TEACHING ENQUIRY
with MYSTERIES INCORPORATED

Introduzione al meccanismo di Brout-Englert-Higgs 2

Marco Giliberti

Università degli Studi di Milano

CERN Italian Teachers Program 6-11 September 2015

Co-funded by
the Seventh Framework Programme
of the European Union

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FP7-Science-in-Society-2012-1, Grant Agreement N. 321403

Simmetrie e teorie di *gauge*

conservazione della carica elettrica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Supponiamo che la carica non si conservi. Creiamo quindi una carica Q in un certo punto che ha potenziale scalare V. Per questo dovremo fare un lavoro W che, se la fisica è indipendente dal valore assoluto del potenziale, ma dipende solo dalle differenze di potenziale, non dipenderà dal valore V

Se ora la carica si muove fino al potenziale V’ ci sarà una variazione di energia Q(V-V’).

Supponiamo che adesso la carica venga distrutta, facendo un lavoro –W che, come prima, non dipenderà da V’

Otterremo allora un sistema uguale a quello iniziale con un guadagno di energia Q(V-V’)

Perciò se l’energia si conserva, ciò implica che non si può creare o distruggere una carica se la scala del potenziale si può scegliere a piacere

Cioè **se la scala del potenziale è arbitraria, la conservazione dell’energia implica la conservazione della carica** (Wigner 1945)

Simmetrie e teorie di *gauge*

conservazione della carica elettrica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Guardiamo se si può dire qualcosa di più
Partiamo dall'equazione di Schrödinger per una particella libera

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\left(-i\nabla\right)^2\psi$$

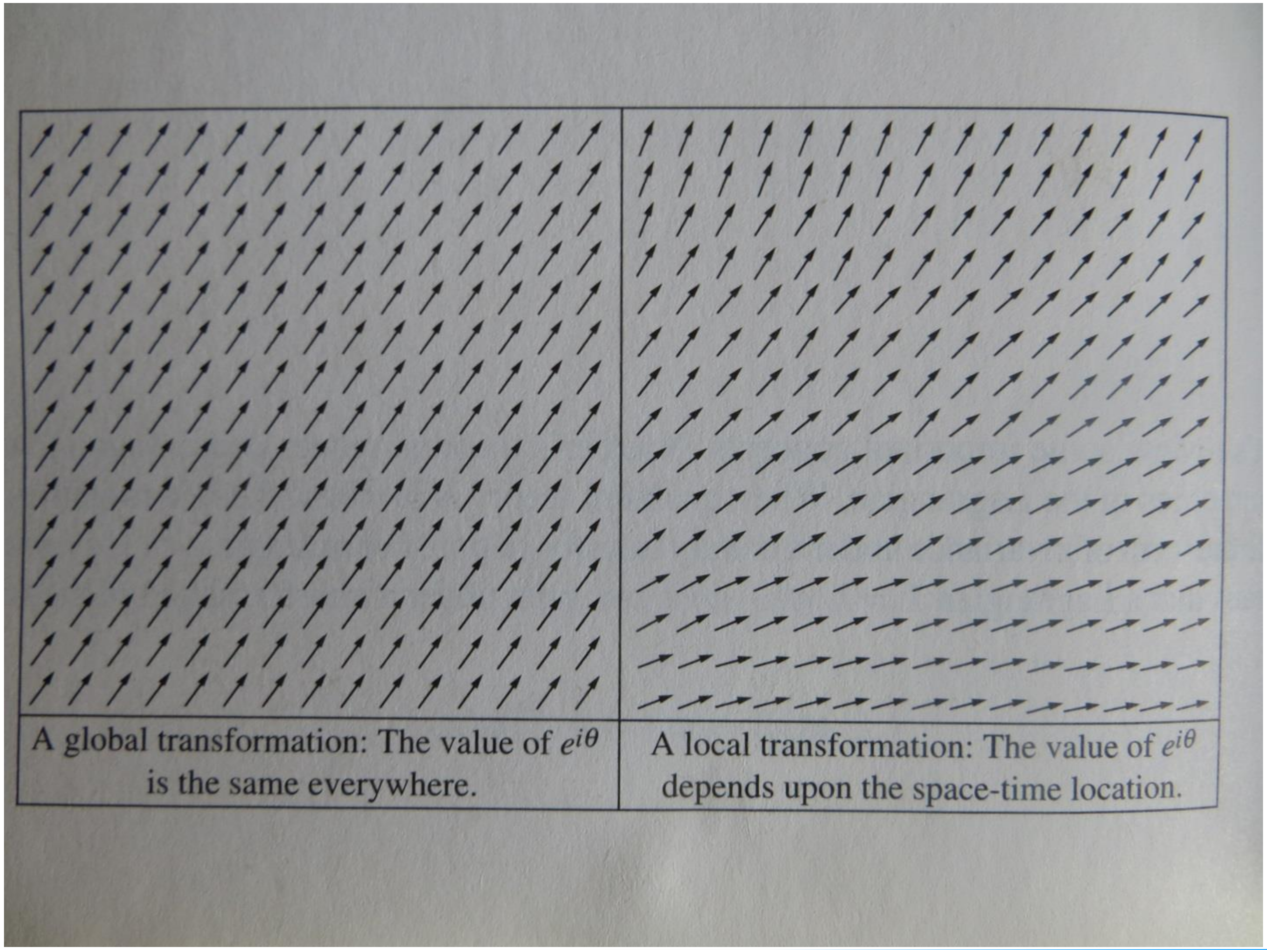
Come sappiamo, se ψ ne è soluzione allora $\psi \to e^{i\theta}\psi$ è una simmetria globale del sistema
In effetti quando scriviamo una soluzione una fase la dobbiamo scegliere e questa convenzione deve essere presa simultaneamente in tutti i punti dell'universo!
Sembrerebbe più logico fare una convenzione sulla fase che sia locale, cioè ritenere che la simmetria giusta del sistema sia

