

**Moto stazionario di una sfera conduttrice  
attraverso un fluido tenue conduttore,  
in un campo esterno di induzione magnetica  
uniforme e di intensità moderata**

claudio magno



**Michael Faraday** (1791-1867)

## INDICE

INTRODUZIONE	P. III
LO SCENARIO DEL PROBLEMA	P. IV
I. MOTO TRASLAZIONALE UNIFORME IN REGIME DI FLUSSO STAZIONARIO	P. 1
II. MOTO ROTAZIONALE UNIFORME IN REGIME DI FLUSSO STAZIONARIO	P. 17
APPENDICE	P. 29
FUNZIONI ARMONICHE SFERICHE DALLA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE DDP DI LAPLACE	P. 30
BIBLIOGRAFIA	P. 34

## INTRODUZIONE

L'argomento si presta a un'applicazione significativa dell'*Elettrodinamica Classica (Maxwelliana)* e della soluzione generale di un'*equazione di campo* pertinente in serie di *autofunzioni ortogonali*. Possibili effetti relativistico-speciali sono completamente trascurati.

Le equazioni dominanti sono quelle differenziali del 2° ordine *a derivate parziali* di Laplace e di Poisson in coordinate *sferiche*, opportunamente condizionate alla frontiera sferica.

Concretizzazioni del modello sono il moto idro-elettrodinamico *stazionario* di una sonda sferica ohmico-metallica in un fluido elettrolita di viscosità trascurabile (e.g., prossimo alla transizione ordinaria in fase gassosa o di vapore) o di un satellite artificiale che attraversa una fascia ionosferica, costituita da un plasma *tenue* e, pertanto, di densità poco apprezzabile o evanescente, almeno in prima approssimazione.

I moti *traslazionale* e *rotazionale* sono discussi separatamente in forma di *problema*, concisa ma diretta. La loro sovrapposizione (roto-traslazione), nel rispetto dei principî classici di Conservazione, si ottiene in modo immediato ed elementare ed è lasciata a chi legge.

Le unità di misura usate qui sono quelle del SI (i.e., del Sistema MKSA Razionalizzato), a favore di un'*audience*' più ampia di quella costituita da soli fisici ... .

□

Questo phys-notebook, pensato e adattato a un uso didattico universitario avanzato, dove trovino spazio applicazioni e metodi di calcolo modellistico (non sempre facilmente reperibili in forma esplicita, integrata e dettagliata in maniera adeguata), si ispira, in conformità stretta, agli articoli seguenti:

- BULLARD, E. C., *Proc. Roy. Soc. A*, **199** (1949), 413,
- LUDFORD, G. S. S. - MURRAY, J. D., *Journal of Fluid Mechanics*, **7** (1960), 516,
- REITZ, J. R. - FOLDY, L. L., *Journal of Fluid Mechanics*, **11** (1961), 133.

Nella **Bibliografia**, ho voluto fornire riferimenti generali sufficienti anche per i metodi matematici necessari. Alcuni di tali riferimenti sono scaricabili liberamente dalla *pagina-Biblioteca* di questo web-site.

C M

### Lo scenario del problema

Una sfera solida, elettricamente neutra, di raggio  $a$ , si muove di moto stazionario non-relativistico immersa in un fluido *tenue* (i.e., di densità trascurabile). Il fluido è costituito di portatori di carica elettrica liberi e in *equilibrio dinamico statistico* (<sup>†</sup>).

Sia la sfera che il fluido sono *conduttori* l. i. o. (lineari, isotropi, omogenei), di *conduttività*  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  rispettive; il sistema sfera-fluido interagisce con un campo *esterno* di *induzione magnetica* (o, più brevemente, un *campo magnetico*)  $\mathbf{B}_0$  *uniforme* e di intensità *moderata* ( $\propto 10^{-6}$ - $10^{-5}$  T).

L'ordine di grandezza caratteristica del volume occupato dal fluido è *estremamente* maggiore ( $\gg$ ) (e.g., *almeno*  $10^6$  volte maggiore) di quello della sfera.

■



Fig. 1 – Simulazione di fluttuazioni TEM 4-polari *pure* in un plasma tenue (*plasma dance* 1).

---

(<sup>†</sup>) Alcuni concetti essenziali relativi all'*equilibrio dinamico statistico* (*semi-classico*) sono discussi, e.g., nel phys-notebook: **Il Modello Statistico semi-classico del Gas Ideale.**

## I. Moto traslazionale uniforme in regime di flusso stazionario

Sia  $v_0$  la velocità *uniforme* della sfera nel fluido.

- I.1 Si discutano la natura e le caratteristiche del *campo elettrico* e la *densità di corrente* corrispondente indotti *ovunque*, sia all'interno che all'esterno della sfera;
- I.2 si determinino le *condizioni di frontiera* sufficienti compatibili con il problema;
- I.3 si ottenga *ovunque* un'espressione del campo elettrico *totale*;
- I.4 si calcoli la densità di carica elettrica indotta sulla superficie della sfera;
- I.5 si calcoli la *potenza termoelettrica* totale dissipata (effetto Joule), causata dalle correnti parassite indotte che circolano attraverso l'intero sistema sfera-fluido.  
Quindi, si determini la *forza resistente* netta,  $F_R$ , subita dalla sfera nel fluido;
- I.6 si esprima la variazione di *entropia* della sfera, alla temperatura stazionaria  $T(\mathbf{r})$ , in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , tra stati terminali di equilibrio termodinamico, discutendo le condizioni magnetiche sufficienti per il suo moto *adiabatico* nel fluido;
- I.7 si trovi la *forza totale* sulla sfera, separandone le componenti *longitudinale* e *trasversa*.

### Soluzione

#### Preliminari idrodinamici

Se, inizialmente,  $v_0 \equiv v_0 \hat{z}$ , con  $v_0 > 0$ , rappresenta la velocità della sfera nel fluido *stazionario*, appare più conveniente impostare il problema vs. il sistema di riferimento fissato *nel centro* della sfera, l'*s-sistema*, cosiddetto. Rispetto a questo, invece, si osserva un fluido di estensione infinita che scorre uniforme nel verso  $-\hat{z}$ , contornando *laminarmente* la sfera stazionaria. Pertanto, la velocità *indisturbata* del fluido, a distanza  $r$  molto grande dal centro della sfera ( $r \gg a$ ), è

$$\mathbf{v}_\infty = -v_0 \hat{z}.$$

D'altra parte, quanto più una linea di flusso del fluido si avvicina alla sfera tanto più il suo profilo rettilineo indisturbato si deforma nell'aggiramento dell'ostacolo sferico.

Poiché il fluido è un mezzo *l. i. o.* e di viscosità trascurabile, il suo flusso apparirà *stazionario* e *senza vortici*. Matematicamente, questo significa che il *campo di velocità* del fluido,  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r})$ , è sia *solenoidale*, i.e.,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

come si deduce dall'equazione di *continuità della massa* non-relativistica, sia *irrotazionale*, i.e.,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Inoltre, deve valere la condizione asintotica

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \equiv -v_0 \hat{z}. \quad (3)$$

L'Eq. (2) implica l'esistenza di una funzione-potenziale scalare,  $\mathbf{r} \mapsto U(\mathbf{r})$ , detta il *potenziale di velocità*, tale che

$$\mathbf{v} = -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (4)$$

In sé, l'una o l'altra scelta  $\mathbf{v} \equiv \pm \nabla U$ , diversamente che in Elettrodinamica, parrebbe una questione più formale che sostanziale. D'altra parte, la scelta del segno '–' si adatta alla dinamica nel Campo Gravitazionale in modo più 'naturale'; invece, in un *Campo Elettromagnetico*, essa è *obbligata*. L'Eq. (1) equivale all'*Equazione di Laplace*

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 0. \quad (5)$$

Poiché  $\mathbf{v}_\infty = -v_0 \hat{\mathbf{z}}$ , la simmetria *azimutale* del fluido vs. la direzione del suo moto e la geometria della sfera suggeriscono di esprimere  $U(\mathbf{r})$  in coordinate sferiche mediante un'espansione in serie di *Funzioni Armoniche Zonali*, ciascuna fattorizzata in un termine *radiale* puro e in un termine *angolare sferico* vs. le coordinate  $\theta$  e  $\varphi$  (v. Eq. (30)). Risulta, per *simmetria azimutale* (v. [13], [14]),

$$U(\mathbf{r}) \equiv U(r, \theta) = v_0 \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta + U_0, \quad (6)$$

essendo  $U_0$  una costante di riferimento arbitraria di integrazione (delle stesse dimensioni di  $U$ ).

Sviluppando l'Eq. (4), si scrive

$$\mathbf{v} = -v_0 \nabla(r \cos \theta) - \frac{a^3 v_0}{2} \nabla \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \quad (7)$$

$$= -v_0 \hat{\mathbf{z}} + \frac{a^3 v_0}{2} \frac{\hat{\mathbf{r}} 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta}{r^3} \equiv \mathbf{v}(r, \theta). \quad (8)$$

La condizione asintotica (3) è soddisfatta. Ovviamente, il termine *dipolare* nei membri destri delle Eq. (7) e (8) descrive la distorsione delle linee di flusso del fluido intorno alla sfera a distanza ravvicinata. Lo si può manipolare opportunamente per ottenere rappresentazioni *generali* di  $\mathbf{v}$ . Infatti, se si osserva che

$$-v_0 \nabla \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \equiv \nabla \left( \frac{-v_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \equiv \nabla \left( \mathbf{v}_\infty \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right)$$

e che

$$\begin{aligned} v_0 (\hat{\mathbf{r}} 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) &\equiv v_0 (\hat{\mathbf{r}} 3 \cos \theta - (\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)) \equiv \hat{\mathbf{r}} 3 v_0 \cos \theta - v_0 \hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv \mathbf{v}_\infty - (3 \mathbf{v}_\infty \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}, \end{aligned}$$

è corretto scrivere

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \frac{a^3}{2} \nabla \left( \mathbf{v}_\infty \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right), \quad (9)$$

o, in forma equivalente (cf/c [13], [14]),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \frac{a^3}{2} \frac{\mathbf{v}_\infty - (3 \mathbf{v}_\infty \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}}{r^3}, \quad (10)$$

eliminando qualsiasi riferimento particolare alla direzione e al verso di  $\mathbf{v}_\infty$ .

Nel seguito, le quantità riferite alla regione *interna* alla sfera sono contraddistinte dal pedice 1 mentre il pedice 2, rappresenta le quantità pertinenti alla regione *esterna* alla sfera, totalmente occupata dal fluido.

■

I.1 Lo spazio fisico totale può essere rappresentato, nell' *s*-sistema, come l'unione di due regioni contigue, la regione occupata dalla sfera e quella occupata dal fluido.

Un osservatore solidale con la sfera (*s*-osservatore) è in grado di misurare il campo elettrico *magneto-motore*  $\mathcal{E}'$  indotto dall'accoppiamento vettoriale tra il campo di velocità del fluido e il campo di induzione magnetica esterno  $B_0$ .

Poiché la sfera è impenetrabile per il fluido, i.e.,  $v \equiv 0$  per  $r \in [0, a)$ , la rappresentazione spaziale completa di  $\mathcal{E}'$  è data da

$$\mathcal{E}' \equiv \begin{cases} \mathcal{E}'_1 = 0, & \text{per } r \in [0, a), \\ \mathcal{E}'_2 = v \times B_0, & \text{per } r \in [a, +\infty). \end{cases} \quad (11)$$

Inoltre,  $\mathcal{E}'_2$  risulta non solo stazionario vs. l'*s*-sistema di riferimento ma, anche, *solenoidale*, come si verifica prontamente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{E}'_2 &= \nabla \cdot (v \times B_0) = B_0 \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times B_0) \\ &= B_0 \cdot \left( \nabla \times v_\infty + \frac{a^3}{2} \nabla \times \nabla \left( v_\infty \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right) \equiv 0, \end{aligned} \quad (12)$$

essendo sia  $B_0$  che  $v$  vettori uniformi e applicando l'identità generale  $\nabla \times \nabla f(\mathbf{r}) = 0$ .

Comunque, il fatto che  $\mathcal{E}'_2$  non sia irrotazionale ha conseguenze significative. Si incomincia dallo sviluppo vettoriale

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathcal{E}'_2 &= \nabla \times (v \times B_0) \\ &= (\nabla \cdot B_0) v - (\nabla \cdot v) B_0 + (B_0 \cdot \nabla) v - (v \cdot \nabla) B_0, \end{aligned}$$

nel quale, il primo e il quarto termine svaniscono per l'uniformità di  $B_0$  mentre il secondo termine è nullo per la solenoidalità del campo  $v$ , v. Eq. (1) ( $\Rightarrow$  regime *stazionario* di flusso). La verifica della *rotazionalità* (*vorticità*) di  $\mathcal{E}'_2$  prosegue esplicitando  $v$  nell'addendo rimanente con l'Eq. (10):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathcal{E}'_2 &= (B_0 \cdot \nabla) v = \cancel{(B_0 \cdot \nabla) v_\infty} + \frac{a^3}{2} (B_0 \cdot \nabla) \frac{v_\infty - (3v_\infty \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} = \dots \\ &= \frac{3a^3}{2r^4} (5(v_\infty \cdot \hat{r})(B_0 \cdot \hat{r})\hat{r} - (B_0 \cdot \hat{r})v_\infty - (B_0 \cdot v_\infty)\hat{r} - (v_\infty \cdot \hat{r})B_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

L'assenza di un campo elettrico *magneto-motore* indotto all'interno della sfera,  $\mathcal{E}'_1 = 0$ , implica che  $\mathcal{E}'_{1,r} = 0$ , ovviamente. A sua volta,  $\mathcal{E}'_2$  può essere separato nelle sue componenti *normale* e *tangenziale*,  $\mathcal{E}'_2 \equiv \mathcal{E}'_{2,\perp} + \mathcal{E}'_{2,\parallel}$ , appropriate alla geometria del problema. Si ha

$$\begin{cases} \mathcal{E}'_{2,\perp} \equiv \mathcal{E}'_{2,r} \hat{r}, \\ \mathcal{E}'_{2,\parallel} \equiv \mathcal{E}'_{2,\theta} \hat{\theta} + \mathcal{E}'_{2,\varphi} \hat{\varphi}. \end{cases} \quad (14)$$

Ora, si ritorni alla descrizione spaziale di  $\mathcal{E}'$ , Eq. (11). Poiché  $\mathcal{E}'_{1,r} = 0$  mentre, in generale, è  $\mathcal{E}'_{2,r}(a, \theta, \varphi) \neq 0$ , la componente *normale* di  $\mathcal{E}'$  mostra una *discontinuità* alla superficie della sfera. Questo effetto di 'flip' è sufficiente per provocare una redistribuzione delle cariche libere all'interfaccia tra i due mezzi conduttori. Le cariche libere interne alla sfera non subiscono



alcuna azione *magneto-motrice*, mantenendosi in equilibrio statistico medio nei siti reticolari di conduzione. Le *forze di taglio* associate a  $\mathcal{E}'_{2,r}(a, \theta, \varphi)$  muovono le cariche di superficie finché esse raggiungono la nuova configurazione stazionaria di equilibrio.

Comunque, *non si determina alcun eccesso di carica sulla sfera*: l'equilibrio elettrostatico tra la tensione elettromotrice *tangenziale* e le forze coulombiane di reazione esercitate dalle cariche libere superficiali spostate viene raggiunto dopo un transitorio quasi istantaneo.

Questa distribuzione indotta di cariche superficiali genera, a sua volta, un campo *elettrostatico* ulteriore,  $\mathcal{E}^*$ , *ovunque*. La ragione per la quale possa persistere un campo elettrostatico all'interno dei due mezzi conduttori è che esso è indotto, e *sostenuto*, dal regime stazionario di flusso del fluido in presenza del campo esterno di induzione magnetica ( $\Rightarrow \mathcal{E}'_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ ).

Quindi, il campo elettrico *totale* si scrive, in generale,

$$\mathcal{E} \equiv \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \cancel{\mathcal{E}'_1} + \mathcal{E}_1^* = \mathcal{E}_1^*, & \text{per } r \in [0, a), \\ \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_2 + \mathcal{E}_2^* = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathcal{E}_2^*, & \text{per } r \in (a, +\infty). \end{cases} \quad (15)$$

Si noti l'esclusione della *superficie sferica singolare* (sorgente) posta alla distanza  $r = a$ .

