revisione
10 aprile 2024

Funzioni Ortogonali in $\mathbb{R}$ -

Metodi, risultati e
un’introduzione alla
Teoria di Sturm-Liouville

claudio magno
https://www.cm-physmath.net/

CM_Portable MATH Notebook Series™

Jacques Charles François Sturm (1803-1855)

Joseph Liouville (1809-1882)

David Hilbert (1862-1943)

INDICE

Introduzione

La nostra comprensione del Mondo Naturale incomincia dal Laboratorio e prosegue con la costruzione di teorie *falsificabili* formulate mediante *modelli matematici*, prevalentemente *differenziali*. La soluzione *generale* di equazioni-modello, differenziali, appunto, riesce *rarissimamente* in modo esatto, non solo per la limitatezza intrinseca obiettiva (e prevedibile) dei modelli concepiti ma, anche, per le complessità (e certe oscurità) dei calcoli che siamo capaci, al momento, di eseguire, sia pure appoggiandoci a super-computers. Le misure dell'enormemente 'piccolo' e dell'enormemente 'grande', di supporto sia ai dati sperimentali che alle teorie conseguenti, hanno giustificato da gran tempo, e.g., l'approccio 'perturbativo', figlio moderno del metodo alessandrino di 'esaustione' o 'crivello' di Eratostene, quasi a voler liberare i 'Prigioni' dalla pietra grezza, scalpellando prima il 'grosso' e, via via, il sempre più 'fino', con una politura alla Antonio Canova.

Qui, la l'Analisi Matematica offre uno strumento di *approssimazione* straordinariamente potente: la SERIE (di funzioni, beninteso). Poiché, in ultima istanza, sappiamo che (quasi) tutto è 'triturabile' in somme di potenze, le più semplici tra le 'funzioni elementari', il vero problema resta nella determinazione di loro *coefficienti* consistenti con una convergenza rapida. Come? Ad esempio, 'raggruppando' *infinite* potenze crescenti della quantità variabile indipendente x in ciascuno degli *infiniti* termini *orto-normali* di una serie *uniformemente* convergente di funzioni esse stesse *uniformemente* convergenti in un dominio aperto, scelta in modo opportuno sulla base di criteri modellistici, nei quali, spesso, la Geometria Differenziale gioca un ruolo-chiave. È questo il terreno, su cui, Lagrange, Fourier, Legendre, Cauchy, Galois, Jacobi, Lebesgue, Čebyšëv, Darboux, Hermite, Dini, Lie, Volterra, Fredholm, Hilbert, Kolmogorov, Sinai, Arnold e molti, moltissimi altri hanno speso le loro esistenze, come è ampiamente noto.

Per ora, grazie all'Algebra Lineare e a Hilbert, disponiamo di una sintesi abbastanza robusta ed efficace, la *Teoria di Sturm-Liouville*, per una classe vastissima di equazioni differenziali lineari ordinarie, cosiddette 'Speciali', di interesse nella Fisica, nell'Ingegneria e nella Statistica. Però, non so dire quanto tale sintesi possa ritenersi definitiva o quanto, piuttosto, preluda a sviluppi futuri.

Ho inteso dare una 'lucidata utilitarista' a concetti che, in modo intermittente, mi sono circolati in testa per qualche decennio, quasi una 'private communication' tra vecchi 'compagni di merende' accademiche. Comunque, la solita **Bibliografia** finale è proposta come 'aiutino' ulteriore soprattutto alla\al 'beginner': c'è ancora molto da studiare (come sempre).

Spero di non aver peccato troppo in superficialità con questo math-notebook striminzito. Buona lettura e buone pensate ispiratrici (chissà …).

C M

Ortogonalità tra funzioni in modalità vettoriale

Nell'algebra geometrico-vettoriale in uno Spazio Euclideo, e.g., in $\mathbb{R}^3 \mapsto X \times Y \times Z$, i due *campi* $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{G}$, entrambi $\neq 0$, sono *ortogonali* (o perpendicolari) quando il loro *prodotto scalare* è nullo,

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} \equiv F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0\,. \tag{1}$$

Com'è noto, la proprietà di ortogonalità vettoriale trova un'estensione formalmente legittima, benché non-ovvia da un punto di vista fisico-geometrico ordinari, quando si considerano campi vettoriali a $n > 3$ componenti.

Ci si può spingere oltre, interpretando la *funzione* (applicazione) reale $F : x \mapsto F(x)$ come un *vettore* (campo) con un numero *infinito-continuo* di componenti del tipo $y \equiv F(x) \in \mathbb{R}$, ciascuna ottenuta applicando F a ogni valore della variabile indipendente $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. In tal caso, mediante un'estensione prevedibile al regime *continuo* della somma discreta (1), due funzioni F e G, entrambe non-nulle, sono *ortogonali* nell'*aperto* (a, b) se, in esso, vale l'annullamento *non-banale* del loro *prodotto interno* (forma *bilineare* simmetrica non-negativa-definita, in notazione '*bra*-(c)*ket*' – $\langle\,|,\,|\,\rangle$ – di Dirac)

$$\langle F|G\rangle \approx \int_a^b F(x)G(x)dx \equiv \int_a^b G(x)F(x)dx \approx \langle G|F\rangle = 0\,, \tag{2}$$

duale a, e rappresentato da, $(\approx)$, un integrale definito, e.g., *à-la Riemann-Stieltjes*.

Una generalizzazione dell'Eq. (2) riguarda il caso in cui è $\{F(x), G(x)\} \subset \mathbb{C}$, tipico nella Fisica Quantistica, dove, all'Eq. (2), in uno *Spazio di Hilbert* $\mathfrak{H}$ appropriato, corrisponde l'annullamento (non-banale) del *prodotto interno complesso* (nell'una o nell'altra forma equivalenti *sesqui-lineari*)

$$\langle F|G\rangle \approx \int_a^b (F(x))^* G(x)dx \equiv \int_a^b (G(x))^* F(x)dx \approx \langle G|F\rangle^* = 0\,, \tag{2.1}$$

dualmente associato a un integrale *à-la Lebesgue*. Comunque, per gli scopi di questa discussione semplificata, si assumerà, salvo avviso diverso, che sia $\{F(x), G(x)\} \subset \mathbb{R}$, con $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Ancora, un vettore geometrico elementare *unitario*, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, detto *versore* (contraddistinto da un accento circonflesso) in $\mathbb{R}^n$ ha *norma pitagorica* (o modulo) di valore 1, nel senso che

$$||\hat{\boldsymbol{\phi}}|| \equiv (\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}})^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \hat{\phi}_k^2\right)^{1/2} = 1\,. \tag{3}$$

Analogamente, mediante l'Eq. (2), si ottiene la generalizzazione dell'Eq. (3) in termini di *norma* (o *metrica*) *integrale di ordine 2* appropriata in (a, b),

$$||\hat{\phi}|| \equiv \langle\hat{\phi}|\hat{\phi}\rangle^{1/2} \approx \left(\int_a^b (\hat{\phi}(x))^2 dx\right)^{1/2} = 1\,, \tag{4}$$

dicendo che la funzione scalare $\hat{\phi}$ è *normale*, o *normalizzata* a 1, in (a, b).

Ora, dalle Eq.i (2) e (4) precedenti, si può indagare sull'esistenza di un insieme *numerabile* $\{\hat{\phi}_k\}$ (successione) di funzioni, le quali risultino, in (a, b), sia *ortogonali tra loro* sia *normalizzate* a 1,

$$\langle \hat{\phi}_j | \hat{\phi}_m \rangle \approx \int_a^b \hat{\phi}_j(x) \hat{\phi}_m(x)\, dx = \delta_{j,m}, \tag{5}$$

dove, $\delta_{j,m}$ è il *simbolo di Kronecker* consueto. Una tale successione di funzioni, se esiste, si dice che è *orto-normale* in (a, b). La normalizzazione a 1 è, convenzionalmente, *sottintesa*.

Esercizio 1

Si verifichi che l'insieme di funzioni (successione), *numerabile* vs. l'indice $k \in \mathbb{Z}$,

$$\{1/(2\lambda)^{1/2}\} \cup \{(1/\lambda^{1/2}) \cos(k\pi x/\lambda), (1/\lambda^{1/2}) \sin(k\pi x/\lambda)\}_k,$$

è orto-normale in ogni x- intervallo *compatto* di ampiezza 2λ (> 0), simmetrico o no.