$$\psi \to e^{i\theta(\underline{x},t)}\psi$$

Simmetrie e teorie di *gauge*

conservazione della carica elettrica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO



D. McMahon

Simmetrie e teorie di *gauge*

conservazione della carica elettrica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

La nuova ψ non è più, però soluzione dell'equazione di Schroönger per una particella libera

Ipotizziamo ora che:

esistano un campo $\underline{A}$, un campo V e un parametro «di accoppiamento» q

che l'equazione per ψ vada modificata nel modo seguente

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qV\right)\psi = \frac{1}{2m}\left(-i\nabla - qA\right)^2\psi$$

Allora, la trasformazione seguente sulla ψ e sui campi è una simmetria delle equazioni del moto

$$\psi \to e^{i\theta(\underline{x},t)}\psi$$

$$\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{A} + \frac{1}{q}\nabla\theta$$

$$V \to V' = V - \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}\theta$$

Simmetrie e teorie di *gauge*

conservazione della carica elettrica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Quello che abbiamo trovato è straordinario: L'equazione precedente è l'equazione di Schrödinger in presenza di forze elettromagnetiche e le trasformazioni dei campi sono proprio le trasformazioni di *gauge* dei potenziali! La richiesta di invarianza U81) locale ha fatto nascere le forze elettromagnetiche (di *gauge*) così come succedeva con le trasformazioni di coordinate locali in meccanica faceva nascere le forze apparenti!