I risultati della discussione precedente sono sintetizzabili come segue:

nell'*s-sistema*, con  $\mathcal{E}'_{2,r}(a, \theta, \varphi) \neq 0$ ,

- una distribuzione stazionaria non-uniforme di portatori di carica elettrica libera è indotta sulla superficie della sfera, originando campi *elettrostatici*,  $\mathcal{E}_1^*$  e  $\mathcal{E}_2^*$ , interni alla sfera e al fluido, rispettivamente;
- poiché tutte le cariche-sorgente sono confinate sulla frontiera sferica tra i due mezzi, non ci sono cariche-sorgente *di volume* altrove. Pertanto,  $\nabla \cdot \mathcal{E}_1^* = 0$  e  $\nabla \cdot \mathcal{E}_2^* = 0$  per  $r \neq a$ . In altri termini,  $\mathcal{E}_1^*$  e  $\mathcal{E}_2^*$  sono determinabili da due funzioni potenziale *distinte*,  $\Phi_1^*$  e  $\Phi_2^*$ , che soddisfano l'*Equazione di Laplace* all'interno, rispettivamente, di entrambi i mezzi.

L'inclusione formale della discontinuità radiale di campo, dovuta alle sorgenti alla frontiera  $r = a$ , muta le *Equazioni di Laplace interna ed esterna* in *Equazioni di Poisson generalizzate*,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1^* &\equiv -\nabla \cdot \mathcal{E}_1^* = -\frac{\sigma(\theta, \varphi)}{\epsilon_0} \delta(a - r), & \text{per } r \in [0, a), \\ \nabla^2 \Phi_2^* &\equiv -\nabla \cdot \mathcal{E}_2^* = -\frac{\sigma(\theta, \varphi)}{\epsilon_0} \delta(r - a), & \text{per } r \in [a, +\infty). \end{aligned}$$

dove  $\sigma(\theta, \varphi)$  è la densità di carica elettrica indotta sulla superficie della sfera;

- mentre  $\mathcal{E}_1$  ( $\equiv \mathcal{E}_1^*$ ) è un campo conservativo,  $\mathcal{E}_2$  *non lo è* perché  $\mathcal{E}'_2$  *non è* irrotazionale, v. Eq. (13). Però, essendo *solenoidale*,  $\mathcal{E}_2$  sostiene una densità netta di corrente data da

$$\mathbf{J}_2 = \kappa_2 \mathcal{E}_2 \equiv \kappa_2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathcal{E}_2^*). \quad (16)$$

Circa la questione dell'impossibilità, da parte di un campo irrotazionale, di sostenere un regime stazionario di corrente, si consultino [1], [2], [3], [4], [5], [8], [10];

- poiché  $\mathbf{J}_2$  è stazionaria, l'*Equazione di Continuità* del flusso della carica elettrica impone che una *densità di corrente stazionaria*,  $\mathbf{J}_1$ , persista anche *nella* sfera, sostenuta da  $\mathcal{E}_1$ ,

$$\mathbf{J}_1 = \kappa_1 \mathbf{E}_1. \quad (17)$$

Pertanto, correnti *parassite* stazionarie di conduzione circolano tra la sfera e il fluido.

È ovvio che, se  $\mathcal{E}'_{2,r}(a, \theta, \varphi) = 0$ , non viene indotta alcuna densità di carica all'interfaccia tra i due mezzi né alcun campo elettrostatico ulteriore né alcuna corrente parassita tra la sfera e il fluido. ■

I.2 Essendo il campo  $\mathbf{B}_0$  *indipendente* dal tempo, la forma appropriata al problema della *Legge di Faraday-Maxwell* riguarda la sola componente *irrotazionale* del campo elettrico *totale*  $\mathbf{E}$ , i.e., la componente *indotta*  $\mathbf{E}^*$ . Come conseguenza della disuguaglianza (13), il termine elettrico *magneto-motore* deve essere escluso. Questa conclusione è in accordo stretto con il *Principio di Sovrapposizione* per i campi lineari. Quindi,

$$\nabla \times \mathbf{E}^* = -\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \equiv \mathbf{0}. \quad (18)$$

L'equazione (18) porta con sé le conseguenze seguenti:

a. la componente vettoriale *tangenziale* di  $\mathbf{E}^*$  attraverso la superficie della sfera è *continua*,

$$\mathcal{E}_{2,\parallel}^*(a, \theta, \varphi) = \mathcal{E}_{1,\parallel}^*(a, \theta, \varphi). \quad (19)$$

Poiché  $\mathbf{E}_1^*$  e  $\mathbf{E}_2^*$  sono derivabili da funzioni-potenziale che soddisfano la *stessa Equazione di Laplace*, l'Eq. (19) può essere sostituita dalla condizione più maneggevole (cf/c Eq. (14))

$$\Phi_2^*(a, \theta, \varphi) = \Phi_1^*(a, \theta, \varphi); \quad (20)$$

b. si è visto che la densità totale di corrente è stazionaria ovunque perché tutti i campi elettrici sono *solenoidali* (quasi) ovunque. Pertanto, la componente vettoriale *normale* (i.e., *radiale*) di  $\mathbf{J}$  è *continua* attraverso la superficie della sfera (v. [1], [2], [3], [4], [5], [8], [10]),

$$J_{2,r}(a, \theta, \varphi) = J_{1,r}(a, \theta, \varphi),$$

o, in modo equivalente, essendo i mezzi *ohmici* (i.e., lineari),

$$\kappa_2 \lim_{r \rightarrow a^+} \mathcal{E}_{2,r}(r, \theta, \varphi) = \kappa_1 \lim_{r \rightarrow a^-} \mathcal{E}_{1,r}(r, \theta, \varphi). \quad (21)$$

La dipendenza dai campi elettrici *totali* è indicata, come pure la presenza di discontinuità di campo dovuta alle sorgenti;

c. infine,  $\mathbf{E}_2$  deve svanire a distanza *molto* grande dalla sfera, i.e.,  $\forall \{\theta, \varphi\}$ , deve aversi che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{E}_2^*) = \mathbf{0}. \quad (22)$$

■

I.3 Per convenienza di calcolo ma senza pregiudizio di generalità del procedimento, il *sistema-s* può essere scelto in modo tale che  $\mathbf{B}_0$  giaccia nel piano  $X \times Z$  (il farsene uno schema grafico non sarà inutile per una chiarificazione della 'geometria').

Così, si può scrivere

$$\mathbf{B}_0 \equiv B_{0,x} \hat{\mathbf{x}} + B_{0,z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (23)$$

a. All'esterno della sfera,  $r \in (a, +\infty)$ , nella regione del fluido, risulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'_2 &= \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 = \left( -v_0 \hat{\mathbf{z}} + \frac{a^3 v_0}{2} \frac{\hat{\mathbf{r}} 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta}{r^3} \right) \times (B_{0,x} \hat{\mathbf{x}} + B_{0,z} \hat{\mathbf{z}}) \\
&= -v_0 B_{0,x} \hat{\mathbf{y}} + \frac{v_0 a^3}{2 r^3} (\hat{\mathbf{r}} 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) \times_{\downarrow} \\
&\quad \times_{\downarrow} (\hat{\mathbf{r}} (B_{0,x} \sin \theta \cos \varphi + B_{0,z} \cos \theta) + \hat{\boldsymbol{\theta}} (B_{0,x} \cos \theta \cos \varphi - B_{0,z} \sin \theta) - \hat{\boldsymbol{\phi}} B_{0,x} \sin \varphi) \\
&\equiv -v_0 B_{0,x} \hat{\mathbf{y}} +_{\downarrow} \\
&\quad +_{\downarrow} \frac{v_0 a^3}{2 r^3} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 2 \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ B_{0,x} \sin \theta \cos \varphi + B_{0,z} \cos \theta & B_{0,x} \cos \theta \cos \varphi - B_{0,z} \sin \theta & -B_{0,x} \sin \varphi \end{vmatrix} \\
&= -v_0 B_{0,x} (\hat{\mathbf{r}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \varphi) -_{\downarrow} \\
&\quad -_{\downarrow} \frac{v_0 a^3}{2 r^3} (\hat{\mathbf{r}} B_{0,x} \sin \theta \sin \varphi - \hat{\boldsymbol{\theta}} 2 B_{0,x} \cos \theta \sin \varphi +_{\downarrow} \\
&\quad +_{\downarrow} \hat{\boldsymbol{\phi}} (B_{0,x} (1 - 3(\cos \theta)^2) \cos \varphi + 3 B_{0,z} \cos \theta \sin \varphi)) \\
&= -\frac{v_0}{2 r^3} (\hat{\mathbf{r}} B_{0,x} (2 r^3 + a^3) \sin \theta \sin \varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}} 2 B_{0,x} (r^3 - a^3) \cos \theta \sin \varphi +_{\downarrow} \\
&\quad +_{\downarrow} \hat{\boldsymbol{\phi}} (B_{0,x} (2 r^3 + a^3 (1 - 3(\cos \theta)^2)) \cos \varphi + 3 a^3 B_{0,z} \cos \theta \sin \varphi)) \quad (24) \\
&\equiv \mathbf{E}'_2(r, \theta, \varphi),
\end{aligned}$$

in rappresentazione sferica. La componente scalare *radiale* di  $\mathbf{E}'_2$  alla superficie della sfera si legge immediatamente dall'Eq. (24):

$$\mathcal{E}'_{2,r}(a, \theta, \varphi) = -\frac{3}{2} v_0 B_{0,x} \sin \theta \sin \varphi. \quad (25)$$

Allora, se  $\mathbf{B}_0$  non è equiverso\contro-verso a  $\mathbf{v}_\infty \equiv -v_0 \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \sin \theta \neq 0$ , una distribuzione di carica elettrica *statica* viene indotta sulla superficie della sfera dal campo  $\mathbf{E}'_2$ .

Al fine di obbedire alla condizione asintotica *di frontiera* (22), è naturale assumere che sia  $\mathbf{E}'_2$  che  $\mathbf{E}_2^*$  svaniscano a *grande* distanza dalla sfera. Però, dall'Eq. (24), si osserva che

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{E}'_2(r, \theta, \varphi) &= -v_0 B_{0,x} (\hat{\mathbf{r}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \varphi) \equiv -v_0 B_{0,x} \hat{\mathbf{y}} \\
&\equiv -v_0 \hat{\mathbf{z}} \times (B_{0,x} \hat{\mathbf{x}} + B_{0,z} \hat{\mathbf{z}}) \equiv \mathbf{v}_\infty \times \mathbf{B}_0. \quad (26)
\end{aligned}$$

Così, necessariamente, richiedendo la presenza del contro-addendo *soppressore*  $+v_0 B_{0,x} \hat{\mathbf{y}}$  nell'espressione di  $\mathbf{E}_2^*$ , è sufficiente definire

$$\mathbf{E}_2^* \equiv -\nabla \Phi_2^* := -\nabla (\Psi_2^* - v_0 B_{0,x} y) \equiv -\nabla (\Psi_2^* - v_0 B_{0,x} r \sin \theta \sin \varphi), \quad (27)$$

dove è *imposto* alla funzione  $\Psi_2^*$  di soddisfare l'*Equazione di Laplace*, i.e., di costituire una

funzione potenziale. È evidente che  $\Phi_2^*$  è soluzione *regolare* ('well-behaved') dell'Equazione di Laplace, i.e., almeno, che  $\Phi_2^*(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \wedge \nabla \Phi_2^*(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$  in  $\mathbb{R}^3$  (cf/c [17], p. 11);

b. all'interno della sfera,  $r \in [0, a)$ , deve essere

$\mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_1^*$ , un campo *conservativo*, v. Eq. (15). Tenendo conto della *condizione di frontiera* (20) e della definizione (27), la scelta più ovvia della forma di  $\mathcal{E}_1^*$  è

$$\mathcal{E}_1^* \equiv -\nabla \Phi_1^* := -\nabla(\Psi_1^* - v_0 B_{0,x} y) \equiv -\nabla(\Psi_1^* - v_0 B_{0,x} r \sin \theta \sin \varphi), \quad (28)$$

dove si richiede che anche  $\Psi_1^*$  sia una funzione-potenziale *regolare*.

La costruzione delle espressioni  $\Psi_1^*(\mathbf{r})$  e  $\Psi_2^*(\mathbf{r})$  dei potenziali appropriati al problema segue il metodo classico di sviluppo in serie di *auto-funzioni ortogonali*, ricavando i coefficienti non-nulli dell'espansione dalle *condizioni di frontiera* pertinenti (v. [1], [2], [3], [4], [6], [13], [15]).

Nell'omogeneità sferica del sistema, il verso  $\hat{z}$  di  $\mathbf{v}_\infty$ , la velocità *indisturbata* del fluido a *grande* distanza dalla sfera conduttrice, si caratterizza come *privilegiata*. In tale circostanza, la soluzione generale dell'Equazione di Laplace va specializzata al problema sia obbedendo alle *condizioni di frontiera* sia evitando possibili *singolarità*.

Il problema fisico in discussione è classico, *non* quantistico. Pertanto, mancando la necessità di trattare quantità complesse, è preferibile iniziare dall'Eq. (2) nell'APPENDICE, invece che dalla successiva Eq. (3). L'Eq. (2) indicata,

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left( \alpha_l r^l + \frac{\beta_l}{r^{l+1}} \right) (P_{l,m}(\cos \theta))(C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)),$$

è valida per *tutte* le direzioni e va adattata alla presenza dei conduttori ([1], [2], [3], [4], [5], [7], [9]).

Con  $r \in [0, a)$ , all'interno della sfera, e con  $r \in (a, +\infty)$ , all'esterno della sfera,  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  risulta singolare, rispettivamente, in  $r = 0$  e per  $r \rightarrow +\infty$ . Quindi,  $\forall l$ , bisogna imporre  $\beta_l \equiv 0$  nella soluzione *interna*  $\Phi(r, \theta, \varphi) \mapsto \Psi_1^*(r, \theta, \varphi)$  mentre deve essere  $\alpha_l \equiv 0$  nella soluzione *esterna*  $\Phi(r, \theta, \varphi) \mapsto \Psi_2^*(r, \theta, \varphi)$ .