■

Il concetto di *ortogonalità funzionale* in (a, b) viene approfondita con la specificazione di una *funzione-peso*, o *funzione-densità*, appropriata quando si voglia generare uno *spazio vettoriale ortogonale* da un insieme-base numerabile $\{\Upsilon_k\}$ di funzioni *non necessariamente* ortogonali tra loro. In altri termini, lo scopo della *funzione-peso*, w, è quello di *rendere ortogonale* lo spazio vettoriale generato da $\{\Upsilon_k\}$ in (a, b), analogamente allo *jacobiano* di una trasformazione tra sistemi discreti di coordinate ortogonali continue (e.g., $dx\,dy\,dz \mapsto r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$). Per quanto riguarda l'*integrazione in* (a, b), in particolare, tutte le caratteristiche algoritmiche *à-la Riemann* rimangono invariate, salvo che l'elemento di variazione infinitesima dx viene sostituito da quello di *misura à-la Lebesgue-Stieltjes* (*LS*-), $dx \mapsto d\tau \equiv d\tau(x) := w(x)dx$.
La situazione descritta è tipica nelle rappresentazioni che coinvolgono, più o meno direttamente, le funzioni Υ_k come *generatori vettoriali* dello spazio *ortogonale* corrispondente in (a, b).

□

Sia $x \mapsto w(x)$ una funzione almeno *Riemann-integrabile* e generalmente *positiva* in (a, b). Se

$$\langle \Upsilon_j | \Upsilon_m \rangle \approx \int_a^b \Upsilon_j(x) \Upsilon_m(x) w(x)\, dx \equiv \int_{x=a}^b \Upsilon_j(x) \Upsilon_m(x)\, d\tau = \delta_{j,m}, \tag{6}$$

(*LS*-integrale) si dice che *l'insieme numerabile* $\{\Upsilon_k\}$ *di funzioni è orto-normale in* (a, b) *vs. la funzione-peso* w. In tal caso, *l'insieme di funzioni* $\{\hat{\phi}_k\} := \{w^{1/2}\Upsilon_k\}$ *è orto-normale in* (a, b) *vs.* $w \equiv \chi_{(a,b)}: x \mapsto \Theta(x-a) - \Theta(x-b)$, la *funzione caratteristica* dell'intervallo (a, b), nota anche come *funzione Gradino Unitario finito di Heaviside* (al più, è $w = \Theta(x-a)$, quando $b \to +\infty$).

Così come qualsiasi funzione vettoriale (e.g., 3-dim) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ può sempre essere espansa vs. una base vettoriale *orto-normale* arbitraria (e.g., quella cilindrica $\{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$, nella rappresentazione solita $\boldsymbol{r} \mapsto F_\rho(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_z(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{z}}$), si può considerare la possibilità di **associare** a una funzione $x \mapsto f(x)$, in un intervallo *aperto* e *limitato* opportuno, una *WSTK-espansione* ($\therefore$ *W*eil, H., *S*tone, M. H., *T*itchmarsh, E. C., *K*odaira, K.), in termini di un certo insieme-base numerabile $\{\Upsilon_n\}$ di funzioni mutuamente *ortogonali in tale intervallo*, nel quale, inoltre, si assuma che le funzioni Υ_n siano *orto-normalizzabili* vs. un insieme-base $\{\hat{\phi}_n\}$, con *funzione-peso* w, e generino le rappresentazioni

$$f(x) \risingdotseq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \Upsilon_n(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (w(x))^{-1/2} \hat{\phi}_n(x) \equiv \mathcal{S}(x), \tag{7}$$

$x \mapsto \mathcal{S}(x)$ è la funzione-somma della $\mathcal{WSTK}$-serie, *corrispondente in media* ($\risingdotseq$) a $f(x)$.
Se esiste la serie (7), essa è detta *espansione ortogonale* di $f(x)$ nell'intervallo aperto specificato e costituisce una generalizzazione del modello della *Serie di Fourier*.

Per le *Serie Ortogonali\Orto-normali* (vs. la *funzione-peso* in un certo intervallo *almeno* aperto), che rivestono sia grande rilevanza teorica che utilità applicativa in numerosi modelli della Fisica e dell'Ingegneria, vale il fondamentale

Teorema di espansione 1 ($\mathcal{WSTK}$-formulazione *minimale*) (*)

La funzione $x \mapsto f(x)$ sia limitata e *regolare a tratti* in (a, b), i.e.,

1. $f \in \mathcal{C}((a, b))$ tranne, al più, che in corrispondenza di un numero *finito* di punti x_j di discontinuità o *eliminabile* o *di 1º tipo* ($\exists\ f(x_j^-) \wedge f(x_j^+), \forall j, \Rightarrow f$ continua *a tratti*);

2. $\exists\ f'$ in (a, b) tranne, al più, che in corrispondenza di un numero *finito* di punti x_k tali che, però, $\exists\ f'(x_k^-) \wedge f'(x_k^+), \forall k$ (f derivabile *a tratti* $\Rightarrow f'$ continua *a tratti*).

Allora, $\forall x \in (a, b), \exists$, una $\mathcal{WSTK}$-serie convergente a f *in media*, i.e., tale che

$$f(x) \risingdotseq \mathcal{S}(x) \equiv \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)). \tag{8}$$

In particolare, se $f \in \mathcal{C}((a, b))$, l'uguaglianza *in media* (8) si riduce all'uguaglianza *puntuale*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \Upsilon_n(x) \quad (\equiv \mathcal{S}(x)), \tag{8.1}$$

$\forall x \in (a, b)$ (in breve: f è $\mathcal{WSTK}$-espandibile in (a, b)).
Quando la $\mathcal{WSTK}$-espandibilità vale nell'intervallo compatto $[a, b]$, allora, la $\mathcal{WSTK}$-serie converge *uniformemente* a $f(x)$ in $[a, b]$. ▲

Osservazione

Se f è espandibile in $\mathcal{T}$-serie ($\therefore$ Taylor) nell'intervallo $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, allora, in $\mathcal{I}$, essa è espandibile anche in $\mathcal{WSTK}$-serie. In generale, l'asserto inverso (*necessario*) è *falso*.

■

(*) Si confronti l'enunciato del *Teorema di espansione* con quello *di Dirichlet*, specifico per la *Serie di Fourier* (v., e.g., il math-notebook: **Serie di Fourier in $\mathbb{R}$ - Proprietà e applicazioni**, P. 6).
Peraltro, il *Teorema di espansione* di $\mathcal{WSTK}$ costituisce una generalizzazione del celebre *Teorema di Hilbert-Schmidt*.

Forma generale dei coefficienti di una $\mathcal{WSTK}$-espansione

Sia $f \in \mathcal{C}([a,b])$ ed espandibile, analogamente all'Eq. (8.1), dall'insieme-base numerabile $\{\Upsilon_n\}$ di funzioni *ortogonali* tra loro in $[a,b]$ vs. la *funzione-peso* $x \mapsto w(x)$.
Moltiplicando i termini in entrambi i membri dell'Eq. (8.1) per il prodotto $\Upsilon_q w$, dove Υ_q è un elemento qualsiasi della base *ortogonale*, e integrando vs. $x \in [a,b]$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\Upsilon_q(x)w(x)dx &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\Upsilon_n(x)\right)\Upsilon_q(x)w(x)dx \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{x=a}^b \Upsilon_n(x)\Upsilon_q(x)d\tau \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\delta_{nq}\right)\int_{x=a}^b (\Upsilon_q(x))^2 d\tau = c_q\int_{x=a}^b (\Upsilon_q(x))^2 d\tau \\ &\approx c_q\langle \Upsilon_q|\Upsilon_q\rangle,\end{aligned}$$

dall'ortogonalità tra gli elementi della base $\{\Upsilon_n\}$ vs. la *funzione-peso* w. Inoltre, la commutabilità delle operazioni di somma numerabile e di integrale definito è lecita, data la continuità *uniforme* di f nell'intervallo *compatto* $[a,b]$ di integrazione.
L'espressione di c_q si scrive $(d\tau \equiv d\tau(x) := w(x)dx)$

$$c_q = \frac{\displaystyle\int_{x=a}^b f(x)\Upsilon_q(x)d\tau}{\displaystyle\int_{x=a}^b (\Upsilon_q(x))^2 d\tau} \approx \frac{\langle f|\Upsilon_q\rangle}{\langle \Upsilon_q|\Upsilon_q\rangle}. \tag{9}$$

□

Si può estendere la validità del *Teorema di espansione*, mantenendo la forma (9) dei coefficienti di una $\mathcal{WSTK}$-espansione associata in (a,b) a una funzione f *qualsiasi*, purché siano mantenute le condizioni *sufficienti* espresse dal

Teorema di espansione 2 ($\mathcal{WSTK}$-formulazione *massimale*)

Si abbia che

1. $f \in \mathcal{C}((a,b))$, salvo, al più, che in corrispondenza di un numero *finito* di punti in (a,b) di discontinuità di *qualsiasi* tipo per f;
2. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|(w(x))^{1/2}dx < +\infty$, sia questo un integrale definito ordinario oppure generalizzato (i.e., nel contesto più tecnico e più profondo della *Teoria della Misura*, si richiede che sia $w^{1/2}\circ f \in \mathcal{L}^1((a,b))$, la classe delle funzioni *sommabili assolutamente* nell'aperto (a,b)).

