$ è un rombo e i punti E, F, G, H sono rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA .

Quindi i segmenti $AE, EB, BF, FC, CG, GC, GD, DH$ e HA sono tutti congruenti tra loro perché sono la metà dei lati del rombo, congruenti per ipotesi.

I triangoli AEH e CGF sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli perché hanno $HA \cong GC$, $AE \cong CF$ e $\widehat{HAE} \cong \widehat{GCF}$ in quanto angoli opposti di un rombo; in particolare si ha $HE \cong GF$.

Analogamente i triangoli EBF e HGD sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli perché hanno $EB \cong HD$, $BF \cong DG$ ed $\widehat{EBF} \cong \widehat{HDG}$ in quanto angoli opposti di un rombo; in particolare si ha $EF \cong HG$.

Il quadrilatero $HEFG$ è quindi un parallelogramma avendo i lati opposti congruenti.

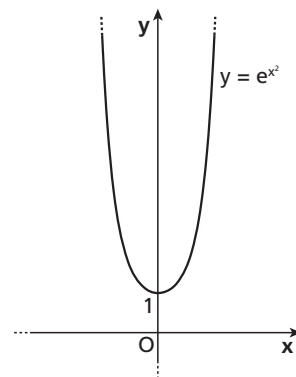
I triangoli HGF ed EFG sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli perché hanno:

- GF in comune;
- $EF \cong HG$ per la precedente dimostrazione;
- $\widehat{HGF} \cong \widehat{GFE}$ perché differenza di angoli congruenti, infatti:

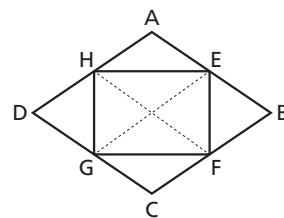
$$\widehat{HGF} \cong 180^\circ - (\widehat{DGH} + \widehat{CGF}) \text{ e } \widehat{GFE} \cong 180^\circ - (\widehat{EFB} + \widehat{GFC}).$$

In particolare si ha $HF \cong GE$.

Il quadrilatero $HEFG$ è quindi un rettangolo, essendo un parallelogramma con le diagonali congruenti.



■ Figura 16



■ Figura 17

Possiamo dimostrare che $HEFG$ è un rettangolo anche in un altro modo. Tracciamo la diagonale DB del rombo e consideriamo i triangoli ADB e DCB . Per il teorema del segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo abbiamo:

- $HE \parallel DB$ e $HE \cong \frac{1}{2}DB$;
- $GF \parallel DB$ e $GF \cong \frac{1}{2}DB$.

Quindi $HE \parallel GF$ e $HE \cong GF$. Il quadrilatero $HEFG$ è allora un parallelogramma, perché ha una coppia di lati opposti paralleli e congruenti. In particolare, i lati HE e GF sono paralleli alla diagonale DB del rombo. Analogamente si dimostra che i lati congruenti e paralleli HG ed EF sono entrambi paralleli alla diagonale AC del rombo.

Dimostriamo ora che $HEFG$ è un rettangolo. Sappiamo che:

- $DB \perp AC$ per ipotesi, perché diagonali di un rombo;
- $HE \parallel GF \parallel DB$ per precedente dimostrazione;
- $HG \parallel EF \parallel AC$ per precedente dimostrazione.

Concludiamo che $HE \perp HG$, perché segmenti paralleli ai segmenti perpendicolari DB e AC . Quindi l'angolo \widehat{GHE} è retto e il parallelogramma $HEFG$ è un rettangolo.

4 I segmenti OA , OB e OC sono gli spigoli di un cubo se sono tutti di ugual lunghezza e se sono a due a due perpendicolari.

Calcoliamo le lunghezze:

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\overline{OB} = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7.$$

Per verificare la perpendicolarità è sufficiente provare che sono nulli i prodotti scalari tra le coppie dei rispettivi vettori, le cui componenti coincidono con le coordinate dei punti A , B e C avendo come primo estremo l'origine $O(0; 0; 0)$: $\overrightarrow{OA} = (2; 3; 6)$, $\overrightarrow{OB} = (6; 2; -3)$ e $\overrightarrow{OC} = (3; -6; 2)$.

Calcoliamo dunque i prodotti scalari:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 12 + 6 - 18 = 0;$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 2 = 6 - 18 + 12 = 0;$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot 2 = 18 - 12 - 6 = 0.$$

Quindi i segmenti OA , OB e OC sono gli spigoli di un cubo.