Le forme parametriche *preliminari* dei potenziali sono, allora,

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l r^l (P_{l,m}(\cos \theta))(C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)), \\ \Psi_2^*(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \frac{\beta_l}{r^{l+1}} (P_{l,m}(\cos \theta))(C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)). \end{aligned}$$

Dalla *condizione di frontiera* (20), segue che  $\alpha_l a^l = \beta_l / a^{l+1}$ , i.e., che

$$\beta_l = \alpha_l a^{2l+1}. \quad (29)$$

Quindi, definita la *Funzione Armonica Sferica* generale (non orto-normalizzata),

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) := (P_{l,m}(\cos \theta))(C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)), \quad (30)$$

si scrivono le espressioni dei potenziali, *interno* ed *esterno*, rispettivamente,

$$\Psi_1^*(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (31)$$

$$\Psi_2^*(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \varphi). \quad (32)$$

A questo punto, tenendo presenti le Eq.i (15), (28), (26) e (27), si specificano le *condizioni di frontiera* (21) in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \kappa_2 \left( -\frac{3}{2} v_0 B_{0,x} \sin \theta \sin \varphi - \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_2^* - v_0 B_{0,x} r \sin \theta \sin \varphi) \right)_{r=a} = \\ = \kappa_1 \left( -\frac{\partial}{\partial r} (\Psi_1^* - v_0 B_{0,x} r \sin \theta \sin \varphi) \right)_{r=a}. \end{aligned} \quad (33)$$

Sostituendo le espressioni (31) e (32) dei potenziali nell'Eq. (33), si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \kappa_2 v_0 B_{0,x} \sin \theta \sin \varphi - \kappa_2 \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l a^{2l+1} \left( -\frac{l+1}{r^{l+2}} \right)_{r=a} Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \\ \downarrow \\ = -\kappa_1 \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l (l r^{l-1}) \Big|_{r=a} Y_{l,m}(\theta, \varphi) - \kappa_1 v_0 B_{0,x} \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Poi, sostituendo l'espressione (30) di  $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  e semplificando, si arriva all'uguaglianza

$$\begin{aligned} (1/2) v_0 B_{0,x} (2\kappa_1 + \kappa_2) \sin \theta \sin \varphi = \\ = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (l\kappa_1 + (l+1)\kappa_2) \alpha_l a^{l-1} P_{l,m}(\cos \theta) (C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)). \end{aligned} \quad (34)$$

Ora, consultando, e.g., [13], P. 724, o costruendo (v. APPENDICE, Eq.i (1.1) e (1.1.2)) una tabella di *Funzioni di Legendre Associate*, segue, dal *Principio di Identità delle Serie*, che

$$\begin{aligned} C_{l,m} &\equiv 0 \quad \forall l \text{ e, quindi, anche } \forall m; \\ \gamma_{l,m} &:= \alpha_l S_{l,m} \equiv 0 \quad \forall \{l, m\} \neq \{1, 1\}. \end{aligned}$$

Così, poiché solo  $\gamma_{11} \equiv \alpha_1 S_{11} \neq 0$ , l'Eq. (34) si riduce alla forma

$$(1/2) v_0 B_{0,x} (2\kappa_1 + \kappa_2) \sin \theta \sin \varphi = (\kappa_1 + 2\kappa_2) \gamma_{1,1} \sin \theta \sin \varphi,$$

dalla quale, risulta

$$\gamma_{1,1} = v_0 B_{0,x} \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{2(\kappa_1 + 2\kappa_2)}. \quad (35)$$

A loro volta, i potenziali (31) e (32) assumono le forme esplicite

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(r, \theta, \varphi) &= \gamma_{1,1} r P_{1,1}(\cos \theta) \sin \varphi \\ &= v_0 B_{0,x} \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{2(\kappa_1 + 2\kappa_2)} r \sin \theta \sin \varphi \equiv v_0 B_{0,x} \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{2(\kappa_1 + 2\kappa_2)} y, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Psi_2^*(r, \theta, \varphi) = \gamma_{11} \frac{a^3}{r^2} P_{1,1}(\cos \theta) \sin \varphi \equiv v_0 B_{0,x} a^3 \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{2(\kappa_1 + 2\kappa_2)} \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^2}. \quad (37)$$

Dalle Eq.i (28), (36), (27) e (37), si calcolano prontamente le espressioni dei campi elettrostatici

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1^* &\equiv -\nabla\Phi_1^* = \frac{3}{2}v_0B_{0,x}\frac{\kappa_2}{\kappa_1+2\kappa_2}\hat{y} \\ &= \frac{3}{2}v_0B_{0,x}\frac{\kappa_2}{\kappa_1+2\kappa_2}(\hat{r}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\phi}\cos\varphi),\end{aligned}\quad (38)$$

un campo *uniforme, ortogonale* sia a  $B_0$  che a  $v_\infty$ , e

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2^* &\equiv -\nabla\Phi_2^* = v_0B_{0,x}\left(\hat{r}\left(1 + \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta\sin\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{2(\kappa_1 + 2\kappa_2)}\frac{a^3}{r^3}\right)(\hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\phi}\cos\varphi)\right).\end{aligned}\quad (39)$$

Infine, le Eq. (15), (38), (24) e (39) consentono di determinare, *ovunque*, il campo elettrico *totale*:

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_1^* = \frac{3}{2}v_0B_{0,x}\frac{\kappa_2}{\kappa_1+2\kappa_2}\hat{y},\quad (40)$$

(*ortogonale* sia a  $B_0$  che a  $v_\infty$  e *uniforme*), per  $r \in [0, a)$ , e

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_2 + \mathcal{E}_2^* \\ &= \frac{3v_0}{2(\kappa_1 + 2\kappa_2)}\frac{a^3}{r^3}(\hat{r}B_{0,x}\kappa_1\sin\theta\sin\varphi + \hat{\theta}B_{0,x}\kappa_2\cos\theta\sin\varphi + \hat{\phi} \\ &\quad + \hat{\phi}(B_{0,x}((\kappa_1 + 2\kappa_2)(\cos\theta)^2 - (\kappa_1 + \kappa_2))\cos\varphi - B_{0,z}(\kappa_1 + 2\kappa_2)\cos\theta\sin\theta)),\end{aligned}\quad (41)$$

per  $r \in (a, +\infty)$ , nella regione del fluido.

Forme specifiche per  $\mathcal{E}_1$  ed  $\mathcal{E}_2$ , come quelle corrispondenti a  $B_0$  equiverso\contro-verso a  $\hat{x}$  (i.e.,  $B_{0,z} \equiv 0$ ) o a  $\hat{z}$  (i.e.,  $B_{0,x} \equiv 0$ ) possono essere estratte facilmente dalle Eq.i (40) e (41). ■

**I.4** La *Legge di Gauss-Maxwell* è rappresentata da un'equazione differenziale *deterministica* che connette una distribuzione di carica in un certo volume al campo elettrico che essa produce.

Pertanto, campi elettrici *magneto-motori* sono campi di *altro* tipo, essendo generati diversamente e governati da una legge differente, quella di *Faraday-Maxwell*.

Qui, sono implicati *solo* i campi  $\mathcal{E}_1^*$  ed  $\mathcal{E}_2^*$  che, per il *Principio di Sovrapposizione* dei campi *lineari*, sono *separabili* dai campi elettrici di origine non-statica.

Nel limite di una distribuzione di carica  $\sigma$  sull'interfaccia tra due conduttori, la *Legge di Gauss-Maxwell* si riduce alla *condizione di frontiera* sulla componente *normale* del campo elettrico in corrispondenza di tale interfaccia.

Così, dalle Eq. (38) e (39), si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma(\theta, \varphi) &= \varepsilon_0\left(\lim_{r \rightarrow a^+} \mathcal{E}_{2,r}^*(r, \theta, \varphi) - \lim_{r \rightarrow a^-} \mathcal{E}_{2,r}^*(r, \theta, \varphi)\right) \\ &= \frac{3}{2}\varepsilon_0v_0B_{0,x}\frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\sin\theta\sin\varphi.\end{aligned}\quad (42)$$

Si noti che, se  $B_0$  è *azimutalmente simmetrico* ( $\Rightarrow \sin\theta \equiv 0$ ), non è indotta alcuna distribuzione

non-uniforme della carica  $Q_1$  sulla superficie della sfera.

Inoltre, come affermato nella Parte I.1, P. 4, la sfera rimane elettricamente neutra,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{V_1} \sigma(\theta', \varphi') dv' = \int_0^a r'^2 \delta(a-r') dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \sigma(\theta', \varphi') d\varphi' \\ &= \frac{3}{2} \varepsilon_0 v_0 B_{0,x} a^2 \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \int_0^\pi (\sin \theta)^2 d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \equiv 0, \end{aligned}$$

poiché la parte azimutale dell'integrale è nulla. ■

I.5 La potenza termo-elettrica dissipata (v. [2], [3], [4], [5], [6], [7]) *nella sfera*, corrispondente al riscaldamento *Joule* della sfera, è data da

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \int_{V_1} \kappa_1 \|\mathbf{E}_1\|^2 dv_1 = \kappa_1 \left( \frac{3}{2} v_0 B_{0,x} \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \right)^2 \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) \\ &= 3\pi v_0^2 B_{0,x}^2 a^3 \frac{\kappa_1 \kappa_2^2}{(\kappa_1 + 2\kappa_2)^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Circa il fluido, tenendo a mente che il prodotto scalare è *invariante* rispetto alla scelta del sistema di coordinate *ortogonali* di rappresentazione, si può scrivere

$$\|\mathbf{E}_2\|^2 \equiv \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathcal{E}_{2,r}^2 + \mathcal{E}_{2,\theta}^2 + \mathcal{E}_{2,\varphi}^2.$$

I quadrati delle componenti scalari sferiche di  $\mathbf{E}_2$  si calcolano dall'Eq. (41):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{2,r}^2 &= \frac{9}{4} \frac{v_0^2 B_{0,x}^2 a^6}{(\kappa_1 + 2\kappa_2)^2} \kappa_1^2 \frac{(\sin \theta \sin \varphi)^2}{r^6}, \\ \mathcal{E}_{2,\theta}^2 &= \frac{9}{4} \frac{v_0^2 B_{0,x}^2 a^6}{(\kappa_1 + 2\kappa_2)^2} \kappa_2^2 \frac{(\cos \theta \sin \varphi)^2}{r^6}, \\ \mathcal{E}_{2,\varphi}^2 &= \frac{9}{4} \frac{v_0^2 B_{0,x}^2 a^6}{(\kappa_1 + 2\kappa_2)^2} \left( (\kappa_1 + 2\kappa_2)(\cos \theta)^2 - (\kappa_1 + \kappa_2) \right)^2 \frac{(\cos \varphi)^2}{r^6} - \\ &\quad \downarrow - \frac{9}{2} \frac{v_0^2 B_{0,x} B_{0,z} a^6}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \left( (\kappa_1 + 2\kappa_2)(\cos \theta)^2 - (\kappa_1 + \kappa_2) \right) \frac{\cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{r^6} + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \frac{9}{4} v_0^2 B_{0,z}^2 a^6 \frac{(\cos \theta \sin \theta)^2}{r^6}. \end{aligned}$$

Pertanto, la potenza dissipata come calore-per-unità-di-tempo *all'interno del fluido* assume la forma generale

$$P_2 \equiv \int_{V_2} \kappa_2 \|\mathbf{E}_2\|^2 dr_2^3 = \kappa_2 \int_{V_2} (\mathcal{E}_{2,r}^2 + \mathcal{E}_{2,\theta}^2 + \mathcal{E}_{2,\varphi}^2) dr_2^3.$$

Un controllo dei termini integrandi evidenzia che il contributo proveniente dal secondo termine in  $\mathcal{E}_{2,\varphi}^2$ , quello *sovragraffato* contenente il prodotto *misto*  $B_{0,x} B_{0,z}$ , è nullo, annullandosi *entrambi* gli integrali angolari. Segue che

$$\mathbf{P}_2 = \frac{9}{4} v_0^2 a^6 \kappa_2 \int_0^{+\infty} r^2 dr \frac{1}{r^6} \left( \frac{B_{0,x}^2}{(\kappa_1 + 2\kappa_2)^2} \left( \int_0^{2\pi} d\varphi (\sin \varphi)^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta ((\kappa_1 \sin \theta)^2 + (\kappa_2 \cos \theta)^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos \varphi)^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta ((\kappa_1 + 2\kappa_2) (\cos \theta)^2 - (\kappa_1 + \kappa_2))^2 \right) + \right. \\ \left. + B_{0,z}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta (\cos \theta \sin \theta)^2 \right).$$

Le  $\theta$ -integrazioni si eseguono facilmente mediante la trasformazione  $u := \cos \theta$ , corrispondente al cambiamento  $\int_0^\pi (\sin \theta d\theta) \mapsto \int_{-1}^1 (du)$  dell'elemento integrale. Il risultato finale è

$$\mathbf{P}_2 = \frac{\pi}{5} v_0^2 a^3 \kappa_2 \left( 3B_{0,x}^2 \frac{3\kappa_1^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_2^2}{(\kappa_1 + 2\kappa_2)^2} + 2B_{0,z}^2 \right). \quad (44)$$

Infine, la perdita *totale* di potenza termoelettrica nel sistema sfera-fluido ammonta a

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \frac{\pi}{5} v_0^2 a^3 \kappa_2 \left( 3B_{0,x}^2 \frac{3\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} + 2B_{0,z}^2 \right). \quad (45)$$

Rispetto all'*f*-sistema di riferimento, quello in cui il fluido appare *fermo*, l'Eq. (45) esprime la quantità totale di calore-per-unità-di-tempo dissipata dalla sfera *in tutto* lo spazio, sia in sé stessa che nel fluido, a causa di una forza netta risultante,  $\mathbf{F}_R$ , che si oppone al suo moto attraverso il fluido. Più avanti, nella soluzione I.7, si argomenterà brevemente circa la natura di tale forza, la cui insorgenza è dovuta all'interazione *magneto-idrodinamica* tra il campo esterno  $\mathbf{B}_0$  di induzione magnetica e il sistema sfera-fluido.

Poiché  $\mathbf{P}$  deve risultare equivalente alla potenza meccanica *persa* dalla sfera vs. lo spazio *intero*, si ha, nell'*f*-sistema,

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v}_0 = (-F_R \hat{\mathbf{z}}) \cdot v_0 \hat{\mathbf{z}},$$

avendo scelto che sia, in ogni caso,  $F_R v_0 > 0$  (concordanza dei segni).

Pertanto, dall'Eq. (45), si conclude che

$$\mathbf{F}_R = -\frac{\pi}{5} v_0 a^3 \kappa_2 \left( 3B_{0,x}^2 \frac{3\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} + 2B_{0,z}^2 \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (46)$$

I.6 La potenza termica dissipata all'interno di un volume infinitesimo della sfera si esprime come

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_1 &\equiv \kappa_1 \|\mathbf{E}_1\|^2 dr_1^3 \\ &= d(\dot{W}_1/dt), \quad \text{il lavoro } \textit{non-conservativo} \text{ eseguito per-unità-di-tempo dalla forza} \\ &\quad (dQ_1)(J_1/\kappa_1) \equiv (dQ_1) \mathbf{E}_1 \text{ sulla carica contenuta nel volume } dr_1^3, \\ &\equiv d(\dot{Q}_1/dt), \quad \text{il differenziale del } \textit{tasso} \text{ di calore equivalente, } \dot{Q}_1, \text{ dissipato in } dv_1 \text{ per} \\ &\quad \textit{effetto Joule}. \end{aligned}$$

Allora, mantenendo la temperatura  $T \equiv T(\mathbf{r})$  *stazionaria* e indicando con  $S_1$  la funzione *entropia*



(sufficientemente regolare) della sfera, risulta

$$\frac{\kappa_1 \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_1\|^2}{T} dv_1 = \frac{d(d\mathbf{Q}_1/T)}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(d\mathcal{S}_1), \quad \text{il tasso di variazione di entropia nel volume } dr_1^3, \\ \equiv d(d\mathcal{S}_1/dt), \quad \text{la variazione del tasso di entropia nel volume } dr_1^3.$$

Integrando su tutto il volume della sfera e avvalendosi dell'Eq. (38) in forma cartesiana, si ottiene

$$\frac{d\mathcal{S}_1}{dt} = \int_{V_1} \frac{\kappa_1 \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_1\|^2}{T} dr_1^3 = \kappa_1 \left( \frac{3}{2} v_0 B_{0,x} \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \right)^2 \int_{V_1} \frac{dr_1^3}{T(\mathbf{r})}.$$

L'integrazione ulteriore rispetto al tempo dà

$$\Delta\mathcal{S}_1 = \frac{9}{4} v_0^2 B_{0,x}^2 \frac{\kappa_1 \kappa_2^2}{(\kappa_1 + 2\kappa_2)^2} \Delta t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^a \frac{r^2}{T(r, \theta, \varphi)} dr. \quad (47)$$

Poiché un processo iso-entropico equivale a un processo adiabatico *qualsiasi* che avvenga tra gli stessi stati terminali di equilibrio termodinamico, in tali condizioni, il moto della sfera è *adiabatico* se  $\Delta\mathcal{S}_1 \equiv 0$ . Dall'Eq. (47), questo implica che sia  $B_{0,x} \equiv 0$ . In altri termini, il moto adiabatico (tra stati di equilibrio termodinamico) si realizza sse  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{v}_\infty$  sono *paralleli*.

La conseguenza più immediata è, allora, che la variazione assoluta di entropia è *massima* quando  $\mathbf{B}_0$  è totalmente *trasverso* alla direzione del moto della sfera, i.e., quando  $B_{0,z} \equiv 0$ . ■

I.7 L'*s*-osservatore vede la sfera subire una spinta,  $\mathbf{F}'$ , *longitudinale* (i.e., parallela a  $\mathbf{v}_\infty$ ).