Allora, f risulta espandibile in $\mathcal{WSTK}$-serie $\forall\, x \in (a,b)$ che *non* sia un punto di discontinuità di 2° tipo (o *essenziale*), con il valore $f(x)$ espresso ancora dall'Eq. (8). In corrispondenza di un punto in (a,b) di discontinuità di 2° tipo, si può *assegnare* a f un valore *finito* arbitrario. ▲

■■■

Approssimazione mediante quadrati minimi

Sia f *limitata* e *regolare a tratti* in (a,b). Qui, pertanto, è definibile un insieme-base *numerabile* di funzioni $\{\Upsilon_n\}$, mutuamente *orto-normali* vs. la *funzione-peso* w, il quale genera un'espansione in serie convergente almeno *in media* a $f(x)$, secondo l'Eq. (8), e avente somma $\mathcal{S}(x)$.

Ora, dal confronto con l'Eq. (7), la somma finita di coefficienti *arbitrari*

$$s_M(x) := \sum_{n=0}^{M} c_n \delta_{nq} \kappa_n \Upsilon_n(x) \tag{10}$$

può essere considerata, come un'*approssimazione* di $f(x)$ in (a,b) affetta da un *errore* (*scarto*) *quadratico medio*, dipendente da M, esprimibile dall'*LS*-integrale $(d\tau \equiv w(x)\,dx)$

$$\sigma_M^2 := \frac{1}{b-a}\int_{x=a}^{b} (f(x)-s_M(x))^2 d\tau. \tag{11}$$

Riscrivendo esplicitamente vs. x la funzione integranda contenuta nella forma (11) come

$$\begin{aligned}(f(x)-s_M(x))^2 w(x) &\equiv ((f(x))^2 - 2f(x)s_M(x) + (s_M(x))^2)\,w(x)\\ &= (f(x))^2 w(x) - 2\sum_{n=0}^{M}\kappa_n f(x)\Upsilon_n(x)w(x) + \hookleftarrow\\ &\qquad \Lsh + \sum_{n=0}^{M}\sum_{j=0}^{M}\kappa_j\kappa_n\hat{\phi}_j(x)\hat{\phi}_n(x)\end{aligned} \tag{12}$$

e, integrando l'espansione quadratica (12) tra a e b, si ottiene successivamente (vs. w in (a,b))

$$\begin{aligned}\int_{x=a}^{b}(f(x)-s_M(x))^2 d\tau &= \int_{x=a}^{b}(f(x))^2 d\tau - 2\sum_{n=0}^{M}\kappa_n\int_{x=a}^{b} f(x)\Upsilon_n(x)\,d\tau + \hookleftarrow\\ &\qquad \Lsh + \sum_{n=0}^{M}\sum_{j=0}^{M}\kappa_j\kappa_n\int_a^b \hat{\phi}_j(x)\hat{\phi}_n(x)\,dx\\ &\approx \langle f|f\rangle - 2\sum_{n=0}^{M}\kappa_n\langle f|\Upsilon_n\rangle + \sum_{n=0}^{M}\sum_{j=0}^{M}\kappa_j\kappa_n\langle\hat{\phi}_j|\hat{\phi}_n\rangle = \langle f|f\rangle - 2\sum_{n=0}^{M}\kappa_n c_n + \sum_{n=0}^{M}\kappa_n^2,\\ &\qquad\qquad \text{dalle Eq.i (9) e (5),}\\ &\equiv \langle f|f\rangle + \sum_{n=0}^{M}(\kappa_n - c_n)^2 - \sum_{n=0}^{M} c_n^2.\end{aligned} \tag{13}$$

Dall'Eq. (13), è immediato concludere che σ_M^2 è *minimo* quando si scelga $\kappa_n \equiv c_n$, $\forall\, n \le M$, i.e., *quando i coefficienti* κ_n *coincidono con i* $\mathcal{WSTK}$*-coefficienti corrispondenti*.
Tale restrizione, detta *regime di quadrati minimi*, riduce l'Eq. (13) alla forma

$$\int_{x=a}^{b}(f(x)-s_M(x))^2 d\tau = \langle f|f\rangle - \sum_{n=0}^{M} c_n^2. \tag{14}$$

L'integrale a sinistro nell'Eq. (14), quando esiste, è *non-negativo*. Questa circostanza implica la disuguaglianza attenuata $\sum_{n=0}^{M} c_n^2 \le \int_{x=a}^{b}(f(x))^2 d\tau$, la quale, essendo f *limitata* e *indipendente* da M in (a,b), dà luogo, per $M \to +\infty$, alla

Disuguaglianza (attenuata) generale di Bessel:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \le \int_{x=a}^{b} (f(x))^2 d\tau \approx \langle f | f \rangle. \tag{15}$$

Quando valga l'uguaglianza, la *Disuguaglianza* (*attenuata*) *generale di Bessel* si riduce alla

Uguaglianza di Parseval generalizzata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 = \int_{x=a}^{b} (f(x))^2 d\tau \approx \langle f | f \rangle. \tag{16}$$

■

La validità della *Disuguaglianza* (*attenuata*) *generale di Bessel* e, da questa, dell'*Uguaglianza di Parseval generalizzata*, dipende dalla presenza di *tutti* gli elementi dell'insieme-base *orto-normale* di funzioni $\{\hat{\phi}_n\}$ – *nessun elemento escluso*! – quando $M \to +\infty$ in $s_M(x)$, in *regime di minimi quadrati* (i.e., con $\kappa_n \equiv c_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_0^+$). Tale condizione si esprime nel fondamentale

TEOREMA di Completezza per una base orto-normale

Condizione *necessaria* e *sufficiente* affinché un insieme-base ortogonale di funzioni $\{\Upsilon_n\}$ sia *completo* in (a, b) vs. f è che, in *regime di minimi quadrati* (con peso w in (a, b)), risulti

$$\lim_{M \to +\infty} \sigma_M^2 \equiv \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{b-a} \int_{x=a}^{b} (f(x) - s_M(x))^2 d\tau = 0\,. \blacktriangle \tag{17}$$

In modo equivalente al limite (17), avendo presente l'Eq. (8), si incontra, talvolta, la scrittura $\underset{M \to +\infty}{l.i.m.}\, s_M(x) = f(x)$, intendendo che la convergenza di $s_M(x)$ a $f(x)$ costituisce un'operazione di **l**imite-**i**n-**m**edia.

Tecnicamente, l'integrale contenuto nel limite (17) corrisponde a un integrale *à-la Lebesgue*.

Infatti, l'annullamento-limite richiesto dal *Teorema di Completezza* non riguarda lo scarto relativo $f(x) - s_M(x)$ ma soltanto lo scarto *medio* (in senso integrale) *quadratico*, coerentemente con la condizione rilassata (8) di *convergenza-in-media* a $f(x)$ della $\mathcal{WSTK}$-espansione.

Una conseguenza importante della completezza di $\{\Upsilon_n\}$ in *regime di minimi quadrati* vs. la *funzione-peso* w è espressa dal

Teorema di Riemann (*formulazione generalizzata*)

Se vale la *Disuguaglianza* (*attenuata*) *generale di Bessel* per f in (a, b), allora, vale anche il limite

$$\lim_{n \to +\infty} c_n \equiv \lim_{n \to +\infty} \int_{x=a}^{b} f(x) \Upsilon_n(x) d\tau \approx \lim_{n \to +\infty} \langle f | \Upsilon_n \rangle = 0\,. \blacktriangle \tag{18}$$

Dimostrazione

L'asserto è immediatamente evidente dall'Eq. (15), osservando che, se $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 < +\infty$, ciò implica che $c_n = o(1)$ per $n \to +\infty$.