L'equazione di una superficie sferica è $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ e imponiamo il passaggio per i punti A , B , C e O :

$$\begin{cases} 4 + 9 + 36 + 2a + 3b + 6c + d = 0 \\ 36 + 4 + 9 + 6a + 2b - 3c + d = 0 \\ 9 + 36 + 4 + 3a - 6b + 2c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - b - 9c = 0 \\ 3a + 8b - 5c = 0 \\ 49 + 3a - 6b + 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 4a - 9c \\ 5a - 11c = 0 \\ 49 - 21a + 56c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -11 \\ b = 1 \\ c = -5 \\ d = 0 \end{cases}.$$

L'equazione della superficie sferica circoscritta al cubo è quindi $x^2 + y^2 + z^2 - 11x + y - 5z = 0$ che ha il centro nel punto $D\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Determiniamo anche il raggio r della sfera calcolando:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2 - d} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{121 + 1 + 25}{4}} = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{7}{2}\sqrt{3}.$$

In alternativa, osserviamo che il centro della sfera circoscritta al cubo è il punto medio D della diagonale AE del cubo. D ha coordinate:

$$D\left(\frac{x_A + x_E}{2}; \frac{y_A + y_E}{2}; \frac{z_A + z_E}{2}\right) \rightarrow D\left(\frac{2 + x_E}{2}; \frac{3 + y_E}{2}; \frac{6 + z_E}{2}\right).$$

Per trovare le coordinate di E , calcoliamo il punto medio M della diagonale CB della base del cubo:

$$M\left(\frac{x_C + x_B}{2}; \frac{y_C + y_B}{2}; \frac{z_C + z_B}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right)$$

M è anche punto medio di OE , quindi:

$$-\frac{x_E}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow x_E = 9;$$

$$-\frac{y_E}{2} = -2 \rightarrow y_E = -4;$$

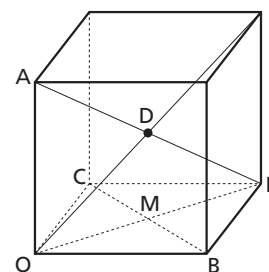
$$-\frac{z_E}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow z_E = -1.$$

E ha coordinate $(9; -4; -1)$. Sostituiamo nelle coordinate di D :

$$D\left(\frac{2+9}{2}; \frac{3-4}{2}; \frac{6-1}{2}\right) \rightarrow D\left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Determiniamo r calcolando $\frac{1}{2}\overline{AE}$:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(2-9)^2 + (3+4)^2 + (6+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49 + 49 + 49} = \frac{7}{2}\sqrt{3}.$$



■ Figura 18

5 Indichiamo con X la variabile casuale che rappresenta il massimo tra i due numeri usciti lanciando due dadi simultaneamente. Essa può assumere i valori: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Il seguente schema riporta, sulla prima colonna e sulla prima riga, le possibili uscite per ciascun dado e, nelle caselle interne, il massimo dei due numeri usciti per ogni possibile esito del lancio.

Dado 2 \ Dado 1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Le rispettive probabilità della variabile casuale X sono dunque quelle riportate nella seguente tabella.

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Il valore medio della variabile casuale X si ottiene calcolando:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47.$$

Tale valore rappresenta quello atteso calcolando la media dei numeri trascritti dopo aver ripetuto molte volte la procedura di lancio.

6 Per un osservatore sulla Terra lo spigolo di lunghezza b risulterà contratto, con lunghezza

$$b' = b\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

dal momento che è parallelo alla direzione del moto, mentre gli altri due spigoli, perpendicolari alla direzione del moto, hanno le stesse misure che hanno rispetto all'astronave. Pertanto il volume della scatola, per un osservatore sulla Terra, è:

$$V' = ab'h = (0,40 \text{ m})(0,50 \text{ m})\sqrt{1 - 0,81}(0,20 \text{ m}) = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

La velocità $v_{s,T}$ della scatola lanciata, rispetto all'osservatore sulla Terra, si ottiene dalla legge relativistica di composizione delle velocità:

$$v_{s,T} = \frac{v + v_s}{1 + \frac{vv_s}{c^2}} = \frac{(0,90c) + (0,50c)}{1 + \frac{(0,90c)(0,50c)}{c^2}} = \frac{1,4c}{1 + 0,45} \simeq 0,97c.$$

7 Mentre la bobina entra nella zona in cui è presente il campo magnetico, il flusso del campo magnetico $\Phi(\vec{B})$ attraverso la superficie che ha per contorno la bobina varia nel tempo. Per la legge di Faraday-Neumann, questo genera una forza elettromotrice indotta e, quindi, una corrente indotta. Il passaggio della corrente produce il riscaldamento della bobina per effetto Joule.