La differenza è che qui lo spazio delle rotazioni locali della fase è uno spazio interno

Formalmente basta ipotizzare nuovi campi con le giuste proprietà di trasformazione rimpiazzare nell'equazione libera le derivate con le cosiddette derivate covarianti

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow D_t = \frac{\partial}{\partial t} + iqV$$

$$\nabla \rightarrow \underline{D} = \nabla - iq\underline{A}$$

4 componenti quadrivettore

Simmetrie e teorie di *gauge*

interazione - trattazione relativistica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Generalizziamo: partiamo dall'equazione di Klein - Gordon per un campo reale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

Prendiamone la versione complessa per generalizzare l'equazione di Schrödinger (basta pensare a due campi scalari con la stessa massa

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_1\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi_1^2}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_2\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi_2^2}_{2} = \boxed{\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - \frac{1}{2}m^2 \varphi \varphi^*}$$

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$

Questa lagrangiana è evidentemente invariante per trasformazioni globali U(1).
Di nuovo vogliamo renderla **invariante per trasformazioni U(1) locali**

Simmetrie e teorie di *gauge*

interazione - trattazione relativistica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facciamo come prima. Supponiamo che esista un campo A^μ e poi operiamo le sostituzioni

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \tfrac{1}{2}D_\mu\varphi D^\mu\varphi^* - \tfrac{1}{2}m^2\varphi\varphi^* - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

cioè

$$\mathcal{L}' = (cin.\ \varphi) + (cin.\ A_\mu) - \tfrac{1}{2}m^2\varphi\varphi^* + (termini\ misti\ A_\mu\varphi)$$

A^μ è un campo privo di massa (per forza è il campo che ha per quanto il fotone…)

Si può dimostrare che le interazioni di *gauge* sono sempre a lungo *range* e perciò i loro quanti sono *massless*

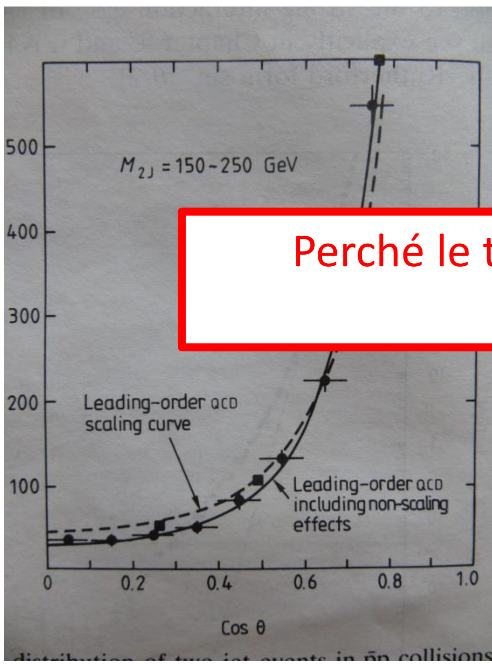
Simmetrie e teorie di *gauge*

interazione - trattazione relativistica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

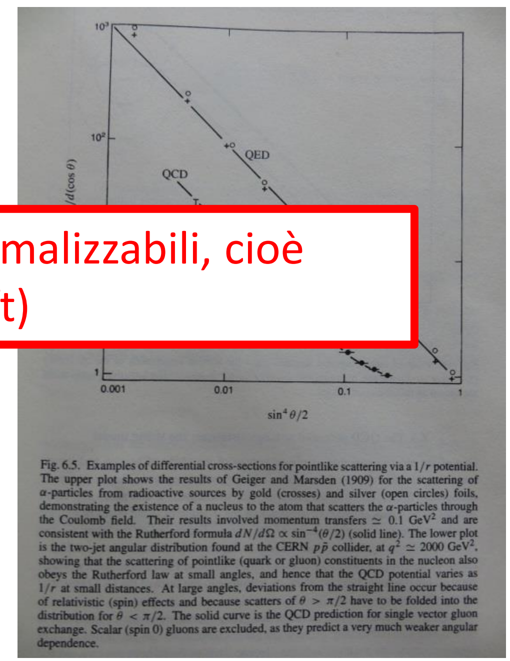
Perché ci interessano così tanto i campi di *gauge*?

Perché sul breve *range* le interazioni sembrano molto simili all'elettromagnetismo che è una teoria di *gauge*



Aitchison & Hey

Perché le teorie di gauge sono rinormalizzabili, cioè «funzionano» (t'Hooft)



Perkins

Simmetrie e teorie di *gauge*

interazione - trattazione relativistica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

PROBLEMA

Le interazioni deboli e forti sono a brevissimo *range*!