Ovviamente, in virtù del *Principio di Invarianza Galileiana*,  $\mathbf{F}'$  e  $\mathbf{F}_R$  hanno rappresentazioni *identiche* e, quindi,

$$\mathbf{F}' \equiv \mathbf{F}_R = -\frac{\pi}{5} a^3 v_0 \kappa_2 \left( 3B_{0,x}^2 \frac{3\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} + 2B_{0,z}^2 \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (48)$$

Ora, è necessario identificare la *forza di Lorentz* sulla sfera, generata dall'accoppiamento vettoriale tra la densità di corrente parassita *interna* e il campo di induzione magnetica applicato al sistema:

$$\mathbf{F}_L = \int_{V_1} \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 dr_1^3 \equiv \kappa_1 \int_{V_1} \boldsymbol{\mathcal{E}}_1 \times \mathbf{B}_0 dr_1^3 = 2\pi a^3 \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} v_0 (B_{0,x} B_{0,z} \hat{\mathbf{x}} - B_{0,x}^2 \hat{\mathbf{z}}). \quad (49)$$

La *Forza di Lorentz* risulta scomponibile in una parte *longitudinale*,  $\propto -B_{0,x}^2 \hat{\mathbf{z}}$ , che *contribuisce alla spinta longitudinale totale*, Eq. (48), e in una parte *trasversa*,  $\propto B_{0,x} B_{0,z} \hat{\mathbf{x}}$ , che dà una misura della *tendenza di  $\mathbf{v}_\infty$  a orientarsi parallelamente a  $\mathbf{B}_0$*  (per l'*f*-osservatore, è la direzione della velocità della sfera che tende ad allinearsi con  $\mathbf{B}_0$ ).

Nel caso particolare in cui  $\mathbf{B}_0$  è parallelo alla direzione del moto del fluido,  $\mathbf{F}_L = \mathbf{0}$ , così che

$$\mathbf{F}' = -\frac{2}{5} \pi a^3 v_0 \|\mathbf{B}_0\|^2 \kappa_2 \hat{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{F}'_{\parallel} \quad (50)$$

(il pedice ' $\parallel$ ' indica la condizione di parallelismo tra  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{v}_\infty$ ).

Poiché la simmetria azimutale completa del flusso del fluido preclude la possibilità di qualsiasi azione *meccanica trasversa* esercitata dal fluido sulla sfera, l'Eq. (50) descrive la forza *totale* subita dalla sfera quando  $B_{0,x} \equiv 0$ . In questo caso,  $\mathbf{F}'_{\parallel}$  è dovuto unicamente al moto relativo del fluido (regime idrodinamico puro).

Invece, quando  $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{v}_{\infty}$ , allora,  $\mathbf{F}_L$  è di origine *magnetica trasversa* e, quindi,

$$\mathbf{F}' = -\frac{3}{5}\pi a^3 v_0 \|\mathbf{B}_0\|^2 \frac{\kappa_2(3\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \hat{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{F}'_{\perp}. \quad (51)$$

Anche in questo caso, la simmetria azimutale completa del flusso del fluido impedisce qualsiasi effetto *meccanico trasverso* sulla sfera, il che porta alla conclusione che l'Eq. (51) rappresenta la forza *totale* sulla sfera nel caso in cui  $B_{0,z} \equiv 0$ . Però, rispetto a  $\mathbf{F}'_{\parallel}$ , c'è una differenza:  $\mathbf{F}'_{\perp}$  include anche il contributo *lorentziano*, ridotto a

$$\mathbf{F}_{L,z} \equiv -2\pi a^3 v_0 B_{0,x}^2 \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \hat{\mathbf{z}}. \quad (51.1)$$

Segue immediatamente ( $B_{0,z} \equiv 0$ ) che

$$\mathbf{F}'_{\perp} \equiv \mathbf{F}_{L,z} - \frac{2}{5}\pi a^3 v_0 \|\mathbf{B}_0\|^2 \frac{\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \hat{\mathbf{z}}. \quad (51.2)$$

□

Con qualsiasi altra direzione di  $\mathbf{B}_0$ , insorgono *effetti meccanici trasversi*; a quella *lorentziana* pura, è da attendersi l'azione di altre forze generate dalla *rottura di simmetria longitudinale* nella dinamica del flusso.

Un'espressione generale della *forza totale* sulla sfera,  $\mathbf{F}_T$ , può essere dedotta dalle sue due forme specializzate (50) e (51), sfruttando il fatto che  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{v}_{\infty}$  sono vettori aventi *norma uniforme*.

Mantenendo  $\mathbf{v}_{\infty}$  fisso, si può ruotare  $\mathbf{B}_0$  nel piano rappresentativo  $X \times Z$  tra le due orientazioni estreme, da quella parallela a quella ortogonale all'asse  $Z$ . In tal modo,  $\mathbf{F}_T$  *evolve* tra le forme (50) e (51) *con continuità*.

Sostituzioni ovvie permettono di riscrivere le Eq. (50) e (51), rispettivamente,

$$\mathbf{F}'_{\parallel} = \frac{2}{5}\pi a^3 \kappa_2 (\mathbf{v}_{\infty} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{F}_{T,\parallel}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{\perp} &= -\frac{3}{5}\pi a^3 \frac{\kappa_2(3\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}_{\infty}) \\ &= -\frac{3}{5}\pi a^3 \frac{\kappa_2(3\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} ((\mathbf{v}_{\infty} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 - \|\mathbf{B}_0\|^2 \mathbf{v}_{\infty}) \equiv \mathbf{F}_{T,\perp}, \end{aligned} \quad (53)$$

Poiché la variabilità *continua* dell'angolo  $\sphericalangle(\mathbf{v}_{\infty}, \mathbf{B}_0)$  determina una generalità sufficiente al vettore  $\mathbf{F}_T$ , di modulo *uniforme*, è corretto costruire  $\mathbf{F}_T$  formalmente *sovrapponendo* le espressioni estreme (52) e (53). Risulta

$$\mathbf{F}_T \equiv -\frac{\pi}{5} a^3 \frac{\kappa_2(7\kappa_1 - \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} (\mathbf{v}_{\infty} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 + 3 \frac{\pi}{5} a^3 \frac{\kappa_2(3\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \|\mathbf{B}_0\|^2 \mathbf{v}_{\infty} \quad (54)$$

$$\equiv c_1 \mathbf{B}_0 + c_2 \mathbf{v}_\infty,$$

combinazione lineare (prevedibile) dei campi (uniformi)  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{v}_\infty$ .

Le Eq. (50) e (51) vengono dall'Eq. (54), sostituendovi  $\mathbf{v}_\infty \equiv -v_0 \hat{\mathbf{z}}$  e  $\angle(\mathbf{v}_\infty, \mathbf{B}_0) \equiv 0, \pi, \pm \pi/2$ . La verifica è elementare.

Inoltre, mediante la definizione operativa  $B_0 := B_{0,x} \hat{\mathbf{x}} + B_{0,z} \hat{\mathbf{z}}$ , l'Eq. (54) diventa

$$\mathbf{F}_T \equiv \frac{\pi}{5} a^3 \frac{\kappa_2 (7\kappa_1 - \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} v_0 B_{0,x} B_{0,z} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\pi}{5} a^3 v_0 \kappa_2 \left( 3B_{0,x}^2 \frac{3\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} + 2B_{0,z}^2 \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (54.1)$$

L'Eq. (54.1) vale vs. sia l'*s*-osservatore sia l'*f*-osservatore; la spinta *longitudinale* (48) sulla sfera appare in modo esplicito.

Il confronto tra  $\mathbf{F}_T$  e  $\mathbf{F}_L$  evidenzia la presenza di una forza puramente *meccanica*,  $\mathbf{F}_M$ , di natura *idrodinamica*, agente sulla sfera. Se ne ottengono facilmente le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_M &= \mathbf{F}_T - \mathbf{F}_L \\ &= -\frac{\pi}{5} a^3 \frac{\kappa_2 (3\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1 + 2\kappa_2} v_0 B_{0,x} B_{0,z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\pi}{5} a^3 v_0 \kappa_2 \left( B_{0,x}^2 \frac{\kappa_1 - 3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} - 2B_{0,z}^2 \right) \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (55.1)$$

$$\equiv \frac{\pi}{5} a^3 \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \left( (3\kappa_1 + \kappa_2) (\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 - \frac{\kappa_1 - 3\kappa_2}{v_0^2} ((\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{B}_0)^2 + (\mathbf{v}_\infty \times \mathbf{B}_0)^2) \mathbf{v}_\infty \right). \quad \downarrow (55.2)$$

■■■



Fig. 2 – Simulazione di sovrapposizione di fluttuazioni TEM 8-16-polari *pure* in un plasma tenue (*plasma dance 2*).

## II. Moto rotazionale uniforme in regime di flusso stazionario

Sia  $\omega_0$  la velocità angolare *uniforme* nel fluido della sfera intorno a un suo diametro.

- II.1 Si discutano la natura e le caratteristiche del *campo elettrico* e la *densità di corrente* corrispondente indotti *ovunque*, sia all'interno che all'esterno della sfera;
- II.2 si determinino le *condizioni di frontiera* sufficienti compatibili con il problema;
- II.3 si ottenga *ovunque* un'espressione del campo elettrico *totale*;
- II.4 si calcoli la densità di carica elettrica indotta sulla superficie della sfera;
- II.5 si calcoli la *potenza termoelettrica* totale dissipata (effetto Joule), causata dalle correnti parassite indotte che circolano attraverso l'intero sistema sfera-fluido.  
Poi, si determini il *momento di forza resistente* netto,  $\tau_R$ , subito dalla sfera nel fluido;
- II.6 si esprima la variazione di *entropia* della sfera, alla temperatura *radiale* stazionaria  $T(r)$  durante un intervallo di tempo  $\Delta t$ , tra stati terminali di equilibrio termodinamico, discutendo le condizioni magnetiche sufficienti per il suo moto *adiabatico* nel fluido;
- II.7 si calcoli il *momento di forza totale* sulla sfera, separandone le componenti *resistente* e *trasversa*.

### Soluzione

Si assuma, come riferimento, l'*f-sistema* (solidale con il fluido) fissando l'origine nel centro della sfera. L'*f-osservatore*, che vede la sfera ruotare intorno all'asse  $Z$ , descriverà

$$\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \omega_0 \hat{\mathbf{z}}.$$

Come nel problema precedente del moto traslatorio, il campo di induzione magnetica applicato è posto nel piano  $X \times Y$ , così da essere espresso dall'Eq. (23).

□

- II.1 Le cariche elettriche libere della sfera (solida) sono trascinate, nella rotazione, su traiettorie circolari coassiali. Pertanto, un campo elettrico *magneto-motore*,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}' \equiv \boldsymbol{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})$ , viene indotto *all'interno* della sfera. È più opportuno riferire la sua rappresentazione all'intero spazio,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}' \equiv \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{E}}'_1 = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_0, & \text{per } r \in [0, a), \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}'_2 = \mathbf{0}, & \text{per } r \in (a, +\infty), \end{cases} \quad (56)$$

essendo  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}$  il campo di velocità di trascinamento delle cariche libere *nella* sfera.

Ora,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}'_1$  non è irrotazionale, il che è consistente con la rotazione *stazionaria* della sfera. Infatti,

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}'_1 &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = \cancel{(\nabla \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{v}} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} - \cancel{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0} \\ &= -(\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r})) \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) \\ &= \cancel{\boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{r})} - \cancel{\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}_0)} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{r}, & \text{essendo } \boldsymbol{\omega}_0 \text{ uniforme,} \\ &= \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{B}_0 \equiv \omega_0 B_{0,x} \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Comunque,  $\mathbf{E}'_1$  non è neppure solenoidale; infatti, si calcola

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}'_1 &= \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \cancel{\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_0)} = \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r})) \\ &= \mathbf{B}_0 \cdot ((\nabla \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega}_0 - \cancel{(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{r}} + \cancel{(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_0} - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla) \mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 \cdot (3\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0) \\ &= 2\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{B}_0 \equiv 2\omega_0 B_{0,z}.\end{aligned}\quad (58)$$

Il risultato fornito dall'Eq. (58) porta ad alcune conseguenze interessanti.

Si consideri la sfera *proprio all'istante* iniziale della rotazione. Poiché è ancora  $\mathbf{E}'_2 = \mathbf{0}$ , anche  $\mathcal{E}'_{2,r} = 0$ , ovviamente. Là dove  $\mathcal{E}'_{1,r}(a, \theta, \varphi) \neq 0$ , la discontinuità alla frontiera della componente normale del campo elettrico *magneto-motore* indica che una ridistribuzione delle cariche elettriche libere sta per aver luogo sulla superficie della sfera.

Una volta che il regime stazionario è raggiunto ovunque, il campo elettrico *totale* all'interno della sfera,  $\mathbf{E}_1$ , risulta solenoidale, com'è richiesto per un mezzo conduttore. Confrontando  $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0$  con l'Eq. (58), la conclusione è che, ora, un campo *elettrico stazionario* indotto,  $\mathbf{E}_1^*$ , tale che la sua divergenza *cancella esattamente* quella di  $\mathbf{E}'_1$ , è presente *nella* sfera,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1^* \equiv -2\omega_0 B_{0,z}.\quad (59)$$

In altri termini, il potenziale associato a  $\mathbf{E}_1^*$  soddisfa l'*Equazione di Poisson* con *densità* uniforme di carica-sorgente volumetrica data da

$$\rho_1 = -2\varepsilon_0 \omega_0 B_{0,z},$$

la quale corrisponde all'eccesso di carica *interna* alla sfera

$$Q_{1,V} = -(8/3)\pi a^3 \varepsilon_0 \omega_0 B_{0,z}.\quad (60.1)$$

Quindi, poiché la sfera rimane *elettricamente neutra* complessivamente, essa deve portare una carica netta opposta *sulla superficie*,

$$Q_{1,S} = -Q_{1,V} \equiv (8/3)\pi a^3 \varepsilon_0 \omega_0 B_{0,z},\quad (60.2)$$

come sarà verificato esplicitamente nella soluzione II.4. La differenza, qui, rispetto al moto traslatorio, è che l'effetto di induzione non si limita, semplicemente, a ridistribuire le cariche libere sulla superficie della sfera: di fatto, due quantità opposte di carica vengono mantenute confinate, una *nella* sfera l'altra *sulla* sua superficie, a seconda del segno di  $\omega_0 B_{0,z}$ .

Per quanto riguarda  $Q_{1,S}$ , essa è sorgente di un campo elettrostatico all'interno del fluido,  $\mathbf{E}_2^*$ , che soddisfa l'*Equazione di Laplace* e corrisponde, nel fluido, al campo elettrico *totale*. □

Potrebbe essere sollevata una critica immediata circa l'omissione degli effetti incrociati di  $Q_{1,V}$  sul fluido e di  $Q_{1,S}$  sulla regione interna alla sfera, entrambi da attendersi secondo il *Principio di Sovrapposizione*. L'obiezione, però, cade su una questione sottile ma fondamentale: finché la sfera continua a ruotare *uniformemente*, il regime elettrico dominante nell'*f*-sistema non è quello statico bensì quello di *corrente stazionaria*! Le sorgenti elettriche sono *indotte*, non puramente statiche. La condizione di frontiera, alla superficie della sfera, di *continuità* della componente normale della densità di corrente *stazionaria*, *mantiene soppressi* gli effetti di *rotore* paventati, impedendo un accumulo illimitato – e, quindi, non-fisico – di energia elettromagnetica all'interno della sfera.

Come conclusione, la rappresentazione spaziale completa del campo elettrico *totale* è

$$\mathbf{E} \equiv \begin{cases} \mathbf{E}_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{E}_1^*, & \text{per } r \in [0, a), \\ \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^*, & \text{per } r \in (a, +\infty). \end{cases} \quad (61)$$

Analogamente alle Eq. (15), la singolarità di sorgente alla superficie della sfera traspare dalle Eq. (61). Per rendere l'*intero* spazio topologicamente continuo vs. il raccordo delle funzioni-potenziale interna ed esterna alla frontiera  $r = a$ , queste sono richieste di soddisfare le *Equazioni di Poisson generalizzate* seguenti:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1^* &\equiv -\nabla \cdot \mathbf{E}_1^* = 2\omega_0 B_{0,z} \Theta(a-r) + \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{\varepsilon_0} \delta(a-r), & \text{per } r \in [0, a], \\ \nabla^2 \Phi_2^* &\equiv -\nabla \cdot \mathbf{E}_2^* = -\frac{\sigma(\theta, \varphi)}{\varepsilon_0} \delta(r-a), & \text{per } r \in [a, +\infty), \end{aligned} \quad (62)$$

dove  $\Theta$  è la *funzione-gradino unitaria* ( $\Theta(0) := 0$ ) di HEAVISIDE (OLIVER, 1850-1925) e  $\sigma(\theta, \varphi)$  è la densità di  $Q_{1,S}$ , sulla superficie della sfera.