■

Come conclusione di questa panoramica elementare (e fin troppo breve) sulle proprietà esistenziali dei sistemi di funzioni *orto-normali* in un intervallo limitato, è *proposta* la costruzione (semplice) di una dimostrazione del seguente

Teorema (condizione *sufficiente* di **non-Completezza**)

Sia (a, b) un intervallo *aperto*, nel quale, sono definiti

- un insieme numerabile $\{\Upsilon_n\}$ di funzioni *limitate*, *integrabili* e mutuamente *ortogonali* vs. la *funzione-peso* w $(: x \mapsto w(x) \equiv d\tau/dx)$ e
- una funzione integrabile $x \mapsto f(x) \neq 0$ generalmente.

Se risulta

$$\langle f|\Upsilon_n\rangle \approx \int_{x=a}^{b} f(x)\Upsilon_n(x)\,d\tau = 0 \tag{19}$$

$\forall\, n \in \mathbb{Z}_0^+ \ (\equiv \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, allora, $\{\Upsilon_n\}$ *non è* completo in (a, b) vs. la *funzione-peso* w.

La proposizione inversa è *falsa*. ▲

■■■

Generazione di un Insieme-base orto-normale in (a, b)

Il Metodo di Gram-Schmidt

Fin qui, la discussione si è concentrata sulle proprietà generali di una base *numerabile* qualsiasi, $\{\Upsilon_n\}$, di funzioni mutuamente *ortogonali* in un intervallo aperto (a, b) vs. una *funzione-peso* w.
Appare evidente, e.g., dalle Eq.i (7) e (8.1), che $\{\Upsilon_n\}$ genera, dall'intervallo (a, b), uno *spazio ortogonale* di dimensione infinita dotato di *prodotto interno*. La richiesta ulteriore che la base $\{\Upsilon_n\}$ sia *completa* in (a, b) garantirebbe l'idoneità di $\{\Upsilon_n\}$ a rappresentare in $\mathcal{WSTK}$-serie, in (a, b), ogni funzione che soddisfi le ipotesi del *Teorema di espansione*.

È noto un raffinamento operativo consistente in un procedimento *auto-generatore* di un insieme orto-normale $\{\hat{\phi}_n\}$ in (a, b), fatto evolvere da un insieme (numerabile) *qualsiasi* $\{u_n\}$ di funzioni *assegnate*, limitate e *linearmente indipendenti* in (a, b). L'indipendenza lineare delle funzioni u_n è una condizione necessaria quasi ovvia, data l'ortogonalità in (a, b) tra gli elementi-base $\hat{\phi}_n$ unitari cercati. L'origine e la natura dell'insieme $\{u_n\}$ sono irrilevanti; ad esempio, $\{u_n\}$ potrebbe risultare dalla ricerca della soluzione generale di un'equazione differenziale a derivate parziali del 2° ordine, nella quale il parametro *auto-valore* sia indipendente dalla/e costante/i di separazione.
Il procedimento auto-generativo citato, probabilmente il più celebre e semplice disponibile, benché applicabile in modo sistematico solo con l'aiuto di un computer, è quello noto come il *Metodo di Gram-Schmidt*. Esso ha il suo fondamento in Algebra Lineare, precisamente, nel seguente

Teorema di esistenza

Sia $\mathbf{V} \not\equiv \{0\}$ uno spazio vettoriale nell'insieme *aperto* $\Omega \subseteq \mathcal{C}$, di dimensione *finita o infinita* e dotato di *prodotto interno non-negativo-definito*. Inoltre, sia $\{u_n\}$ un insieme numerabile qualsiasi in $\mathbf{V}$ di *vettori limitati* (i.e., $\|u_n\| < +\infty$) e *linearmente indipendenti* in Ω.
Allora, $\exists$ una *base orto-normale* generatrice di $\mathbf{V}$ e deducibile da $\{u_n\}$. ▲

■

Dimostrazione esistenziale costruttiva di $\{\hat{\phi}_n\}$ **in** $\Omega \equiv (a, b) \subset \mathbb{R}$:

Il *Metodo di Gram-Schmidt* procede *induttivamente* con la costruzione *ricorsiva* esplicita degli elementi della base orto-normale richiesta nell'intervallo aperto (a, b). Secondo la terminologia dell'Algebra Lineare, esso è equivalente a una trasformazione matriciale $\mathbf{A}$ (matrice *triangolare*) da un insieme numerabile *non necessariamente* ortogonale di vettori, l'insieme di funzioni $\{u_n\}$, a una base *orto-normale* di vettori vs. la *funzione-peso caratteristica in* (a, b), $\chi_{(a,b)}$, l'insieme di funzioni $\{\hat{\phi}_n\} \equiv \{w^{1/2} u_n\}$.
Riferendo $\{u_n\}$ all'espansione in $\mathcal{WSTK}$-serie nell'intervallo aperto *arbitrario* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ vs. la *funzione-peso* generica w, si incomincia *definendo*

$$\hat{\phi}_0(x) := \frac{u_0(x)}{\|u_0\|} \equiv \frac{u_0(x)}{\left(\int_a^b (u_0(x))^2 w(x)\, dx\right)^{1/2}} \approx \frac{u_0(x)}{\langle u_0 | u_0 \rangle^{1/2}} . \tag{20}$$

Poi, *definita* la combinazione lineare

$$\Phi_1(x) := u_1(x) - \langle u_1|\hat{\phi}_0\rangle\,\hat{\phi}_0(x)\,, \tag{21.1}$$

si verifica facilmente che Φ_1 e $\hat{\phi}_0$ sono ortogonali tra loro. Infatti, dall'Eq. (21.1), risulta

$$\langle \Phi_1|\hat{\phi}_0\rangle = \langle u_1|\hat{\phi}_0\rangle - \langle u_1|\hat{\phi}_0\rangle \underbrace{\langle \hat{\phi}_0|\hat{\phi}_0\rangle}_{\equiv 1} \equiv 0\,. \tag{21.2}$$

Pertanto, dopo aver posto

$$\hat{\phi}_1(x) := \frac{\Phi_1(x)}{\|\Phi_1\|} \equiv \frac{\Phi_1(x)}{\left(\displaystyle\int_a^b (\Phi_1(x))^2\, w(x)\,dx\right)^{1/2}} \approx \frac{\Phi_1(x)}{\langle \Phi_1|\Phi_1\rangle^{1/2}}\,, \tag{22}$$

si conclude immediatamente che la coppia $\{\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1\}$ è *orto-normale*.
La costruzione di *Gram-Schmidt* prosegue con la *definizione*

$$\Phi_2(x) := u_2(x) - \langle u_2|\hat{\phi}_0\rangle\,\hat{\phi}_0(x) - \langle u_2|\hat{\phi}_1\rangle\,\hat{\phi}_1(x)\,, \tag{23.1}$$

dalla quale, verificata l'ortogonalità di Φ_2 vs. sia $\hat{\phi}_0$ che $\hat{\phi}_1$,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_2|\hat{\phi}_0\rangle &= \langle u_2|\hat{\phi}_0\rangle - \langle u_2|\hat{\phi}_0\rangle \underbrace{\langle \hat{\phi}_0|\hat{\phi}_0\rangle}_{\equiv 1} - \langle u_2|\hat{\phi}_1\rangle \underbrace{\langle \hat{\phi}_1|\hat{\phi}_0\rangle}_{\equiv 0} \equiv 0\,,\\
\langle \Phi_2|\hat{\phi}_1\rangle &= \langle u_2|\hat{\phi}_1\rangle - \langle u_2|\hat{\phi}_1\rangle \underbrace{\langle \hat{\phi}_0|\hat{\phi}_1\rangle}_{\equiv 0} - \langle u_2|\hat{\phi}_1\rangle \underbrace{\langle \hat{\phi}_1|\hat{\phi}_1\rangle}_{\equiv 1} \equiv 0\,,
\end{aligned} \tag{23.2}$$

si ottiene un nuovo elemento-base normalizzato a 1 in (a, b),

$$\hat{\phi}_2(x) := \frac{\Phi_2(x)}{\|\Phi_2\|} \equiv \frac{\Phi_2(x)}{\left(\displaystyle\int_a^b (\Phi_2(x))^2\, w(x)\,dx\right)^{1/2}} \approx \frac{\Phi_2(x)}{\langle \Phi_2|\Phi_2\rangle^{1/2}}\,. \tag{24}$$