Noi ci occuperemo soltanto di una versione semplificata di quelle deboli

COME FACCIAMO A DOTARE DI MASSA IL QUANTO DI GAUGE?

COME FACCIAMO A DESCRIVERE UN FOTONE PESANTE?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Rottura spontanea di simmetria

SSB di un campo reale

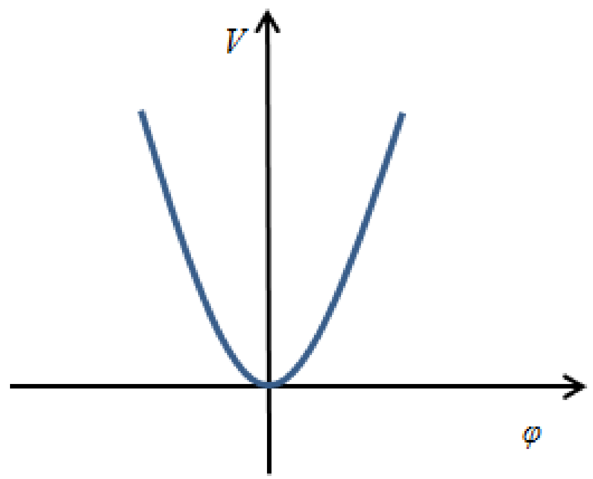
Supponiamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda \varphi^4$$

Abbiamo una simmetria discreta $\varphi \longrightarrow \varphi$

$$\boxed{m^2 > 0}$$

Lo stato di vuoto coincide con lo stato di assenza del campo



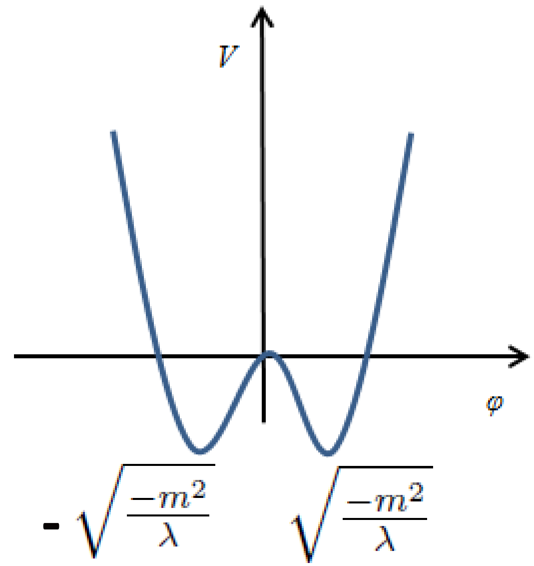
Rottura spontanea di simmetria

SSB di un campo reale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

$\boxed{m^2 < 0}$

Che vuol dire massa immaginaria
cioè campo tachionico…



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

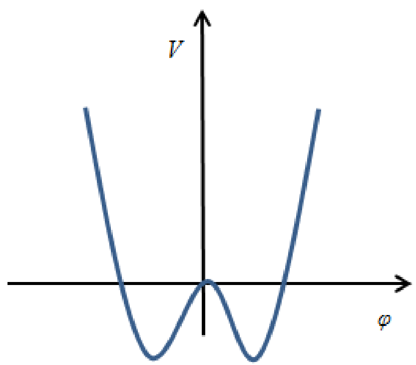
$$-\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\varphi\left(m^2 + \lambda\varphi^2\right) = 0 \qquad \varphi = \pm\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \equiv \pm v$$

Lo stato di vuoto effettivo non è lo zero, ma quello di minimo del potenziale, per esempio $\boldsymbol{\varphi = v}$.