La bobina entra nella regione con il campo magnetico a velocità costante v al tempo iniziale $t_0 = 0$. L'area della superficie attraversata dalle linee di campo magnetico dipende dal tempo t trascorso secondo la legge

$$S = Nlvt$$

e quindi il flusso del campo magnetico attraverso la superficie è:

$$\Phi(\vec{B}) = BS = BNlvt.$$

Per la legge di Faraday-Neumann, il modulo della forza elettromotrice indotta è:

$$f_{em} = \frac{d}{dt}\Phi(\vec{B}) = \frac{d}{dt}(BNlvt) = BNlv.$$

La corrente indotta è

$$i = \frac{f_{em}}{R} = \frac{BNlv}{R}$$

e quindi la potenza dissipata è:

$$P = i^2 R = \frac{B^2 N^2 l^2 v^2}{R}.$$

Notiamo che la corrente fluisce in verso orario, per la legge di Lenz, in quanto il campo magnetico è uscente dal piano della figura. La corrente circola fino a quando la bobina non è entrata per intero nella regione con il campo magnetico. A quel punto, il flusso del campo magnetico attraverso la superficie che ha per contorno la bobina diventa costante e la forza elettromotrice indotta scompare. Durante il passaggio della corrente i 3 tratti della bobina immersi nel campo magnetico (parte dei due tratti orizzontali e il tratto verticale destro) subiscono una forza magnetica $\vec{F}_m = i\vec{a} \times \vec{B}$: in questa espressione \vec{a} è un vettore parallelo al filo con verso concorde alla corrente elettrica e il suo modulo a è la lunghezza del tratto in cui \vec{B} non è nullo.

In particolare, la forza magnetica sul tratto destro ha modulo:

$$F_{m,3} = NilB$$

ed è diretta verso sinistra e quindi il carrello subisce una decelerazione che ne riduce la velocità.

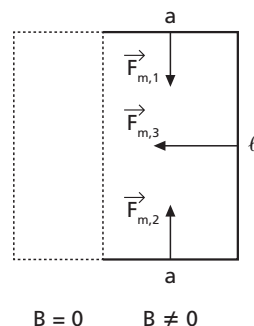


Figura 19

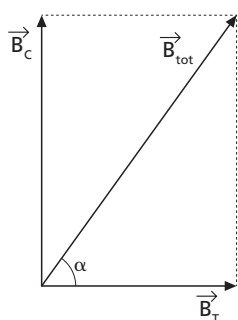
Se la velocità iniziale v è sufficientemente piccola, il carrello può arrestarsi prima di entrare completamente nella regione in cui esiste il campo magnetico.

Se il carrello viene lanciato con velocità \vec{v} , la forza magnetica $\vec{F}_{m,3}$ fa rallentare il carrello, quindi la corrente indotta nella bobina non sarà più costante, ma decrescente nel tempo; appena il carrello entra per intero nella regione in cui è presente il campo magnetico, la corrente cessa di esistere. L'energia cinetica persa dal carrellino è uguale, in modulo, all'energia dissipata per effetto Joule dalla bobina.

- 8** Quando nella bobina non circola corrente, l'ago magnetico è allineato con la componente orizzontale del campo magnetico terrestre, che indichiamo con \vec{B}_T . La corrente che circola nella bobina crea invece un campo magnetico \vec{B}_C di modulo

$$B_C = N \frac{\mu_0 i}{2R}$$

e perpendicolare al piano della bobina; l'ago si dispone nella direzione del campo magnetico totale \vec{B}_{tot} .



■ Figura 20

Dalle formule trigonometriche dei triangoli rettangoli otteniamo la relazione:

$$B_T = \frac{B_C}{\tan \alpha} = \frac{N \mu_0 i}{2R \tan \alpha} = \frac{130 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2)}{(0,30 \text{ m})} \cdot \frac{i}{\tan \alpha}.$$

Dai dati della tabella possiamo calcolare 5 valori per B_T :

α	10°	20°	30°	40°	50°
$i(\text{mA})$	11,4	23,3	36,8	52,4	73,9
$B_T (\cdot 10^{-5} \text{ T})$	3,52	3,49	3,47	3,40	3,38

I valori sono molto simili tra loro, con dispersione (differenza tra valore massimo e valore minimo) pari a $1,44 \cdot 10^{-6} \text{ T}$. La media dei 5 valori calcolati per la componente orizzontale del campo magnetico terrestre è:

$$B_{T, stima} = \frac{1}{5} [(3,52 \cdot 10^{-5} \text{ T}) + (3,49 \cdot 10^{-5} \text{ T}) + (3,47 \cdot 10^{-5} \text{ T}) + (3,40 \cdot 10^{-5} \text{ T}) + (3,38 \cdot 10^{-5} \text{ T})] = 3,45 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Dal momento che non abbiamo informazioni sulle incertezze delle misure fatte, usiamo la semidispersione $\delta B_T = 0,72 \cdot 10^{-7} \text{ T}$ come misura dell'incertezza: essa equivale a una incertezza percentuale del 2% circa. La stima del valore della componente orizzontale del campo magnetico e della sua incertezza è:

$$B_T = (3,45 \pm 0,07) \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$