Questo, insieme con i due precedenti, costituisce la terna *orto-normale* $\{\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2\}$.
In generale, dopo aver costruito l' n-pla orto-normale $\{\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_{n-1}\}$, si assegna

$$\Phi_n(x) := u_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_n|\hat{\phi}_k\rangle\,\hat{\phi}_k(x) \equiv u_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x=a}^{b} u_n(x)\,\hat{\phi}_k(x)\,d\tau\right)\hat{\phi}_k(x)\,, \tag{25}$$

che si verifica facilmente essere ortogonale, in (a, b), a *ciascuno* degli n elementi $\hat{\phi}_k$.
Quindi, l' $(n+1)$-esimo elemento dell'insieme orto-normale successivo, $\{\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_{n-1}, \hat{\phi}_n\}$, è *definito* da

$$\hat{\phi}_n(x) := \frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n\|} \equiv \frac{\Phi_n(x)}{\left(\displaystyle\int_{x=a}^b (\Phi_n(x))^2\, d\tau\right)^{1/2}} \approx \frac{\Phi_n(x)}{\langle \Phi_n|\Phi_n\rangle^{1/2}}\,, \tag{26}$$

e così via – *costruttivamente* – per $n \to +\infty$.

■

Rappresentazione di Dirac dell'espansione di Gram-Schmidt

L'espansione (25) può essere riscritta in termini di *operatori di proiezione*, o *proiettori*, $\mathcal{P}_k$, interpretando il *coefficiente* integrale generico $\langle u_n|\hat{\phi}_k\rangle$ (i.e., l'elemento $\alpha_{n,k}$ della matrice $\mathbf{A}$ di trasformazione) come la *proiezione* del vettore u_n sulla 'direzione' del vettore $\hat{\phi}_k$ di *riferimento orto-normale*, i.e., come la 'componente' k-esima del vettore u_n (vs. w in (a,b)). Ricorrendo alla *notazione vettoriale di Dirac*, $f \approx |f\rangle$ $(\equiv \langle f|^*)$, etc., si scrive l'integrale generale nell'Eq. (25):

$$\left(\int_{x=a}^{b} u_n(x)\hat{\phi}_k(x)d\tau\right)\hat{\phi}_k(x) \equiv \hat{\phi}_k(x)\left(\int_{x=a}^{b} u_n(x)\hat{\phi}_k(x)d\tau\right)$$
$$\approx |\hat{\phi}_k\rangle\langle u_n|\hat{\phi}_k\rangle \equiv |\hat{\phi}_k\rangle\langle\hat{\phi}_k|u_n\rangle := \mathcal{P}_k|u_n\rangle \approx \mathcal{P}_k u_n(x),$$

avendo definito il proiettore k-simo del *ket* n-simo

$$\mathcal{P}_k := |\hat{\phi}_k\rangle\langle\hat{\phi}_k| \equiv |w^{1/2}\Upsilon_k\rangle\langle w^{1/2}\Upsilon_k| \tag{27}$$

e avendo tenuto conto dell'Eq. (2).

Pertanto, indicato con il simbolo $\mathcal{I} \equiv \mathcal{P}_0$ il *proiettore unitario* (o proiettore-*identità*) nello spazio *lineare* dei proiettori $\mathcal{P}_k$, la rappresentazione operatoriale dell'Eq. (25) è data da

$$\Phi_n(x) \approx \left(\mathcal{P}_0 - \sum_{k=1}^{n-1}\mathcal{P}_k\right)|u_n\rangle \equiv \left(\mathcal{I} - \sum_{k=1}^{n-1}\mathcal{P}_k\right)u_n(x). \tag{28}$$

La sottrazione da $\mathcal{I}$ delle componenti k-esime $(k = 1,\ldots,n-1)$, lascia Φ_n *ortogonale* (in (a,b), vs. w) a tutti i vettori $\hat{\phi}_k$.

[Una presentazione semplice ma esauriente dell'algebra *bra-ket* di Dirac, è contenuta, e.g., in [13], PP. 108-131; v., anche, [14], VOL. I, CH. VII, P. 243.

■■■

Jorgen Pedersen Gram (1850-1916)

Erhard Schmidt (1876-1959)

APPLICAZIONI

I. Il sistema orto-normale delle Funzioni di Bessel J_ν

Poiché le *Funzioni di Bessel* $x \mapsto J_\nu(\lambda x) \equiv y_1$ e $x \mapsto J_\nu(\mu x) \equiv y_2$, *Ordinarie di* 1° *tipo*, dello **stesso** ordine (o rango) $\nu \in (-1, +\infty)$ e di argomento *proporzionale* a x, sono, rispettivamente, integrali particolari delle equazioni differenziali, con $\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}^+ \wedge \lambda \neq \mu$, (†)

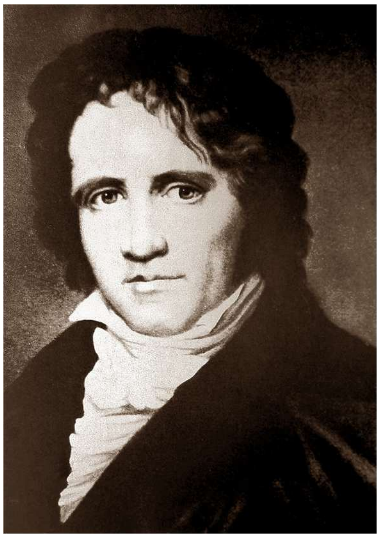
$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0\,, \tag{29.1}$$

$$x^2 y'' + xy' + (\mu^2 x^2 - \nu^2) y = 0\,, \tag{29.2}$$

(†) Una verifica di questa proprietà si può trovare, e.g., nel math-notebook: **Equazioni Differenziali Ordinarie Lineari del 2° ordine a coefficienti variabili - Metodi di Integrazione**, P. 5, Eq.i (15.2) e (15.1). Inoltre, si ricordi l'espansione fondamentale in serie di potenze

$$J_\nu(\alpha x) = \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{2k}, \tag{30}$$

definita $\forall \nu \in \mathbb{C}$.



Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

---

valgono, dunque, le identità ovvie,

$$x^2 y_1'' + x y_1'' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y_1 \equiv 0\,, \tag{31.1}$$

$$x^2 y_2'' + x y_2' + (\mu^2 x^2 - \nu^2) y_2 \equiv 0\,. \tag{31.2}$$

Applicando il *Metodo di Green* (GEORGE, 1793-1841), si moltiplicano i termini nell'Id. (31.1) per y_2 e quelli nell'Id. (31.2) per y_1 e si sottraggono tra loro le espressioni così ottenute. Quindi, si divide la differenza risultante per $x \neq 0$, rimanendo con l'uguaglianza

$$x(y_2 y_1'' - y_1 y_2'') + (y_2 y_1' - y_1 y_2') + (\lambda^2 - \mu^2) x y_1 y_2 = 0\,,$$

che è riscrivibile, in modo equivalente, come

$$(\mu^2 - \lambda^2) x y_1 y_2 = \frac{d}{dx}(x(y_2 y_1' - y_1 y_2'))\,. \tag{32}$$

Quando $\nu \in (-1, +\infty)$, l'integrazione parametrica tra 0 e x (> 0) dell'Eq. (32) è lecita:

$$(\mu^2 - \lambda^2) \int_0^x y_1(t) y_2(t)\, t\, dt = (t(y_2(t) y_1'(t) - y_1(t) y_2'(t)))\Big|_0^{\beta x}\,. \tag{33}$$

Dividendo l'Eq. (33) per $\mu^2-\lambda^2 \neq 0$ e ripristinando le espressioni di y_1 e di y_2, risulta

$$\int_0^x J_\nu(\lambda t)\, J_\nu(\mu t)\, t\, dt = \frac{x(\lambda J_\nu(\mu x) J'_\nu(\lambda x) - \mu J_\nu(\lambda x) J'_\nu(\mu x))}{\mu^2-\lambda^2}, \tag{34}$$

noto come il *1º Integrale di* LOMMEL (E. C. J., VON, 1837-1899), avendo x si, per continuità vs. , che