Rottura spontanea di simmetria

SSB di un campo reale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO



$$\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$$

Il campo che noi osserviamo è dato dalle oscillazioni intorno al nuovo vuoto ***v***

Perciò scriviamo $$\varphi(x) = v + \eta(x)$$

Da cui segue

$$\partial_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \eta(x) \qquad \varphi^2 = (v+\eta)^2 = v^2 + 2v\eta + \eta^2 \qquad \varphi^4 = \ldots$$

Sostituiamo nella lagrangiana e buttiamo via le costanti che non contribuisco alle equazioni del moto (è solo algebra da seconda liceo)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

Rottura spontanea di simmetria

SSB di un campo reale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

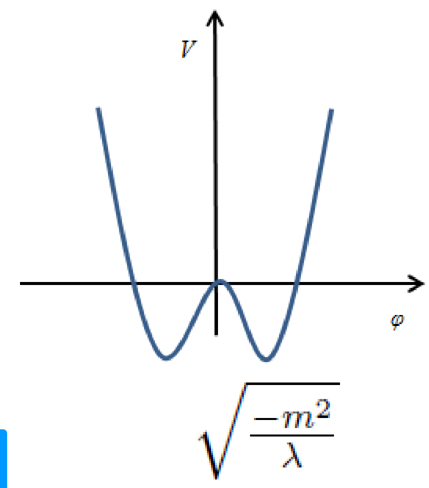
Otteniamo

Termine di massa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)^2 - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4$$

Termine cinetico

Termini di interazione



La rottura di una (semplicissima) simmetria ha prodotto un campo η che invece di avere massa immaginaria ha massa positiva

$$m^* = \sqrt{2\lambda} v$$

Vediamo cosa succede se si rompe la simmetria globale U(1)

Rottura spontanea di simmetria

SSB U(1) globale

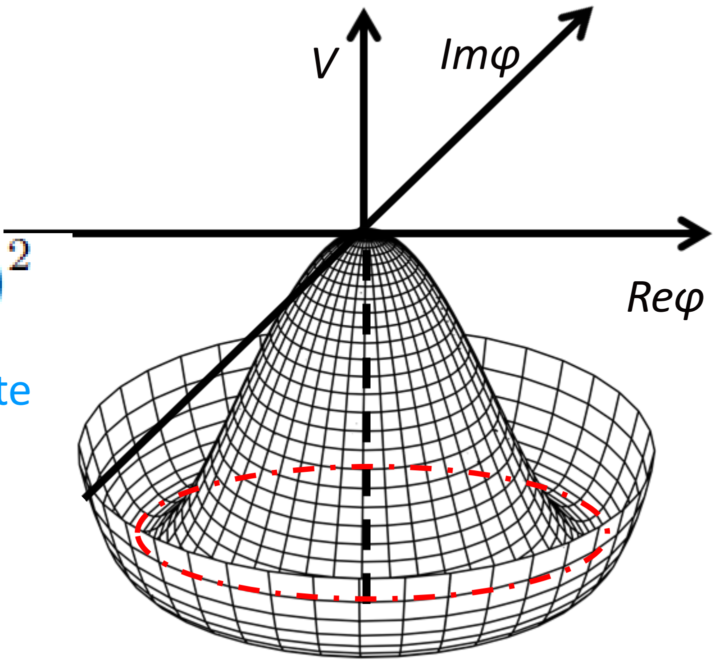
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Supponiamo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - \mu^2 \varphi^2 - \lambda \left(\varphi \varphi^*\right)^2$$

$\lambda > 0,\ \mu^2 < 0$

Evidentemente invariante sotto U(1)



Troviamo i minimi del potenziale

$$U = \mu^2 |\varphi|^2 + \lambda |\varphi|^4$$

$$\frac{\partial U}{\partial |\varphi|} = 0 \Rightarrow 2\mu^2 |\varphi| + 4\lambda |\varphi|^4 = 0$$