Correnti *parassite* di conduzione circolano tra la sfera e il fluido, fintantoché la conduttività del fluido persiste. Se  $\kappa_2 \equiv 0$ , esse rimangono confinate all'*interno* della sfera. Tale questione sarà toccata quantitativamente nella soluzione II.5.

In generale, sia  $\mathbf{E}_1$  che  $\mathbf{E}_2$  sostengono le densità di corrente (parassita) rispettive

$$\mathbf{J}_1 = \kappa_1 \mathbf{E}_1 \equiv \kappa_1 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{E}_1^*), \quad (63)$$

$$\mathbf{J}_2 = \kappa_2 \mathbf{E}_2. \quad (64)$$

■

II.2 Le stesse considerazioni che portano all'Eq. (18) si applicano anche qui. Le condizioni di frontiera sufficienti per l'univocità della soluzione del problema sono:

a. la *continuità* della componente vettoriale *tangenziale* di  $\mathbf{E}^*$  attraverso l'interfaccia sferica,

$$\mathbf{E}_{2,\parallel}^*(a, \theta, \varphi) = \mathbf{E}_{1,\parallel}^*(a, \theta, \varphi),$$

i.e., specificamente,

$$\hat{\theta} \mathcal{E}_{2,\theta}^*(a, \theta, \varphi) + \hat{\varphi} \mathcal{E}_{2,\varphi}^*(a, \theta, \varphi) = \hat{\theta} \mathcal{E}_{1,\theta}^*(a, \theta, \varphi) + \hat{\varphi} \mathcal{E}_{1,\varphi}^*(a, \theta, \varphi). \quad (65)$$

L'Eq (64) equivale alla coppia di condizioni scalari simultanee

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{2,\theta}^*(a, \theta, \varphi) = \mathcal{E}_{1,\theta}^*(a, \theta, \varphi), \\ \mathcal{E}_{2,\varphi}^*(a, \theta, \varphi) = \mathcal{E}_{1,\varphi}^*(a, \theta, \varphi). \end{cases} \quad (66)$$

Le Eq. (62) mostrano che i potenziali interno ed esterno alla sfera soddisfano equazioni di *campo* differenti (quasi) ovunque nei dominî rispettivi. Questa circostanza rende il metodo di identificazione biunivoca dei coefficienti (cf/c Eq. (20)) *non applicabile*. Per esserlo, i termini di sorgente dovrebbero risultare *identici*;

b. la *continuità* della componente *normale* della densità di corrente (stazionaria) attraverso l'interfaccia sferica, v. Eq. (21);

c. l'evanescenza di  $\mathcal{E}_2$  a distanze crescenti dalla sfera, i.e.,  $\forall \{\theta, \varphi\}$ , deve aversi che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_2(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (67)$$

II.3 Il calcolo di  $\mathcal{E}'_1$  è immediato:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_1 &\equiv \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 = (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}_0 = (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{r} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega}_0 \\ &= \omega_0 B_{0,z} (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) - (B_{0,x} x + B_{0,z} z) \omega_0 \hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv \omega_0 B_{0,z} \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 + y^2)/2 - \omega_0 B_{0,x} x \hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv \omega_0 B_{0,z} \nabla (x^2 + y^2)/2 - \omega_0 B_{0,x} x \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Esprimendo l'Eq. (68) in coordinate sferiche, si ottiene

$$\mathcal{E}'_1 \equiv \frac{1}{2} \omega_0 B_{0,z} \nabla (r^2 (\sin \theta)^2) - \omega_0 B_{0,x} r \sin \theta \cos \varphi (\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) \quad (69)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{\mathbf{r}} \omega_0 r (-B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi + B_{0,z} (\sin \theta)^2) + \downarrow \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}} \omega_0 r (-B_{0,x} (\sin \theta)^2 \cos \varphi + B_{0,z} \cos \theta \sin \theta). \end{aligned} \quad (70)$$

Dalla rappresentazione (70), la componente di  $\mathcal{E}'_1$  normale alla superficie della sfera,

$$\lim_{r \rightarrow a^-} \mathcal{E}'_{1,r}(r, \theta, \varphi) \equiv \omega_0 a (-B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi + B_{0,z} (\sin \theta)^2), \quad (71)$$

appare generalmente non-nulla in regime stazionario. Questo è sufficiente per concludere che è stata indotta una redistribuzione di cariche elettriche libere alla superficie della sfera poiché, dalla seconda delle Eq. (56), risulta  $\lim_{r \rightarrow a^+} \mathcal{E}'_{2,r}(r, \theta, \varphi) \equiv 0$ .

La determinazione di  $\mathcal{E}_1^*$  richiede un'analisi un po' attenta. Ricordando che  $\mathcal{E}_1^* = -\nabla \Phi_1^*$ , si può, dalla *Teoria delle Equazioni DDP* (ellittiche), cercare una funzione *potenziale-interno* della forma

$$\Phi_1^*(\mathbf{r}) := \Psi_1^*(\mathbf{r}) + H_1(\mathbf{r}).$$

La funzione  $\Psi_1^*(\mathbf{r})$  è rappresentabile con l'espansione (31), i.e., soddisfa l'*Equazione di Laplace*, mentre la richiesta su  $H_1(\mathbf{r})$  è che generi il *termine soppressore* di  $\nabla \cdot \mathcal{E}'_1$ , i.e., che soddisfi l'*equazione di Poisson*  $\nabla^2 H_1(\mathbf{r}) = 2\omega_0 B_{0,z}$  all'interno della sfera (cf/c Eq. (58)).

Però, un'incertezza affiora evidente:  $H_1(\mathbf{r})$  potrebbe essere un elemento *qualsiasi* della famiglia

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}; \alpha, \beta, \gamma) := \left\{ \eta: \{\mathbf{r}; \alpha, \beta, \gamma\} \mapsto \eta(\mathbf{r}; \alpha, \beta, \gamma) := \omega_0 B_{0,z} \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{\alpha + \beta + \gamma} \right\}$$

di funzioni-potenziale, caratterizzata dalla terna parametrica  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \{0, 0, 0\}$ . Infatti, risulta  $\nabla^2 \eta(\mathbf{r}; \alpha, \beta, \gamma) \equiv 2\omega_0 B_{0,z}$ ,  $\forall \{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \{0, 0, 0\}$ , come è immediato verificare.

Con  $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\} \subset \mathcal{C} \setminus \{0\}$ , le famiglie di terne parametriche formalmente ammissibili sono 7:

$$\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}, \{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0\}, \{\bar{\alpha}, 0, \bar{\gamma}\}, \{0, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}, \{\bar{\alpha}, 0, 0\}, \{0, \bar{\beta}, 0\} \text{ e } \{0, 0, \bar{\gamma}\},$$

ma, nel contesto specifico, *soltanto una* può risultare *fisicamente* significativa. A tale proposito, si indichi con  $\partial \mathbf{E}'_1$ , la *parte divergenziale* di  $\mathbf{E}'_1$ . Nell'Eq. (68), è

$$\partial \mathbf{E}'_1 \equiv \omega_0 B_{0,z} \nabla(x^2 + y^2)/2 = \omega_0 B_{0,z} (x\hat{x} + y\hat{y}). \quad (72)$$

Ora, dall'*equazione di Continuità della densità di carica elettrica*, la quantità

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{J}'_1 \\ &\equiv -\nabla \cdot (\kappa_1 \partial \mathbf{E}'_1) \equiv -\kappa_1 \nabla \cdot \mathbf{E}'_1 = -2\kappa_1 \omega_0 B_{0,z} \end{aligned}$$

è il tasso di flusso per-unità-di-volume delle cariche *libere* guidate dal *solo* campo  $\mathbf{E}'_1$ . Il punto importante, qui, è osservare che un regime *persistente* di corrente stazionaria può essere raggiunto solo in presenza di un campo elettrico aggiuntivo che *non* causa alcun effetto di cancellazione su  $\partial \mathbf{E}'_1$ , né totale né parziale, ma che, semplicemente, *annichila la sua divergenza*.

In altri termini, l'Eq. (72) indica che è *sufficiente* un campo elettrico che sia *normale* a  $\partial \mathbf{E}'_1$ , i.e., *assiale*, in grado di far persistere un flusso 'stabilizzante' di cariche elettriche libere attraverso la superficie della sfera e parallelo all'asse di rotazione di questa.

La conclusione è che soltanto l'ultima delle terne precedenti,  $\{0, 0, \bar{\gamma}\}$ , con  $\bar{\gamma} \neq 0$ , è *fisicamente significativa* per l'identificazione di  $H_1(\mathbf{r})$ . Da tale terna, si ottiene

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{r}) &= \omega_0 B_{0,z} z^2 \\ &= \omega_0 B_{0,z} r^2 (\cos \theta)^2 \equiv H_1(r, \theta) \\ &\equiv \frac{1}{2} \omega_0 B_{0,z} r^2 ((\sin \theta)^2 + (3(\cos \theta)^2 - 1)), \end{aligned} \quad (73)$$

mostrando che  $H_1(\mathbf{r})$  è scomponibile nella somma del termine *soppressore* appropriato, cf/c Eq. (69), e di un termine di aggiustamento *quadrupolare* puro che soddisfa *localmente* l'*Equazione di Laplace*, riflettendo la simmetria assiale della distribuzione di carica elettrica all'interno della sfera.  $\square$

Il passo successivo è costituito dalla determinazione di  $\mathbf{E}_2^* \equiv -\nabla \Phi_2^*$ .

In vista del *raccordo di continuità* alla frontiera  $r = a$  con  $\Phi_1^*(\mathbf{r})$ , si definisce, analogamente,

$$\Phi_2^*(\mathbf{r}) := \Psi_2^*(\mathbf{r}) + H_2(\mathbf{r}),$$

dove sia  $\Psi_2^*(\mathbf{r})$  che  $H_2(\mathbf{r})$  soddisfano l'*Equazione di Laplace* e la condizione asintotica (67).

Pertanto, la forma di  $\Psi_2^*(\mathbf{r})$  è la stessa del problema precedente di traslazione, v. Eq. (32),

$$\Psi_2^*(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \varphi).$$

Considerata la seconda condizione scalare di frontiera (66), quella *azimutale*, si scrive, tenendo conto dell'Eq. (73),

$$\left( -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Psi_2^*(r, \theta, \varphi) + H_2(\mathbf{r})) \right)_{r=a} = \left( -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Psi_1^*(r, \theta, \varphi) + H_1(r, \theta)) \right)_{r=a},$$

i.e., sostituendo le espressioni esplicite pertinenti ed eseguendo le  $\varphi$ -derivazioni, risulta



$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (\beta_l / a^{l+1}) (P_{l,m}(\cos \theta)) m (-C_{l,m} \sin(m\varphi) + S_{l,m} \cos(m\varphi)) + \partial H_2(\mathbf{r}) / \partial \varphi \Big|_{r=a} = \downarrow$$

$$\downarrow = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l a^l (P_{l,m}(\cos \theta)) m (-C_{l,m} \sin(m\varphi) + S_{l,m} \cos(m\varphi)) + \cancel{\partial H_1(r, \theta) / \partial \varphi} \Big|_{r=a}.$$

Applicando il *Principio di Identità delle Serie*, si vede immediatamente che  $\partial H_2(\mathbf{r}) / \partial \varphi \Big|_{r=a} \equiv 0$ . Ciò implica, al più, la dipendenza  $H_2(\mathbf{r}) \equiv H_2(r, \theta)$  e, quindi, l'identità  $\beta_l \equiv \alpha_l a^{2l+1}$ , come nel problema traslazionale, cf/c Eq. (29).

Ora, la prima condizione scalare di frontiera (66), quella *polare*, può essere usata per determinare  $H_2(r, \theta)$ . Le sostituzioni varie e l'Eq. (73) ne forniscono la forma più esplicita

$$\left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi_2^*(r, \theta, \varphi) + H_2(r, \theta)) \right)_{r=a} = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi_1^*(r, \theta, \varphi) + \omega_0 B_{0,z} r^2 (\cos \theta)^2) \right)_{r=a},$$

equivalente all'uguaglianza

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l \frac{a^{2l+1}}{a^{l+1}} \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + \frac{\partial H_2(r, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \downarrow$$

$$\downarrow = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l a^l \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - \omega_0 B_{0,z} a^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Passando all'uguaglianza tra i  $\theta$ -integrali indefiniti dei termini sopravvissuti nei membri,

$$\int (\partial H_2(r, \theta) / \partial \theta) \Big|_{r=a} d\theta = -\omega_0 B_{0,z} a^2 \int \cos \theta \sin \theta d\theta,$$

si trova, con  $\xi$  costante di integrazione, che

$$H_2(r, \theta) \Big|_{r=a} = \omega_0 B_{0,z} a^2 ((\cos \theta)^2 + \xi)$$

$$\equiv \omega_0 B_{0,z} a^{k+2} / r^k \Big|_{r=a} ((\cos \theta)^2 + \xi). \quad (74)$$

La specificità dell'identità (74) corrisponde all'aspettativa fondata che  $H_2(r, \theta)$  sia assorbibile nell'espansione generale (32) di  $\Psi_2^*(r, \theta, \varphi)$ . Le identificazioni rispettive delle costanti danno  $\xi = -1/3$  e  $k \equiv l+1 = 3$ ; con esse, si scrive

$$H_2(r, \theta) = \frac{1}{3} \omega_0 B_{0,z} a^5 \frac{3(\cos \theta)^2 - 1}{r^3}, \quad (75)$$

riconoscibile come un termine potenziale *quadrupolare*, azimutalmente simmetrico (v. [1], [2], [3], [5], [7], [12], [14]).

A questo punto, le informazioni disponibili sono sufficienti per avviare la determinazione dei *potenziali elettrostatici* nella sfera e nel fluido, rispettivamente. Le rappresentazioni preliminari formali sono

$$\Phi_1^*(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi) + \omega_0 B_{0,z} r^2 (\cos \theta)^2, \quad (76.1)$$

$$\Phi_2^*(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_l \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \varphi) + \frac{1}{3} \omega_0 B_{0,z} a^5 \frac{3(\cos \theta)^2 - 1}{r^3}. \quad (76.2)$$

Poi, si esegue il calcolo dei coefficienti  $\alpha_l$ , sfruttando la condizione imposta alla frontiera relativa alle componenti *normali* delle densità di corrente attraverso l'interfaccia tra la sfera e il fluido. Dall'Eq. (21), si scrive

$$\kappa_2 \lim_{r \rightarrow a^+} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \Phi_2^*(r, \theta, \varphi) \right) = \kappa_1 \left( \mathcal{E}_{1,r}(a, \theta, \varphi) + \lim_{r \rightarrow a^-} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \Phi_1^*(r, \theta, \varphi) \right) \right)$$

che, dopo le sostituzioni specifiche e qualche manovra algebrica, si trasforma nella catena

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \omega_0 B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi + (\kappa_1 + \kappa_2) \omega_0 B_{0,z} (3(\cos \theta)^2 - 1) \equiv \\ & \equiv (1/3) \kappa_1 \omega_0 B_{0,x} (P_{2,1}(\cos \theta)) \cos \varphi + 2(\kappa_1 + \kappa_2) \omega_0 B_{0,z} P_{2,0}(\cos \theta) = \\ & = -\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (l \kappa_1 + (l+1) \kappa_2) \alpha_l a^{l-2} (P_{l,m}(\cos \theta) (C_{lm} \cos(m\varphi) + S_{lm} \sin(m\varphi))). \end{aligned}$$

Disponendo della tabella solita di *Funzioni di Legendre Associate*, il confronto biunivoco degli addendi del *secondo* e del *terzo* membro porta alla conclusione immediata che  $C_{lm} \equiv 0 \forall l$  e, quindi, anche  $\forall m$ . In tal modo, si deduce che  $\gamma_{l,m} := \alpha_l S_{l,m} \equiv 0, \forall \{l, m\} \neq \{2, 1\} \vee \{2, 0\}$ .