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^x J_\nu(\lambda t)\, J_\nu(\mu t)\, t\, dt \equiv \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\lambda J_\nu(\mu x) J'_\nu(\lambda x) - \mu J_\nu(\lambda x) J'_\nu(\mu x))}{\mu^2-\lambda^2} = 0\,. \tag{35}$$

Se l'integrale (34) è definito tra 0 e $L \in \mathbb{R}^+$, risulta, $\forall\, \nu \in (-1, +\infty)$ (v., anche, **Esercizio 2**),

$$\int_0^L J_\nu(\lambda x)\, J_\nu(\mu x)\, x\, dx = \frac{L(\lambda J_\nu(\mu L) J'_\nu(\lambda L) - \mu J_\nu(\lambda L) J'_\nu(\mu L))}{\mu^2-\lambda^2}, \tag{36}$$

Ora, si consideri il caso in cui λ e μ sono scelte in modo che λL e μL siano due qualsiasi delle infinite *radici positive* – tutte **distinte e semplici**! – dell'equazione

$$C_1 (x/L)\, J'_\nu(x) + C_2\, J_\nu(x) = 0, \tag{37}$$

nella quale, i parametri *non* sono entrambi nulli. In tal caso, C_1 e C_2 deve valere il sistema lineare nelle *incognite* C_1 e C_2

$$\begin{cases} C_1 \lambda J'_\nu(\lambda L) + C_2\, J_\nu(\lambda L) = 0 \\ C_1 \mu J'_\nu(\mu L) + C_2\, J_\nu(\mu L) = 0 \end{cases}. \tag{38}$$

Avendo escluso la soluzione banale $\{C_1, C_2\} \equiv \{0, 0\}$, allora, deve essere nullo il determinante dei coefficienti del sistema lineare (38),

$$\begin{vmatrix} \lambda J'_\nu(\lambda L) & J_\nu(\lambda L) \\ \mu J'_\nu(\mu L) & J_\nu(\mu L) \end{vmatrix} = \lambda J_\nu(\mu L) J'_\nu(\lambda L) - \mu J_\nu(\lambda L) J'_\nu(\mu L) = 0\,. \tag{39}$$

Pertanto, se λL e μL sono due qualsiasi *radici distinte* dell'Eq. (37), segue, dall'Eq. (36), che

$$\int_0^L J_\nu(\lambda x)\, J_\nu(\mu x)\, x\, dx = 0, \tag{40}$$

i.e., che le *Funzioni di Bessel* J_μ e J_ν sono *mutuamente ortogonali* in $(0, L)$ vs. la *funzione-peso* x, ovvero, che le funzioni $x^{1/2} J_\mu$ e $x^{1/2} J_\nu$ sono mutuamente *ortogonali* in $(0, L)$ vs. la *funzione-peso* (caratteristica) $\chi_{(0,L)}$ (cf/c Eq. (6)).

□

L'Eq. (37) costituisce il primo passo verso la costruzione di una base vettoriale *orto-normale* mediante le *Funzioni di Bessel* di 1º tipo e dello *stesso* ordine $\nu \in (-1, +\infty)$.

Il passo successivo consiste nella *normalizzazione a* 1 delle funzioni generiche $x \mapsto x^{1/2} J_\nu(\kappa x)$, ancora assumendo che κL sia una qualsiasi delle *infinite* radici, *semplici e distinte*, dell'Eq. (37).

Considerando λ e μ nell'integrale (34) come parametri *continui*, l'espressione finita di tale integrale tende alla forma di indecisione $[0/0]$ nel limite $\mu \to \lambda$. Allora, applicando all'integrale (36) la *1ª Regola di de l'Hôpital* vs. μ, si scrive,

$$\begin{aligned}\int_0^L (J_\nu(\lambda x))^2 x\,dx &= \lim_{\mu\to\lambda}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{L(\lambda J_\nu(\mu L)J'_\nu(\lambda L)-\mu J_\nu(\lambda L)J'_\nu(\mu L))}{\mu^2-\lambda^2}\right)\\ &= L\lim_{\mu\to\lambda}\frac{\lambda L J'_\nu(\mu L)J'_\nu(\lambda L)-J_\nu(\lambda L)J'_\nu(\mu L)-\mu L J_\nu(\lambda L)J''_\nu(\mu L)}{2\mu}\\ &\equiv \frac{L^2}{2}\left((J'_\nu(\lambda L))^2-\frac{J_\nu(\lambda L)J'_\nu(\lambda L)}{\lambda L}-J_\nu(\lambda L)J''_\nu(\lambda L)\right). \end{aligned}\tag{41}$$

Un'espressione per $J''_\nu(\lambda L)$ è determinabile osservando che, dall'*Equazione di Bessel* definita nell'intervallo $(0,1)$ – $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y = 0$ – segue, per $x = \lambda L$, che l'identità *numerica*

$$(\lambda L)^2 J''_\nu(\lambda L)+(\lambda L)J'_\nu(\lambda L)+((\lambda L)^2-\nu^2)J_\nu(\lambda L)\equiv 0,$$

è riscrivibile come

$$J''_\nu(\lambda L)\equiv -\frac{J'_\nu(\lambda L)}{\lambda L}-\left(1-\frac{\nu^2}{(\lambda L)^2}\right)J_\nu(\lambda L).\tag{42}$$

Sostituendo l'Id. (42) nell'Eq. (41), riferita all'intervallo $(0,L)$, si arriva all'integrale cercato, il cosiddetto *2º Integrale di Lommel*,

$$\int_0^L (J_\nu(\lambda x))^2 x\,dx = \frac{L^2}{2}((J'_\nu(\lambda L))^2+(1-\nu^2/(\lambda L)^2)(J_\nu(\lambda L))^2).\tag{43}$$

Questo, a sua volta, fornisce prontamente l'orto-normalizzazione in $(0,L)$, detta *di Dini-Bessel*,

$$1 = \frac{2}{L^2((J'_\nu(\lambda L))^2+(1-\nu^2/(\lambda L)^2)(J_\nu(\lambda L))^2)}\int_0^L x(J_\nu(\lambda x))^2dx.\tag{44}$$

In particolare, se $\lambda L\equiv x_{\nu,k}$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$ è una delle infinite *radici positive*, **distinte e semplici** di $J_\nu(x)$, l'orto-normalizzazione *di Dini-Bessel* si riduce a quella *di Fourier-Bessel*,

$$1 = \frac{2}{(L J'_\nu(x_{\nu,k}))^2}\int_0^L x(J_\nu((x_{\nu,k}/L)x))^2dx \tag{45.1}$$

$$\equiv \frac{2}{(L J_{\nu+1}(x_{\nu,k}))^2}\int_0^L x(J_\nu((x_{\nu,k}/L)x))^2dx,\tag{45.2}$$

facendo ricorso, per la forma (45.2), all'identità generale $J'_\nu(x) = (\nu/x)J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$.

Ora, si assuma che la funzione $f: x\mapsto f(x)$ soddisfi le condizioni del *Teorema generalizzato di Dirichlet* nell'intervallo $(0,L)$ e si consideri la successione *crescente*, $\{\lambda_n L\}$, delle radici *positive* (distinte e semplici) dell'Eq. (37) (dunque, risulta $0<\lambda_1L<\lambda_2L<\lambda_3L<\ldots$). Dall'Eq. (40), normalizzata a 1 mediante l'Eq. (44), si determina la *base vettoriale numerabile* (di indice n) *orto-normale* in $(0,L)$ vs. la funzione-peso $w\equiv x$ (con l'abbreviazione $J_{\nu,\lambda_n}\equiv x\mapsto J_\nu(\lambda_n L)$),

$$\{\Upsilon_n\}\equiv\left\{\frac{2^{1/2}}{L((J'_\nu(\lambda_n L))^2+(1-\nu^2/(\lambda_n L)^2)(J_\nu(\lambda_n L))^2)^{1/2}}J_{\nu,\lambda_n}\right\},\tag{46}$$

che genera l'espansione di $f(x)$ in $(0,L)$ *di Dini-Bessel*,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x), \tag{47}$$

i cui coefficienti sono esprimibili mediante le Eq.i (9) e (44),

$$c_n = \frac{2}{L^2((J'_\nu(\lambda_n L))^2 + (1-\nu^2/(\lambda_n L)^2)(J_\nu(\lambda_n L))^2)} \int_0^L f(x) J_\nu(\lambda_n x)\, x\, dx. \tag{48}$$