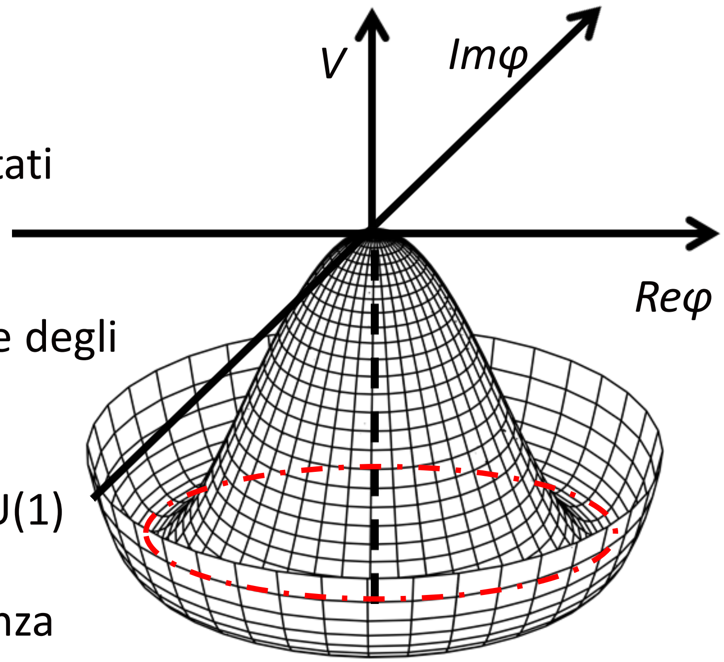
$$|\varphi| = 0, \quad \boxed{|\varphi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \equiv v}$$

Circonferenza dei minimi

Rottura spontanea di simmetria

SSB U(1) globale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO



Osserviamo che *v* è uno stato degenere: infiniti stati hanno la stessa energia

L'orientazione di questi stati è come l'orientazione degli *spin* in un ferromagnete

Ogni stato è collegato all'altro da una simmetria U(1)

Come prima sviluppiamo attorno alla circonferenza dei minimi ponendo

$$\varphi(x) = [v + \eta(x)]e^{i\xi(x)}$$

campi reali

Rottura spontanea di simmetria

SSB U(1) globale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Sostituendo nelle lagrangiana si ha (soltanto conti elementari)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta^* + (v+\eta)^2 \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \mu^2 (v+\eta)^2 - \lambda (v+\eta)^2$$

E, ricordando che

$$\mu^2 = -2\lambda v^2$$

Si ottiene

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta^* + (v+\eta)^2 \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \\ -4\lambda v^2 \eta^2 - 4\lambda v \eta^3 - 4\lambda \eta^4 + \cancel{\lambda v^4}$$

termine cinetico

termine positivo di massa per η

interazione

Il campo ξ rimane privo di massa

Rottura spontanea di simmetria

SSB U(1) globale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Il campo ξ rimane privo di massa perché è legato alle rotazioni U(1) che non danno cambiamenti di energia potenziale

I quanti di ξ si chiamano bosoni di Goldstone

L'apparire di bosoni di Goldstone in una rottura spontanea di simmetria globale continua è inevitabile

Il problema è che non si osservano in natura bosoni (per giunta scalari) privi massa

Pazienza! A noi interessano simmetrie locali…

Il meccanismo BEH

caso del campo elettromagnetico

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Partiamo ancora dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - \mu^2 \varphi^2 - \lambda \left(\varphi \varphi^*\right)^2$$

e ci chiediamo come dobbiamo modificarla per avere invarianza per trasformazioni ***U(1) locali***

1. Agiamo come in precedenza e introduciamo un nuovo campo di *gauge* A^μ
2. Operiamo la sostituzione $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$
3. Aggiungiamo alla lagrangiana un termine cinetico per A^μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \varphi D^\mu \varphi^* - \mu^2 \varphi^2 - \lambda \left(\varphi \varphi^*\right)^2$$

Il meccanismo BEH

caso del campo elettromagnetico

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

4. Sviluppiamo attorno allo stato di vuoto $|\varphi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \equiv v$

$$\varphi(x) = [v + \eta(x)] e^{i\xi(x)}$$

Il campo ξ rimane, come prima, privo di massa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + v^2 \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi +$$