Il rango  $m = 1$  rende conto della *rottura di simmetria assiale* nella dinamica del sistema, i.e., rappresenta la dipendenza *azimutale* introdotta dalla componente trasversale  $B_{0,x}$  del campo di induzione magnetica. I termini non-nulli nell'ultima uguaglianza scritta,

$$\begin{aligned} & (1/3) \kappa_1 \omega_0 B_{0,x} P_{2,1}(\cos \theta) \cos \varphi + 2(\kappa_1 + \kappa_2) \omega_0 B_{0,z} P_{2,0}(\cos \theta) = \downarrow \\ & \downarrow = -(2\kappa_1 + 3\kappa_2) \gamma_{2,1} (P_{2,1}(\cos \theta)) \cos \varphi - (2\kappa_1 + 3\kappa_2) \gamma_{2,0} P_{2,0}(\cos \theta), \end{aligned}$$

conducono alle identificazioni biunivoche

$$\begin{aligned} \gamma_{2,0} &= -\frac{2(\kappa_1 + \kappa_2) \omega_0 B_{0,z}}{2\kappa_1 + 3\kappa_2}, \\ \gamma_{2,1} &= -\frac{\kappa_1 \omega_0 B_{0,x}}{3(2\kappa_1 + 3\kappa_2)}. \end{aligned}$$

Le Eq. (76) e (77) assumono, allora, le loro forme finali esplicite:

$$\Phi_1^*(r, \theta, \varphi) = -\frac{\omega_0}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} r^2 (\kappa_1 B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi - B_{0,z} (\kappa_1 (\sin \theta)^2 + \kappa_2)), \quad (77.1)$$

$$\Phi_2^*(r, \theta, \varphi) = -\frac{\omega_0 \kappa_1 a^5}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \frac{1}{r^3} \left( B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{3} B_{0,z} (3(\cos \theta)^2 - 1) \right). \quad (77.2)$$

L'operazione di *gradiente* sulle Eq. (77.1) e (77.2) conclude la ricerca dei *campi elettrostatici* nei due mezzi conduttori. In coordinate sferiche, le espressioni risultanti sono

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^*(r, \theta, \varphi) &\equiv -\nabla \Phi_1^*(r, \theta, \varphi) \\ &= \frac{\omega_0}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} r (\hat{r} 2(\kappa_1 B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi - B_{0,z} (\kappa_1 (\sin \theta)^2 + \kappa_2)) + \downarrow \\ &\quad + \hat{\theta} \kappa_1 (B_{0,x} (2(\cos \theta)^2 - 1) \cos \varphi - 2B_{0,z} \cos \theta \sin \theta) + \downarrow \\ &\quad + \hat{\varphi} (-\kappa_1 B_{0,x} \cos \theta \sin \varphi)), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2^*(r, \theta, \varphi) &\equiv -\nabla \Phi_2^*(r, \theta, \varphi) \\
&= \frac{\omega_0 \kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \frac{a^5}{r^4} (\hat{r}(-3B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi - B_{0,z}(3(\cos \theta)^2 - 1)) + \downarrow \\
&\quad + \hat{\theta}(B_{0,x}(2(\cos \theta)^2 - 1) \cos \varphi - 2B_{0,z} \cos \theta \sin \theta) + \downarrow \\
&\quad + \hat{\varphi}(-B_{0,x} \cos \theta \sin \varphi)) . \tag{79}
\end{aligned}$$

Infine, mediante l'inclusione dell'Eq. (70), le Eq.i (61) generano la rappresentazione del campo elettrico *totale* ovunque:

per  $r \in [0, a)$ , all'*interno* della sfera, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_1 &= \frac{\omega_0}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} r (\hat{r} \kappa_2(-3B_{0,x} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi - B_{0,z}(3(\cos \theta)^2 - 1)) + \downarrow \\
&\quad + \hat{\theta}(B_{0,x}(\kappa_1 + 3\kappa_2(\sin \theta)^2) \cos \varphi + 3B_{0,z} \kappa_2 \cos \theta \sin \theta) + \downarrow \\
&\quad + \hat{\varphi}(-B_{0,x} \kappa_1 \cos \theta \sin \varphi)) ; \tag{80}
\end{aligned}$$

per  $r \in (a, +\infty)$ , all'*esterno* della sfera, risulta, dall'Eq. (79),

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2^* . \tag{81}$$

■

II.4 Come già sottolineato nella soluzione I.4, P. 12, solo i campi elettrici generati da cariche *statiche* vs. l'osservatore possono indurre una carica elettrica *in eccesso* sulla superficie della sfera. Dalle Eq. (78) e (79), si scrive, al solito,

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta, \varphi) &\equiv \varepsilon_0 \left( \lim_{r \rightarrow a^+} \mathcal{E}_{2,r}^*(r, \theta, \varphi) - \lim_{r \rightarrow a^-} \mathcal{E}_{2,r}^*(r, \theta, \varphi) \right) \\
&= \frac{\varepsilon_0 \omega_0 a}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} (-5B_{0,x} \kappa_1 \overline{\cos \theta \sin \theta \cos \varphi} + B_{0,z}(5\kappa_1(\sin \theta)^2 - 2(\kappa_1 - \kappa_2))) . \tag{82}
\end{aligned}$$

Si noti che  $\sigma(\theta, \varphi)$  viene indotta in *qualsiasi* circostanza, *anche* quella in cui la conduttività del fluido risulti evanescente,  $\kappa_2 \approx 0$ .

La carica netta *sulla superficie* della sfera si calcola con una  $\delta$ -integrazione diretta:

$$\begin{aligned}
Q_{1,S} &= \int_{V_1} \sigma(\theta', \varphi') dv' = \int_0^a r'^2 \delta(a - r') dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \sigma(\theta', \varphi') d\varphi' \\
&= \frac{2\pi a^3 \varepsilon_0 \omega_0 B_{0,z}}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \int_0^\pi (5\kappa_1(\sin \theta)^2 - 2(\kappa_1 - \kappa_2)) \sin \theta d\theta \\
&= \frac{8}{3} \pi a^3 \varepsilon_0 \omega_0 B_{0,z} , \tag{83}
\end{aligned}$$

avendo osservato che il termine *sovragraffato* nell'Eq. (82) non dà contributo all'integrazione (è nullo sia vs.  $\theta$  che vs.  $\varphi$ ). Il risultato (83) è identico a quello dell'Eq. (60.2), come previsto. La sfera, in ogni caso, rimane *elettricamente neutra* nel suo complesso.

■

II.5 Ora, è necessario predisporre i quadrati delle componenti scalari del campo elettrico *totale*.

a. All'interno della *sfera*, i.e., per  $r \in [0, a)$ , si calcolano

$$\mathcal{E}_{1,r}^2 = \frac{\omega_0^2 \kappa_2^2}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} r^2 (9B_{0,x}^2 (\cos\theta \sin\theta \cos\varphi)^2 + B_{0,z}^2 (9(\cos\theta)^4 - 6(\cos\theta)^2 + 1) + \sqrt{6B_{0,x}B_{0,z} \cos\theta \sin\theta (3(\cos\theta)^2 - 1) \cos\varphi}),$$

$$\mathcal{E}_{1,\theta}^2 = \frac{\omega_0^2}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} r^2 (B_{0,x}^2 (\kappa_1^2 + 9\kappa_2^2 (\sin\theta)^4 + 6\kappa_1\kappa_2 (\sin\theta)^2) (\cos\varphi)^2 + \sqrt{9B_{0,z}^2 \kappa_2^2 (\cos\theta \sin\theta)^2 + 6B_{0,x}B_{0,z} \kappa_2 (\kappa_1 + 3\kappa_2 (\sin\theta)^2) \cos\theta \sin\theta \cos\varphi}),$$

$$\mathcal{E}_{1,\varphi}^2 = \frac{\omega_0^2 B_{0,x}^2 \kappa_1^2}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} (r \cos\theta \sin\varphi)^2.$$

b. all'interno del *fluido*, i.e., per  $r \in (a, +\infty)$ , risultano, invece,

$$\mathcal{E}_{2,r}^2 = \frac{\omega_0^2 \kappa_1^2}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} \frac{a^{10}}{r^8} (9B_{0,x}^2 (\cos\theta \sin\theta \cos\varphi)^2 + B_{0,z}^2 (9(\cos\theta)^4 - 6(\cos\theta)^2 + 1) + \sqrt{6B_{0,x}B_{0,z} \cos\theta \sin\theta (3(\cos\theta)^2 - 1) \cos\varphi}),$$

$$\mathcal{E}_{2,\theta}^2 = \frac{\omega_0^2 \kappa_1^2}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} \frac{a^{10}}{r^8} (B_{0,x}^2 (4(\cos\theta)^4 - 4(\cos\theta)^2 + 1) (\cos\varphi)^2 + 4B_{0,z}^2 (\cos\theta \sin\theta)^2 - \sqrt{4B_{0,x}B_{0,z} \cos\theta \sin\theta (2(\cos\theta)^2 - 1) \cos\varphi}),$$

$$\mathcal{E}_{2,\varphi}^2 = \frac{\omega_0^2 B_{0,x}^2 \kappa_1^2}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} \frac{a^{10}}{r^8} (\cos\theta \sin\varphi)^2.$$

Inoltre, come *invarianti* vs. un *qualsiasi* sistema di riferimento *ortogonale*, sussistono le identità

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_1\|^2 &\equiv \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 = \mathcal{E}_{1,r}^2 + \mathcal{E}_{1,\theta}^2 + \mathcal{E}_{1,\varphi}^2, \\ \|\mathbf{E}_2\|^2 &\equiv \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathcal{E}_{2,r}^2 + \mathcal{E}_{2,\theta}^2 + \mathcal{E}_{2,\varphi}^2. \end{aligned}$$

I termini *sovragraffiati* in precedenza danno contributo *nullo* all'integrazione sferica, essendo nulli gli integrali azimutali rispettivi. Allora, la potenza dissipata per *effetto termo-elettrico* vale,

a. *nella sfera*,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &\equiv \int_{V_1} \kappa_1 \|\mathbf{E}_1\|^2 dr_1^3 \\ &= \frac{\omega_0^2 \kappa_1}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} \int_0^a r^2 dr r^2 (B_{0,x}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos\varphi)^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta ((\kappa_1 + 3\kappa_2)^2 - \sqrt{3\kappa_2(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2 (\cos\theta)^2} + B_{0,x}^2 \kappa_1^2 \int_0^{2\pi} d\varphi (\sin\varphi)^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\cos\theta)^2 + \end{aligned}$$

$$\downarrow + B_{0,z}^2 \kappa_1^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (3(\cos\theta)^2 + 1)).$$

La sostituzione classica,  $u := \cos\theta$  (v. P. 14) fornisce il risultato prontamente:

$$\mathbf{P}_1 \equiv \frac{4}{15} \pi a^5 \omega_0^2 \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \left( B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 6B_{0,z}^2 \frac{\kappa_2^2}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \right); \quad (84)$$

b. *nel fluido,*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &\equiv \int_{V_1} \kappa_2 \|\mathbf{E}_2\|^2 dr_2^3 \\ &= \frac{\omega_0^2 a^{10}}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} \kappa_1^2 \kappa_2 \int_0^a r^2 dr (1/r^8) (B_{0,x}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos\varphi)^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta (-5(\cos\theta)^4 \downarrow \\ &\quad \downarrow + 5(\cos\theta)^2 + 1) + B_{0,x}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi (\sin\varphi)^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\cos\theta)^2 + \downarrow \\ &\quad \downarrow + B_{0,z}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (5(\cos\theta)^4 - 2(\cos\theta)^2 + 1)) \\ &= \frac{4}{15} \pi a^5 \omega_0^2 \frac{\kappa_1^2 \kappa_2}{(2\kappa_1 + 3\kappa_2)^2} (3B_{0,x}^2 + 4B_{0,z}^2). \end{aligned} \quad (85)$$

Pertanto, la *potenza termo-elettrica totale* dissipata nel sistema sfera-fluido è data da

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \frac{4}{15} \pi a^5 \omega_0^2 \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 2B_{0,z}^2 \kappa_2). \quad (86)$$

Una conseguenza interessante dell'Eq. (82) è che, se il fluido perde la sua conduttività ( $\kappa_2 \approx 0$ ), la dissipazione Joule tende a confinarsi nell'*interno della sfera*, dovuta alle sole correnti parassite lì presenti, purché  $B_0$  non sia, *anche*, totalmente longitudinale, i.e., purché non sia  $B_{0,x}^2 \equiv 0$ . In tale circostanza, risulta

$$\lim_{\kappa_2 \rightarrow 0} \mathbf{P} \equiv \lim_{\kappa_2 \rightarrow 0} \mathbf{P}_1 = \frac{2}{5} \pi a^5 \omega_0^2 B_{0,x}^2 \kappa_1. \quad (87)$$

Con conclusioni analoghe a quelle relative alla soluzione I.5, cf/c Eq. (46),  $\mathbf{P}$  deve risultare equivalente alla potenza *meccanica* rilasciata all'*intero* spazio. Quindi, essa è legata al *momento di forza resistente* subito dalla sfera, dato da

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau}_R \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = (-\boldsymbol{\tau}_R \hat{\mathbf{z}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \hat{\mathbf{z}}.$$

Scegliendo che sia  $\boldsymbol{\tau}_R \boldsymbol{\omega}_0 > 0$ , analogamente al caso traslazionale, v. P. 12, il *momento di forza resistente* è esprimibile come

$$\boldsymbol{\tau}_R = -\frac{4}{15} \pi a^5 \omega_0 \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 2B_{0,z}^2 \kappa_2) \hat{\mathbf{z}}. \quad (88)$$

■

II.6 Nella soluzione I.6, si è ottenuto il risultato generale, per un bagno termico a *temperatura stazionaria*  $T$ , dove il tasso di entropia della sfera è esprimibile come

$$\frac{dS_1}{dt} = \int_{V_1} \frac{\kappa_1 \|\mathbf{E}_1\|^2}{T} dr_1^3.$$

Se, inoltre,  $T$  ha una dipendenza puramente *radiale*, allora, analogamente all'Eq. (80), si ottiene

$$\Delta S_1 = \frac{4}{3} \pi \omega_0^2 \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \left( B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 6B_{0,z}^2 \frac{\kappa_2^2}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \right) \Delta t \int_0^a \frac{r^4}{T(r)} dr. \quad (89)$$

L'Eq. (85) mostra che la *rotazione adiabatica* può avvenire solo nell'occorrenza concomitante sia di un campo di induzione magnetica *puramente longitudinale* ( $\mathbf{B}_0 \equiv B_0 \hat{\mathbf{z}}$ ) sia di evanescenza della conduttività del fluido,  $\kappa_2 \approx 0$ . In tal senso, si può argomentare che il moto adiabatico della sfera sia *meno* probabile in una rotazione che in una traslazione. ■

II.7 La fondatezza di tutti i calcoli precedenti nell'*f*-sistema di riferimento e il fatto che il fluido sia non-viscoso sembra indicare che il *momento totale di forza* sulla sfera sia attribuibile solo alle correnti parassite *interne alla sfera*. Questo è quanto avviene effettivamente. Per verificarlo, è necessario incominciare dal calcolo diretto del *momento della forza magnetica*, il quale costituirà un termine di confronto esplicito a sostegno dell'ipotesi.

La *forza magnetica* (lorentziana) che si esercita sulla *corrente* contenuta in un elemento di volume infinitesimo *della sfera* si scrive

$$d\mathbf{F}_L = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 dr_1^3 \equiv \kappa_1 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 dr_1^3,$$

così che il *momento di forza magnetico* sulla sfera può essere calcolato dall'integrale

$$\boldsymbol{\tau}_L = \kappa_1 \int_{V_1} \mathbf{r} \times (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0) dr_1^3, \quad (90)$$

con la funzione integranda espressa, convenientemente, in coordinate sferiche.