In modo analogo, se $\lambda_n L \equiv x_{\nu,n}$ corrisponde, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, all'$n$-sima *radice positiva* di $J_\nu(x)$, dall'Eq. (36), normalizzata a 1 con l'Eq. (45.2), si ottiene la base vettoriale orto-normale numerabile in $(0, L)$ vs. la *funzione-peso* $w \equiv x$,

$$\{\Upsilon_n\} \equiv \left\{ \frac{2^{1/2}}{L J_{\nu+1}(x_{\nu,n})} J_{\nu, x_{\nu,n}/L} \right\}. \tag{49}$$

Questa genera l'espansione celebre di $f(x)$, cosiddetta *di Fourier-Bessel* o *di Hankel*, in $(0, L)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n J_\nu((x_{\nu,n}/L)x), \tag{50}$$

i cui coefficienti, esprimibili mediante le Eq.i (9) e\o (45.2) generali, si scrivono

$$c_n = \frac{2}{(L J_{\nu+1}(x_{\nu,n}))^2} \int_0^L f(x) J_\nu((x_{\nu,n}/L)x)\, x\, dx. \tag{51}$$

George Neville Watson (1886-1965)

■■■

Esercizio 2

Si verifichi che l'integrale (36) possiede la forma equivalente

$$\int_0^L J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x)\, x\, dx = \frac{L}{\lambda^2 - \mu^2}\left(\lambda J_{\nu+1}(\lambda L) J_\nu(\mu L) - \mu J_{\nu+1}(\mu L) J_\nu(\lambda L) - \frac{\nu(\lambda - \mu)}{x} J_\nu(\lambda L) J_\nu(\mu L) \right).$$

Hermann Hankel (1839-1873)

II. Espansioni in serie di Polinomi e di Funzioni Associate orto-normali

Il *Metodo di Green* seguìto per la determinazione delle basi vettoriali orto-normali generatrici delle espansioni di *Dini-Bessel* e di *Fourier-Bessel* trova applicazione nel caso di molte altre classi di funzioni ortogonali in intervalli specifici. La costruzione delle espansioni corrispondenti per una generica funzione $x \mapsto f(x)$ che soddisfi le condizioni del **Teorema di espansione 2** è proposta negli **Esercizi** seguenti, di risoluzione immediata e decisamente meccanica:

Esercizio 3

La *Funzione (Associata) di Legendre* $x \mapsto P_n^m(x)$, *di* 1° *tipo*, di *ordine* n e di *rango* m, con $n \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge m = 0, 1, 2, \ldots, n$, è un integrale particolare dell'*Equazione Differenziale Associata di Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0. \tag{52}$$

Per $m = 0$, si ottiene $P_n^0(x) \equiv P_n(x)$, il *Polinomio Ordinario di Legendre* di grado (ordine) n.
Ora, si considerino due *Funzioni Associate di Legendre*, $x \mapsto P_k^m(x) \wedge P_l^m(x)$, di ordini k e l rispettivi qualsiasi ma dello *stesso* rango m. Tenendo presenti le definizioni fondamentali, dette *Formule generatrici di* RODRIGUES (BENJAMIN OLINDE, 1794-1851), verificabili *per induzione*,

$$P_n^m(\xi) := (1-\xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_n(\xi), \tag{53.1}$$

$$P_n(\xi) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n, \tag{53.2}$$

si ricavi l'*integrale di ortogonalità* nell'intervallo $(-1, 1)$ vs. la *funzione-peso* $w \equiv \chi_{(-1,1)}$,

$$\int_{-1}^{1} P_k^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2(k+m)!}{(2k+1)(k-m)!} \delta_{k,l}. \tag{54}$$

Dall'Eq. (51), determinata la base vettoriale orto-normale numerabile in $(-1, 1)$,

$$\{\Upsilon_n^m\} \equiv \left\{ \left(\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \right)^{1/2} P_n^m \right\}, \tag{55}$$

si provi che i coefficienti dell'espansione orto-normalizzata $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n P_n^m(x)$ sono dati da

$$c_n = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^m(x) dx. \tag{56}$$

■

Esercizio 4

Il *Polinomio Associato di Laguerre* $x \mapsto L_n^m(x)$, di *grado* n e di *rango* m, con $n \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge m = 0, 1, 2, \ldots, n$, è un integrale particolare dell'*Equazione Differenziale Associata di Laguerre*,

$$xy''+(m+1-x)y'+(n-m)y = 0. \tag{57}$$

Per $m = 0$, si ottiene $L_n^0(x) \equiv L_n(x)$, il *Polinomio Ordinario di Laguerre* di *grado* n.

Ora, si considerino due *Polinomi Associati di Laguerre*, $x \mapsto L_k^m(x) \wedge L_l^m(x)$, di ordini k e l rispettivi qualsiasi ma dello *stesso* rango m. Tenendo presenti le definizioni fondamentali espresse dalle *Formule differenziali generatrici di Rodrigues*, dimostrabili *per induzione*,

$$L_n^m(\xi) := \frac{d^m}{d\xi^m} L_n(\xi), \tag{58.1}$$

$$L_n(\xi) := e^{\xi} \frac{d^n}{d\xi^n}(\xi e^{-\xi}), \tag{58.2}$$

si ricavi l'*integrale di ortogonalità* nell'intervallo $(0, +\infty)$ vs. la *funzione-peso* $w: x \mapsto x^m e^{-x}$,

$$\int_0^{+\infty} L_k^m(x) L_l^m(x) x^m e^{-x} dx = \frac{(k!)^3}{(k-m)!} \delta_{k,l}. \tag{59}$$

Dall'Eq. (59), determinata la base vettoriale numerabile orto-normale in $(0, +\infty)$,

$$\{\Upsilon_{n,m}\} \equiv \left\{ \left(\frac{(n-m)!}{(n!)^3} \right)^{1/2} L_{n,m} \right\}, \tag{60}$$

si provi che i coefficienti dell'espansione orto-normalizzata $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n L_{n,m}(x)$ sono dati da

$$c_n = \frac{(n-m)!}{(n!)^3} \int_0^{+\infty} f(x) L_{n,m}(x) x^m e^{-x} dx. \tag{61}$$

■

Esercizio 5

Il *Polinomio di Hermite* $x \mapsto H_n(x)$, *di grado* n, con $n \in \mathbb{Z}_0^+$, è un integrale particolare dell'*Equazione Differenziale di Hermite*,

$$y''-2xy'+2ny = 0. \tag{62}$$

Tenendo presenti le relazioni fondamentali espresse dalle *Formule differenziali generatrici di Rodrigues*, dimostrabili *per induzione*,

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \tag{63.1}$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \tag{63.2}$$

si ricavi l'*integrale di ortogonalità* nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ vs. la *funzione-peso* $w: x \mapsto e^{-x^2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{m,n}. \tag{64}$$

Dall'Eq. (64), determinata la base vettoriale orto-normale numerabile in $(-\infty, +\infty)$,

$$\{\Upsilon_n\} \equiv \{(2^n n!\pi^{1/2})^{-1/2} H_n\}, \tag{65}$$

si provi che i coefficienti dell'espansione orto-normalizzata $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n H_n(x)$ sono dati da

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx. \tag{66}$$

■

Esercizio 6

Il *Polinomio di Čebyšëv* $x \mapsto T_n(x)$, di 1° *tipo* e di *grado* n, con $n \in \mathbb{Z}_0^+$, è un integrale particolare dell'*Equazione Differenziale di Čebyšëv* di 1° *tipo*,

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \tag{67}$$

Tenendo presenti le relazioni fondamentali espresse mediante le *Formule differenziali generatrici di Rodrigues*, dimostrabili *per induzione*,

$$T_n(x) := cos(n\, cos^{-1} x) \equiv \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k z^* \tag{68.1}$$

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{n}{1-x^2}(-xT_n(x) + T_{n-1}(x)) \tag{68.2}$$

($\lfloor n/2 \rfloor$ indica la *parte intera* (*floor*) di $n/2$), si determini l'*integrale di ortogonalità* nell'intervallo $(-1,1)$ vs. la *funzione-peso* $w:\ x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$,

$$\int_{-1}^{1} T_m(x) T_n(x)(1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{\pi}{2}(1+\delta_{0,n})\delta_{m,n}. \tag{69}$$