Cin. A^μ | Cin. η | Cin. ξ

$$-4\lambda v^2 \eta^2 + q^2 v^2 A_\mu^2 - 2 q v^2 \partial_\mu \xi A_\mu + (cubici\ e\ quartici)$$

Massa η | Massa A^μ | Interazione

Il meccanismo BEH

caso del campo elettromagnetico

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Ma adesso la situazione è differente dal caso della SSB di U(1) globale

Ora abbiamo un campo η dotato di massa interagente (termini cubici e quartici contenenti *q*) con un campo fotonico *A* dotato di massa data da *v*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - 4\lambda v^2\eta^2 + q^2v^2A_\mu^2 + (cubici\ e\ quartici)$$

E i bosoni ξ privi di massa sono spariti

La lagrangiana di partenza è stata costruita apposta invariante per trasformazioni di *gauge* e perciò la fisica non può cambiare con la scelta di un *gauge* particolare, però «Il gauge unitario rende manifesto il menu delle particelle fisiche della teoria»

S. Weinberg. II p. 296

Superconduttività
analogia

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Le equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti si scrivono

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) A^\mu = J^\mu$$

Nel caso di campi statici, per le componenti spaziali si ha

$$\nabla^2 \underline{A} = -\underline{J}$$

senza massa, ma con sorgenti

Può il campo $\underline{A}$ diventare massivo? Cioè

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) A^\mu = 0$$

che nel caso statico per le componenti spaziali diventa

$$\nabla^2 \underline{A} = m^2$$

con massa, ma senza sorgenti

Basterà che sia $\boxed{\underline{J} = -m^2 \underline{A}}$

condizione dei London

Superconduttività
analogia

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Ora, da $\nabla \times \underline{B} = \underline{J}$

Segue che

$$\nabla \times \nabla \times \underline{B} = \nabla \times \underline{J} = -m^2 \nabla \times \underline{A} = -m^2 \underline{B}$$

ma

$$\cancel{\nabla \nabla \cdot} \underline{B} - \nabla^2 \underline{B} = -m^2 \underline{B}$$

che nel caso monodimensionale diventa

$$\frac{d^2 \underline{B}}{d\underline{B}^2} = m^2 \underline{B}$$

Da cui

$$\underline{B} = \underline{B}_0 e^{-mx}$$

$\boxed{\text{effetto Meissner}}$

BIBLIOGRAFIA

- I.J.R Aitchison & Hey, «Gauge theories in Particle Physics» 2° edition, Adam Hilger, Bristol Philadelphia (1989)
- D. H. Perkins, «High Energy Physics» 4° edition, Cambridge University Press, Cambridge (1999)
- D. McMahon, «Quantum field theory demistified», Mc Graw-Hill, New York, (2008)
- S. Weinberg, «The quantum Theory of Fields» I, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- S. Weinberg, «The quantum Theory of Fields» II, Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- S. Weinberg, «The quantum Theory of Fields» III, Cambridge University Press, Cambridge (2000)
- A. L. Fetter & J. D. Walecka, «Quantum theory of many-particles systems», McGraw-Hill, New York (1971)
- M. Stone, «The physics of Quantum Fields», Springer, New York (2000)

BIBLIOGRAFIA

- C. Kittel, «Introduction to Slid State Physics», 5° edition, John Wiley & sons, Inc., USA (1976)
- J. Bjorken & S. Drell, « Relativistic Quantum Fields», McGraw-Hill, New York (1965)
- M. Le Bellac, «Quantum and Statistical Field Theory, Oxford University Press, Oxfor (1991)
- F. Englert, «The BEH Mechanism and its Scalar Boson”,Nobel Lecture, 8 December 2013
- P. Higgs, “Evading the Goldstone Theorem», Nobel Lecture, 8 December 2013
- Y. Nambu, “Spontaneous Symmetry Breaking in Particle Physics: a Case of Cross Fertilization», Nobel Lecture, December 8, 2008
- L. Maiani con R. Bassoli, “A caccia del bosone di Higgs”, Mondadorì università, Milano (2013)