Per prima cosa, si consideri l'Eq. (80) di  $\mathbf{E}_1$ . In vista dell'integrazione (90), i versori della base ortonormale sferica,  $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\}$ , tutti aventi direzione *variabile*, devono essere riespressi in termini della base ortonormale rettangolare  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ , *invariante* vs. l'operazione di integrazione. Dopo le trasformazioni necessarie, semplificando e ordinando i termini, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{\omega_0}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} r \left( \hat{\mathbf{x}} (B_{0,x} \kappa_1 \cos \theta + B_{0,z} \kappa_2 \sin \theta \cos \varphi) + \hat{\mathbf{y}} B_{0,z} \kappa_2 \sin \theta \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathbf{z}} (-B_{0,x} (\kappa_1 + 3\kappa_2) \sin \theta \cos \varphi - 2B_{0,z} \kappa_2 \cos \theta) \right) \\ &\equiv \hat{\mathbf{x}} \mathcal{E}_{1,x}(r, \theta, \varphi) + \hat{\mathbf{y}} \mathcal{E}_{1,y}(r, \theta, \varphi) + \hat{\mathbf{z}} \mathcal{E}_{1,z}(r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (91)$$

Il passo successivo è costituito dalla specificazione del vettore  $\mathbf{G} := \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ :

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \mathcal{E}_{1,x}(r, \theta, \varphi) & \mathcal{E}_{1,y}(r, \theta, \varphi) & \mathcal{E}_{1,z}(r, \theta, \varphi) \\ B_{0,x} & 0 & B_{0,z} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &\equiv \hat{x} \mathcal{E}_{1,y} B_{0,z} - \hat{y} (\mathcal{E}_{1,x} B_{0,z} - \mathcal{E}_{1,z} B_{0,x}) - \hat{z} \mathcal{E}_{1,y} B_{0,x} \\
 &= \frac{\omega_0}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} r (\hat{x} B_{0,z}^2 \kappa_2 \sin \theta \sin \varphi + \hat{y} (-B_{0,x} B_{0,z} (\kappa_1 + 2\kappa_2) \cos \theta - \\
 &\quad \downarrow - (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + B_{0,z}^2 \kappa_2) \sin \theta \cos \varphi) + \hat{z} (-B_{0,x} B_{0,z} \kappa_2 \sin \theta \sin \varphi)). \quad (92)
 \end{aligned}$$

Come completamento della preparazione della funzione integranda nell'Eq. (90), si esprimono le componenti *scalari* di  $\mathbf{r}$  in coordinate *sferiche*, mantenendo, però, *rettangolare* la base vettoriale ortonormale.

Così, dall'Eq. (92), si scrive

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \times \mathbf{G} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r \sin \theta \cos \varphi & r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \\ G_x(r, \theta, \varphi) & G_y(r, \theta, \varphi) & G_z(r, \theta, \varphi) \end{vmatrix} \\
 &= r (\hat{x} (r G_z \sin \theta \sin \varphi - r G_y \cos \theta) - \hat{y} (r G_z \sin \theta \cos \varphi - r G_x \cos \theta) + \\
 &\quad \downarrow + \hat{z} (r G_y \sin \theta \cos \varphi - r G_x \sin \theta \sin \varphi)) \\
 &= \frac{\omega_0}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} r^2 (\hat{x} ((\kappa_1 + 2\kappa_2) (\cos \theta)^2 - \kappa_2 (\sin \theta \sin \varphi)^2) + \\
 &\quad \downarrow + (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + B_{0,z}^2 \kappa_2) \overline{\sin \theta \cos \theta \cos \varphi}) + \\
 &\quad \downarrow + \hat{y} (B_{0,x} B_{0,z} \kappa_2 (\sin \theta)^2 \cos \varphi \sin \varphi + B_{0,z}^2 \kappa_2 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi) + \\
 &\quad \downarrow + \hat{z} (-B_{0,x} B_{0,z} (\kappa_1 + 2\kappa_2) \overline{\cos \theta \sin \theta \cos \varphi} - \\
 &\quad \downarrow - (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 2B_{0,z}^2 \kappa_2) (\sin \theta \cos \varphi)^2), \quad (93)
 \end{aligned}$$

indicando, al solito, *sovragraffati* i termini di contributo integrale *nulla* (precisamente, sono tutti nulli sia vs.  $\theta$  che vs.  $\varphi$ ).

Dunque, l'integrale (90), assume la rappresentazione sferica seguente:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau}_L &= \frac{\omega_0 \kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \int_0^a (r^2 dr) r^2 (\hat{x} B_{0,x} B_{0,z} ((\kappa_1 + 2\kappa_2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \\
 &\quad \downarrow - \kappa_2 \int_0^{2\pi} d\varphi (\sin \varphi)^2 \int_0^\pi (\sin \theta d\theta) (\sin \theta)^2) - \\
 &\quad \downarrow - \hat{z} (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 2B_{0,z}^2 \kappa_2) \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos \varphi)^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta (\sin \theta)^2).
 \end{aligned}$$

Il compattamento algebrico e la sostituzione usuale  $u := \cos \theta$  forniscono il risultato agevolmente:

$$\boldsymbol{\tau}_L = \frac{4}{15} \pi a^5 \omega_0 \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} ((\kappa_1 + \kappa_2) B_{0,x} B_{0,z} \hat{x} - (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 2B_{0,z}^2 \kappa_2) \hat{z}) \quad (94)$$

$$\equiv \frac{4}{15} \pi a^5 \omega_0 B_{0,x} B_{0,z} \frac{\kappa_1 (\kappa_1 + \kappa_2)}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \hat{x} + \boldsymbol{\tau}_R, \quad (94.1)$$

come è immediato concludere dal confronto con l'Eq. (88). In altri termini, *il momento di forza*  $\boldsymbol{\tau}_R$

resistente alla rotazione della sfera è dovuto completamente alle correnti parassite sempre presenti nella sfera (v. Eq. (90)), quale che sia la conduttività  $\kappa_2$  del fluido.

□

Lo stesso procedimento induttivo applicato, nella soluzione I.7, per la determinazione di una forma generale di  $\mathbf{F}' \equiv \mathbf{F}_R$ , sarà applicato a  $\boldsymbol{\tau}_L$  per determinare il momento di forza *totale*,  $\boldsymbol{\tau}_T$ , subito dalla sfera. Comunque, è evidente che deve risultare  $\boldsymbol{\tau}_L \equiv \boldsymbol{\tau}_T$ , non potendo esservi alcun effetto meccanico esercitato dal fluido *stazionario*, quindi, *non-accelerativo*.

Il procedimento sarà, allora, una verifica della riproducibilità degli stessi risultati ottenuti da  $\boldsymbol{\tau}_L$ .

Nel piano operativo  $X \times Y$  (v. Eq. (23)),

a. sia  $\mathbf{B}_0 \equiv B_0 \hat{\mathbf{z}}$ , un campo di induzione magnetica totalmente *longitudinale* (i.e.,  $\parallel \boldsymbol{\omega}_0$ ).

Poiché  $B_{0,x} = 0$ , si ha, dall'Eq. (94),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_L \equiv \boldsymbol{\tau}_{L,\parallel} &= -\frac{8}{15} \pi a^5 \boldsymbol{\omega}_0 \|\mathbf{B}_0\|^2 \frac{\kappa_1 \kappa_2}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv -\frac{8}{15} \pi a^5 \frac{\kappa_1 \kappa_2}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 := \boldsymbol{\tau}_{T,\parallel}; \end{aligned} \quad (95)$$

b. sia  $\mathbf{B}_0 \equiv B_0 \hat{\mathbf{x}}$ , un campo di induzione magnetica totalmente *trasverso* (i.e.,  $\perp \boldsymbol{\omega}_0$ ).

Poiché  $B_{0,z} = 0$ , l'Eq. (94) si riduce a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_L \equiv \boldsymbol{\tau}_{L,\perp} &= -\frac{4}{15} \pi a^5 \boldsymbol{\omega}_0 \|\mathbf{B}_0\|^2 \frac{\kappa_1 (\kappa_1 + 3\kappa_2)}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv -\frac{4}{15} \pi a^5 \frac{\kappa_1 (\kappa_1 + 3\kappa_2)}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \mathbf{B}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{B}_0) \\ &\equiv -\frac{4}{15} \pi a^5 \frac{\kappa_1 (\kappa_1 + 3\kappa_2)}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} (\|\mathbf{B}_0\|^2 \boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0) \equiv \boldsymbol{\tau}_{T,\perp}. \end{aligned} \quad (96)$$

Poiché alla variabilità *continua* dell'angolo  $\sphericalangle(\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{B}_0)$  corrisponde una generalità sufficiente del vettore  $\boldsymbol{\tau}_T$ , di modulo *uniforme*, è corretto costruire  $\boldsymbol{\tau}_T$  formalmente *sovrapponendo* le espressioni estreme (95) e (96). Il risultato può essere scritto come

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_T (\equiv \boldsymbol{\tau}_L) &\equiv \boldsymbol{\tau}_{T,\parallel} + \boldsymbol{\tau}_{T,\perp} \\ &= \frac{4}{15} \pi a^5 \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} ((\kappa_1 + \kappa_2) (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0 - (\kappa_1 + 3\kappa_2) \|\mathbf{B}_0\|^2 \boldsymbol{\omega}_0) \\ &\equiv \chi_1 \mathbf{B}_0 + \chi_2 \boldsymbol{\omega}_0, \end{aligned} \quad (97)$$

combinazione lineare (prevedibile) dei campi uniformi  $\mathbf{B}_0$  e  $\boldsymbol{\omega}_0$ .

Le Eq. (95) e (96) sono dedotte dall'Eq. (97) per  $\boldsymbol{\omega}_0 \equiv -\boldsymbol{\omega}_0 \hat{\mathbf{z}}$  e  $\sphericalangle(\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{B}_0) \equiv 0 \sphericalangle \pi \sphericalangle \pi/2$ .

Anche qui, la verifica è immediata.

□

Infine, sostituendo  $\boldsymbol{\omega}_0 \equiv -\boldsymbol{\omega}_0 \hat{\mathbf{z}}$  e  $\mathbf{B}_0 \equiv B_{0,x} \hat{\mathbf{x}} + B_{0,z} \hat{\mathbf{z}}$  nell'Eq. (97), si ottiene



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_T &= \frac{4}{15} \pi a^5 \boldsymbol{\omega}_0 \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} ((\kappa_1 + \kappa_2) B_{0,x} B_{0,z} \hat{\boldsymbol{x}} - (B_{0,x}^2 (\kappa_1 + 3\kappa_2) + 2B_{0,z}^2 \kappa_2) \hat{\boldsymbol{z}}) \\ &\equiv \boldsymbol{\tau}_L, \quad \text{com'era da attendersi (v. Eq. (94)),} \\ &\equiv \boldsymbol{\tau}_\perp + \boldsymbol{\tau}_R.\end{aligned}$$

La componente vettoriale *trasversa* del momento di forza *totale* subito dalla sfera conduttrice nel fluido conduttore (v. Eq. (94.1)),

$$\boldsymbol{\tau}_\perp \equiv \frac{4}{15} \pi a^5 \boldsymbol{\omega}_0 B_{0,x} B_{0,z} \frac{\kappa_1 (\kappa_1 + \kappa_2)}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} \hat{\boldsymbol{x}} \quad (99)$$

$$\equiv \frac{4}{15} \pi a^5 \frac{\kappa_1 (\kappa_1 + \kappa_2)}{2\kappa_1 + 3\kappa_2} ((\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0) \boldsymbol{B}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0 / \|\boldsymbol{\omega}_0\|)^2 \boldsymbol{\omega}_0), \quad (100)$$

si manifesta quando il campo di induzione magnetica  $\boldsymbol{B}_0$  ha componenti vettoriali *longitudinale* e *trasversa* entrambe *non-nulle*. Rispetto a  $\boldsymbol{B}_0$ , la prima si riferisce alla configurazione di equilibrio *stabile* del sistema, la seconda a quella di equilibrio *instabile*. L'effetto dinamico di  $\boldsymbol{\tau}_\perp$  è quello di *forzare l'asse di rotazione, i.e.,  $\boldsymbol{\omega}_0$ , ad allinearsi con  $\boldsymbol{B}_0$* , portando il sistema alla configurazione di equilibrio stabile, i.e., di entropia *minima*.

■■■

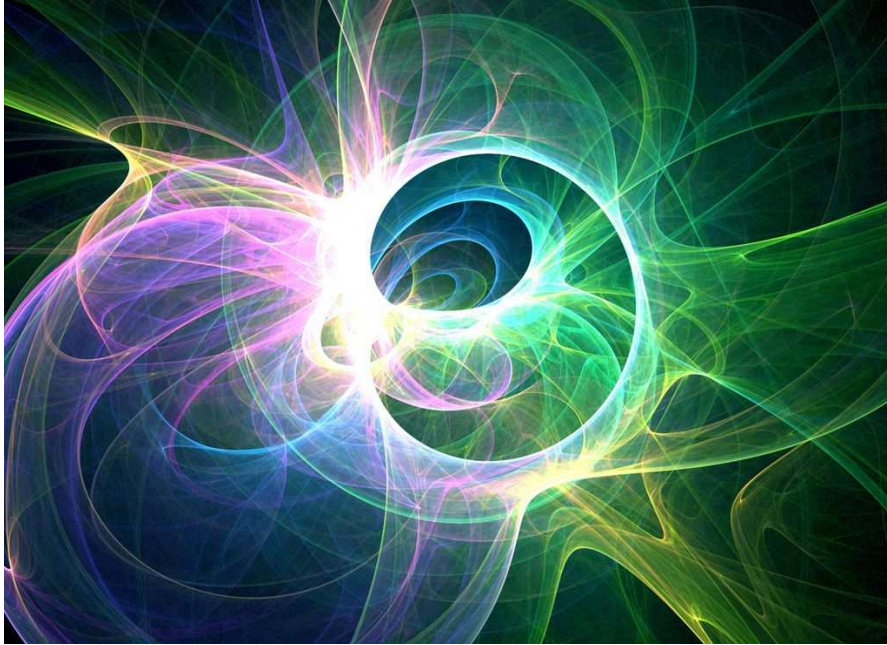


Fig. 3 – Simulazione di vorticità TE 8-polari *pure* in un plasma tenue.

## Appendice

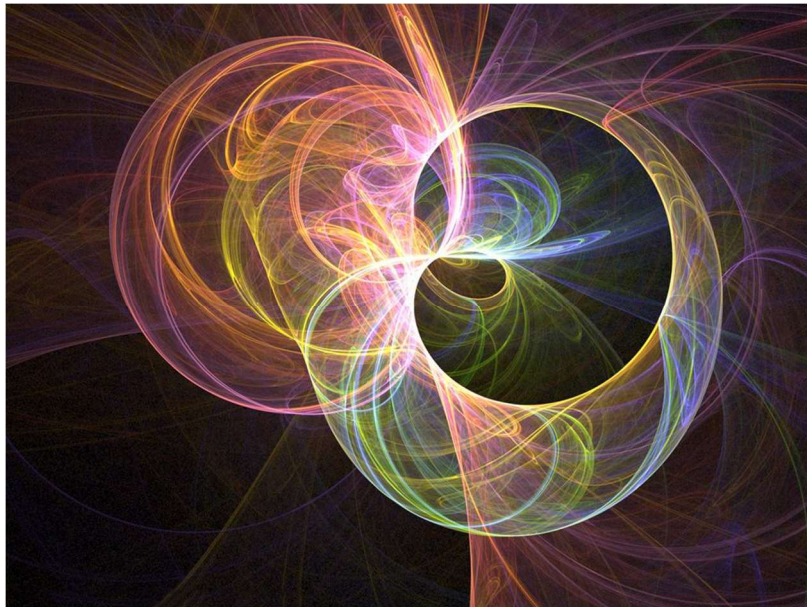


Fig. 4 – Simulazione di vorticità TM 8-polari *pure* in un plasma tenue.

## Funzioni Armoniche Sferiche

### dalla soluzione generale dell'Equazione DDP di Laplace

Con il metodo di *separazione delle variabili*, l'Equazione di Laplace in coordinate sferiche,

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \varphi) \equiv \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Phi(r, \theta, \varphi) = 0,$$

in cui,  $\{r, \theta, \varphi\} \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , ha la soluzione generale – la funzione *potenziale* a valori in  $\mathcal{C}$  – rappresentabile in serie di prodotti di auto-funzioni:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi) &\equiv R(r)\Theta(\theta)F(\varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l ((\alpha_l r^l + \beta_l / r^{l+1}) \downarrow \\ &\quad \downarrow (K_{l,m} P_l^m(\cos \theta) + N_{l,m} Q_l^m(\cos \theta)) (C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi))). \end{aligned} \quad (1)$$

Se  $\{l, m\} \in \mathbb{Z}_0^+ \times \{0, 1, \dots, l\}$  ( $\Rightarrow m \geq 0$ ), la teoria (*formula di Rodrigues*) dà, nell'Eq. (1),

$$P_l^m(\cos \theta) := (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \Big|_{u = \cos \theta}, \quad (1.1)$$

la *Funzione di Legendre Associata regolare* (o di *1° tipo*), di *ordine*  $l$  e di *rango*  $m$ , la quale generalizza il *Polinomio di Legendre di grado*  $l$ ,  $P_l^0(\cos \theta) \equiv P_l(\cos \theta)$ . Questo polinomio viene definito dall'espansione

$$P_l(\cos \theta) := \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2(l-k))!}{k!(l-k)!(l-2k)!} u^{l-2k} \Big|_{u = \cos \theta}, \quad (1.2)$$

dove,  $\lfloor l/2 \rfloor$  indica la *parte intera* (*floor function*) di  $l/2$  (e.g.,  $\lfloor 13\pi/7 \rfloor = 5$ ). □

Sostituendo l'espressione (1.2) nella (1.1), eseguendo la derivazione  $m$ -sima indicata e vincolando la *non-negatività* di  $l - m - 2k$  – sia *esponente* sia *argomento* di fattoriale nel calcolo – si determina ordinatamente

$$\begin{aligned} P_l^m(u) &= \frac{(1 - u^2)^{m/2}}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2(l-k))!}{k!(l-k)!(l-2k)!} \frac{d^m}{du^m} u^{l-2k} \\ &\equiv \frac{(1 - u^2)^{m/2}}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2(l-k))!}{k!(l-k)!(l-2k)!} (l-2k)(l-2k-1)(l-2k-2)\dots(l-2k-m+1) u^{l-2k-m} \\ &\mapsto \frac{(1 - u^2)^{m/2}}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor (l-m)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2(l-k))!}{k!(l-k)!(l-m-2k)!} u^{l-m-2k}. \end{aligned}$$
□

Allora, per  $\theta \in [0, \pi]$  e  $u \equiv \cos \theta$ , risulta la rappresentazione goniometrica

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{(\sin \theta)^m}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor (l-m)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2(l-k))!}{k!(l-k)!(l-m-2k)!} (\cos \theta)^{l-m-2k}. \quad (1.3)$$

Vs. l'insieme  $\{-m\}$ , simmetrico di  $\{m\}$  (sotto la condizione  $0 \leq m \leq l$ ), vale l'identità

$$P_l^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta). \quad (1.4)$$

In modo analogo (altra *formula di Rodrigues*), viene definita la funzione *log-irregolare*

$$Q_l^m(\cos \theta) := (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} Q_l(u) \Big|_{u = \cos \theta}, \quad (1.5)$$

nota come la *Funzione di Legendre irregolare* (o di 2° tipo), di ordine  $l$  e di rango  $m$ , dalla quale, si determina la *Funzione di Legendre di 2° tipo di ordine  $l$  e di rango 0*,  $Q_l^0(\cos \theta) \equiv Q_l(\cos \theta)$ .

Identità utili sono:

$$Q_0(\cos \theta) := \coth^{-1}(\cos \theta) \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (1.5.1)$$

$$Q_l(\cos \theta) \Big|_{l \geq 1} = P_l(\cos \theta) Q_0(\cos \theta) - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(1 - (-1)^{l+k})(2k+1)}{(l+k+1)(l-k)} P_k(\cos \theta), \quad (1.5.2)$$

$$Q_l^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Q_l^m(\cos \theta). \quad (1.5.3)$$

Dall'Eq. generatrice (1.5), si vede immediatamente che le funzioni  $Q_l^m(\cos \theta)$  posseggono due *singolarità logaritmiche* sull'asse  $Z$ , per  $\theta \equiv 0$  e  $\theta = \pi$ , rispettivamente. Questo fatto implica che la richiesta di regolarità dell'Eq. (1) in *tutto*  $\mathbb{R}^3$  è equivalente al vincolo  $N_{l,m} \equiv 0$ ,  $\forall \{l, m\}$ , così che la forma *regolare massimale* di  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  risulta essere

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (\alpha_l r^l + \beta_l / r^{l+1}) (K_{l,m} P_l^m(\cos \theta)) (C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)). \quad (2)$$

La richiesta ulteriore – fondamentale in Fisica Quantistica – di *orto-normalità* di entrambi i fattori angolari nell'Eq. (2) assegna,  $\forall \{l, m\} \subset \mathbb{Z}_0^+ \wedge m \in \{0, 1, \dots, l\}$ , secondo la *convenzione di fase CSW* (Condon-Shortley-Wigner),

$$K_{l,m} \equiv \underbrace{(-1)^m}_{CSW} \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2}, \quad C_{l,m} \equiv 1, \quad S_{l,m} \equiv i. \quad (2.1)$$

Con questi valori parametrici, viene determinata la *Funzione Armonica Sferica orto-normalizzata* di ordine  $l$  e di rango  $m$ ,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) := \frac{(-1)^m}{2\pi^{1/2}} \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (3)$$

orto-normalizzata, s'è detto, vs. sia  $\theta$  che  $\varphi$ .

□

Considerazioni di simmetria fanno, poi, estendere la soluzione regolare (2) alla forma *complessa*

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} (\alpha_l r^l + \beta_l / r^{l+1}) \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &\equiv Y_0^0(\theta, \varphi) \sum_{l=0}^{+\infty} (\alpha_l r^l + \beta_l / r^{l+1}) + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \sum_{l=1}^{+\infty} (\alpha_l r^l + \beta_l / r^{l+1}) \sum_{m=0}^l (Y_l^m(\theta, \varphi) + Y_l^{-m}(\theta, \varphi)). \end{aligned} \quad (4)$$

La coniugazione complessa di  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  fornisce l'identità per  $Y_l^{-m}(\theta, \varphi)$  nell'Eq. (4):

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) \equiv (-1)^m (Y_l^m(\theta, \varphi))^*. \quad (5)$$

La separabilità reciproca delle variabili sferiche implica l'espandibilità *indipendente* del prodotto  $\Theta(\theta)F(\varphi)$ . Quindi, sulla superficie sferica *unitaria* ( $r \equiv 1$ ) ed *equipotenziale*, ( $\alpha_l + \beta_l = \lambda \neq 0$   $\forall l$ ,  $\lambda$  costante), mediante le Idn. (3) e (5), si specializza l'Eq. (4) nella forma

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(1, \theta, \varphi)}{\lambda} &= \phi(\theta, \varphi) := Y_0^0(\theta, \varphi) + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (Y_l^m(\theta, \varphi) + (-1)^m (Y_l^m(\theta, \varphi))^*) \\ &\equiv \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) ((-1)^m e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

□

In quanto segue, sono riportate alcune proprietà algebriche – semplici ma, vs. le quali, non sono rare sviste nei calcoli – delle *Funzioni Armoniche Sferiche* nella convenzione CSW (infatti, è necessaria un'attenzione *sempre allertata* con le definizioni di  $P_l(\cos \theta)$ ,  $P_l^m(\cos \theta)$ ,  $Q_l^m(\cos \theta)$  e  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  nella letteratura più datata, a causa di possibili convenzioni di fase *differenti* da quelle della Fisica Quantistica e dell'Elettrodinamica Classica (per intenderci: *a-là Jackson*), ormai consolidate. Tenendo presente che, in questo phys-notebook, è fissata la restrizione  $m \geq 0$  per una gestione più agevole della convenzione CSW, si hanno:

$$\bullet (Y_l^m(\theta, \varphi))^* = \frac{(-1)^m}{2\pi^{1/2}} \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{-im\varphi}, \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \Re(Y_l^{-m}(\theta, \varphi)) &= (-1)^m \Re(Y_l^m(\theta, \varphi))^* \equiv (-1)^m \Re(Y_l^m(\theta, \varphi)) \\ &= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} (P_l^m(\cos \theta)) \cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \bullet \Im(Y_l^{-m}(\theta, \varphi)) &= (-1)^m \Im(Y_l^m(\theta, \varphi))^* \equiv (-1)^{m+1} \Im(Y_l^m(\theta, \varphi)) \\ &= -\frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} (P_l^m(\cos \theta)) \sin(m\varphi). \end{aligned} \quad (7.3)$$

□

Le espressioni (3) e (5) suggeriscono la possibilità di una definizione di una *base* in  $\mathbb{R}$  per le *Funzioni Armoniche Sferiche*. Queste funzioni *reali*,  $\{Z_l^m(\theta, \varphi)\}$ , distinte, secondo l'indice  $m$ , in *Zonali* ( $m = 0$ ), *Tesserali* ( $m \in \{1, \dots, l-1\}$ ) e *Settoriali* ( $m = l$ ), ricorrono nelle *espansioni in serie di multipoli* (e.g., dei potenziali elettromagnetici e gravitazionali) e sono determinabili dalle analoghe complesse. Qui di seguito, ne sono riportate le forme ammissibili in  $\mathbb{R}$ , coerenti con la convenzione CSW ( $0 \leq m \leq l$ ):

• se  $m \in \{1, \dots, l\}$ , allora,

$$\begin{aligned} Z_l^m(\theta, \varphi) &:= \frac{1}{2^{1/2}} (Y_l^{-m}(\theta, \varphi) + (-1)^m (Y_l^m(\theta, \varphi))) \equiv (-1)^m 2^{1/2} \Re(Y_l^m(\theta, \varphi)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi); \end{aligned} \quad (8.1)$$

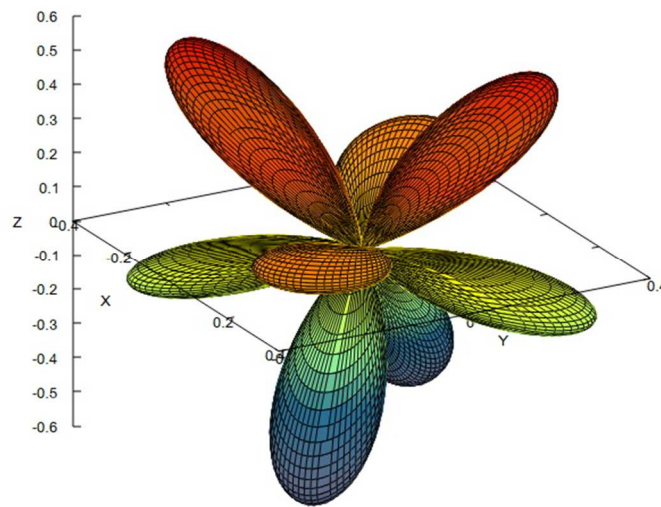
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_l^{-m}(\theta, \varphi) &:= \frac{i}{2^{1/2}} (Y_l^{-m}(\theta, \varphi) - (-1)^m (Y_l^m(\theta, \varphi))) \equiv (-1)^m 2^{1/2} \mathfrak{I}m Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi), \end{aligned} \quad (8.2)$$

- se  $m = 0$ , si assume, semplicemente,

$$\mathcal{Z}_l^0(\theta, \varphi) \equiv Y_l^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{2l+1}{\pi} \right)^{1/2} P_l^0(\cos \theta) \equiv \frac{1}{2\pi^{1/2}} (2l+1)^{1/2} P_l(\cos \theta). \quad (8.3)$$

□

Armonica sferica reale orto-normalizzata  $\{\mathcal{Z}_l^{\pm m}(\theta, \varphi)\} \mapsto f(u, v)$



Dall'autore ([cldmgn011047@gmail.com](mailto:cldmgn011047@gmail.com)), sono disponibili, a richiesta, come allegati TXT alle risposte, lo zip-archivio delle *routines* per il tracciamento con *GNUplot*<sup>TM</sup> dei grafici 3-dim (superfici) delle  $\mathcal{Z}_l^{\pm m}(\theta, \varphi)$ , con  $l = 0, \dots, 5$  e  $\forall m$  compatibile con tali valori di  $l$ .

■

**Bibliografia**

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: [https://www.cm-phymath.net/libr\\_page.html](https://www.cm-phymath.net/libr_page.html).

**Riferimenti generali**

- [1] JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3<sup>RD</sup> ED., CH. 2, 3, JOHN WILEY & SONS, INC. (1999; REV. 2006);
- [2] PANOFSKY, W. K. - PHILLIPS, M., *Classical Electricity and Magnetism*, 2<sup>ND</sup> ED., P. 119, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1972);
- [3] SMYTHE, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, 3<sup>RD</sup> ED., MCGRAWHILL, INC. (1968);
- [4] STRATTON, J. A., *Electromagnetic Theory*, WILEY-IEEE PRESS (1941; repr. 2007);
- [5] WANGSNES, R. K., *Electromagnetic Fields*, 2<sup>ND</sup> ED., P.S 137 & 356, JOHN WILEY & SONS, INC. (1986);
- [6] REITZ, J. R. - MILFORD, F. J. - CHRISTY, R. W., *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4<sup>TH</sup> ED., P.S 142-143, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (2008);
- [7] MARION, J. B. - HEALD, M. A., *Classical Electromagnetic Radiation*, 2<sup>ND</sup> ED., CH. 2, 3, 4, ACADEMIC PR. (1980);
- [8] OHANIAN, H. C., *Classical Electrodynamics*, ALLYN & BACON, INC. (1988);
- [9] JEFIMENKO, O. D., *Electricity and Magnetism*, 2<sup>ND</sup> ED., ELECTRET SCIENTIFIC CO. (1989);
- [10] LORRAIN, P. - CORSON, D. R. - LORRAIN, F., *Electromagnetic Fields and Waves*, 3<sup>RD</sup> ED., W. H. FREEMAN & CO. (1988);
- [11] GRIFFITHS, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, 4<sup>TH</sup> ED., PRENTICE-HALL, INC. (2012);
- [12] THIDÉ, B., ET AL., *Electromagnetic Field Theory*, con/esercizi risolti, 2<sup>ND</sup> ED., Uppsala Un., Dept. of Physics and Astronomy;
- [13] FRANKL, D. R., *Electromagnetic Theory*, PRENTICE-HALL, INC. (1986);
- [14] SHADOWITZ, A., *The Electromagnetic Field*, MCGRAWHILL, INC. (1975).

**Strumenti matematici**

- [15] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7<sup>TH</sup> ED., §§ 15.3-15.6, ACADEMIC PRESS (2013);
- [16] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2<sup>ND</sup> ED., P.S 456-458, PRENTICE-HALL, INC. (1976);
- [17] MORSE, P. M., - FESHBACH, H., *Methods of Theoretical Physics, I & II*, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1953);
- [18] LEBEDEV, N. N. - SKALSAYA, I. P. - UFLYAND, Y. S., *Worked Problems in Applied Mathematics*, DOVER PUBNS., INC. (1979);
- [19] BERG, P. W. - MCGREGOR, J. L., *Elementary Partial Differential Equations*, HOLDEN-DAY, INC. (3<sup>RD</sup> PR., 1969);
- [20] TYCHONOV, A. N. - SAMARSKI, A. A., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, **1**, CH. 4 (1964); **2**, CH. 5 & 7 (1967), HOLDEN-DAY, INC.;
- [21] DUCHATEAU, P. - ZACHMANN, D. W., *Theory and Problems of PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1986);
- [22] GARABEDIAN, P. R., *Partial Differential Equations*, JOHN WILEY & SONS, INC. (1964);
- [23] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, **2**, P. 11, ZANICHELLI (RIST. 1998).;
- [24] SPIEGEL, M. R., *ADVANCED MATHEMATICS for Scientists and Engineers*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1971).