Dall'Eq. (69), determinata la base vettoriale orto-normale numerabile in $(-1,1)$,

$$\{\Upsilon_n\} \equiv \left\{ \left(\frac{2}{\pi(1+\delta_{0,n})} \right)^{1/2} T_n \right\}, \tag{70}$$

si deduca che i coefficienti dell'espansione orto-normalizzata $f(x) = \sum_{n=a}^{+\infty} c_n T_n(x)$ sono dati da

$$c_n = \frac{2}{\pi(1+\delta_{0,n})} \int_{-1}^{1} f(x) T_n(x)(1-x^2)^{-1/2} dx. \tag{71}$$

■■■

Introduzione alla Teoria di Sturm-Liouville

1. Esattezza e auto-aggiuntezza di un'equazione differenziale ordinaria lineare

L'equazione differenziale di ordine n, definita per $x \in (a,b)$,

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x) = f(x) \tag{72}$$

si dice essere *esatta* se essa può essere ottenuta derivando direttamente l'equazione specifica

$$G(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x) = g(x) + c, \tag{72.1}$$

di ordine $n-1$. Nel caso in cui l'Eq. (72) è *lineare*,

$$\alpha_0(x)\, y^{(n)} + \alpha_1(x)\, y^{(n-1)} + \alpha_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_{n-1}(x)\, y' + \alpha_n(x)\, y = f(x), \tag{73}$$

dove sia $\alpha_0(x) \neq 0$ (il coefficiente generico $\alpha_k(x)$ è una funzione *nota*, derivabile almeno $n-k$ volte in (a,b)), la condizione *necessaria* e *sufficiente* per la sua *esattezza* è espressa dall'identità

$$\alpha_0^{(n)}(x) - \alpha_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2^{(n-2)}(x) - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha'_{n-1}(x) + (-1)^n \alpha_n(x) \equiv 0\,. \tag{74}$$

In particolare, per un'equazione *lineare del 1º ordine*, la condizione (74) diventa, $\forall\, x \in (a,b)$,

$$\alpha'_0(x) - \alpha_1(x) \equiv 0 \tag{74.1}$$

mentre, per un'equazione *lineare a coefficienti costanti di ordine* n, si ha, semplicemente,

$$\alpha_n(x) \equiv 0\,. \tag{74.2}$$

Se l'Eq. (70) non è esatta in (a,b), si può tentare di determinare un *fattore integrante*, $\mu = \mu(x)$, tale che, se gli addendi contenuti nei due membri dell'Eq. (70) sono moltiplicati per μ,

$$\alpha_0 \mu y^{(n)} + \alpha_1 \mu y^{(n-1)} + \alpha_2 \mu y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_{n-1} \mu y' + \alpha_n \mu y = \mu f\,, \tag{75}$$

l'Eq. (75) risultante è un'equazione differenziale *esatta* in (a,b). In altri termini, dall'Eq. (74), si ha che μ è un integrale particolare dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha_0 u) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\alpha_1 u) + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(\alpha_2 u) - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{d}{dx}(\alpha_{n-1} u) + (-1)^n(\alpha_n u) = 0 \tag{76}$$

vs. la variabile dipendente (funzione) *incognita* $x \mapsto u \equiv u(x)$.
L'Eq. (76) prende il nome di *equazione aggiunta* dell'equazione omogenea associata all'Eq. (73). Sostanzialmente, la sua utilità consiste nel costituire uno strumento di verifica se $u \equiv \mu(x)$ sia o meno un *fattore integrante* dell'Eq. (73). Peraltro, la sua integrazione generale può presentare difficoltà anche superiori che per l'integrazione dell'Eq. (73) stessa!
Restringendo la discussione alle *equazioni differenziali lineari omogenee del 2º ordine* in (a,b),

$$\alpha_0(x)\, y'' + \alpha_1(x)\, y' + \alpha_2(x)\, y = 0\,, \tag{77}$$

di gran lunga le più importanti nei modelli fenomenologici della Fisica e dell'Ingegneria, l'Eq. *aggiunta* (76) di ordine n assume la forma specifica del 2º ordine

$$\frac{d^2}{dx^2}(\alpha_0 u) - \frac{d}{dx}(\alpha_1 u) + \alpha_2 u = 0\,. \tag{78}$$

Qui, conviene ricombinare l'Eq. *aggiunta* (78) nella forma seguente:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\alpha_0 u)\right) - \frac{d}{dx}(\alpha_1 u) + \alpha_2 u = \frac{d}{dx}(\alpha_0' u + \alpha_0 u') - (\alpha_1' u + \alpha_1 u') + \alpha_2 u \\
&= \alpha_0'' u + \alpha_0' u' + (\alpha_0 u')' - \alpha_1' u - \alpha_1 u' + \alpha_2 u \equiv (\alpha_0 u')' + (\alpha_0'' - \alpha_1')u + (\alpha_0' - \alpha_1)u' + \alpha_2 u \\
&= (\alpha_0 u')' + \frac{d}{dx}((\alpha_0' - \alpha_1)u) + \alpha_2 u \,. \qquad (78.1)
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui vale la condizione

$$\alpha_0' = \alpha_1, \qquad (79)$$

allora, l'Eq. *aggiunta* (78) assume la *stessa forma* dell'Eq. omogenea (77),

$$(\alpha_0 u')' + \alpha_2 u = \alpha_0 u'' + \alpha_0' u' + \alpha_2 u \equiv \alpha_0 u'' + \alpha_1 u' + \alpha_2 u = 0 \,. \qquad (80)$$

Per questa ragione, l'Eq. differenziale del 2° ordine (80) è detta **auto-aggiunta** (o **hermitiana**). Da ciò, segue la

Teorema (di rappresentabilità auto-aggiunta o hermitiana)

Condizione *necessaria e sufficiente* affinché l'Eq. (77) abbia, nell'aperto (a, b), rappresentazione *auto-aggiunta*, o *hermitiana*, è che, in tale intervallo, risulti generalmente

$$\alpha_1(x) \equiv \alpha_0'(x). \ \blacktriangle \qquad (81)$$

■

In notazione operatoriale, l'Eq. (77), quando sia *auto-aggiunta*, si riscrive conforme l'Eq. (80),

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\alpha_0(x)\frac{d}{dx}\right)\right)y + \alpha_2(x)y = 0 \,. \qquad (82)$$

Dall'Eq. (82), definito l'*operatore differenziale* (lineare) $\mathfrak{L}^\dagger$, *auto-aggiunto* o *hermitiano* e, quindi, **reale**,

$$\mathfrak{L}^\dagger := \frac{d}{dx}\left(\alpha_0(x)\frac{d}{dx}\right) + \alpha_2(x), \qquad (83)$$

si ottiene la *rappresentazione operatoriale* in (a, b) dell'Eq. (77) (*auto-aggiunta* o *hermitiana*),

$$\mathfrak{L}^\dagger y = 0 \,. \qquad (84)$$

Comunque, se l'Eq. (77) non risulta già in forma *auto-aggiunta* nell'intervallo di interesse (a, b), allora, può essere necessario determinare un fattore $\varsigma = \varsigma(x)$ di *auto-aggiuntezza* (o di *hermiticità*), analogo a un fattore integrante, che rende esatta un'equazione differenziale non-esatta.
Ad esempio, moltiplicando i termini addendi dell'Eq. (77) per la quantità *incognita* $\varsigma(x)/\alpha_0(x)$,

$$\varsigma(x)y'' + \frac{\varsigma(x)\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}y' + \frac{\varsigma(x)\alpha_2(x)}{\alpha_0(x)}y = 0 \qquad (85)$$

e, poi, imponendo la condizione

Non tragga in inganno la coincidenza formale tra la condizione di *auto-aggiuntezza* (o *hermiticità*) (81) per una equazione lineare del 2° ordine e la condizione di *esattezza* (74.1) per un'equazione lineare del 1° ordine.

$$\varsigma'(x) \equiv \frac{\varsigma(x)\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}\,, \tag{86}$$

si costruisce una *trasformata auto-aggiunta* (*hermitiana*) equivalente dell'Eq. (77),

$$\varsigma(x)\,y'' + \varsigma'(x)\,y' + \frac{\varsigma(x)\alpha_2(x)}{\alpha_0(x)}\,y = 0\,, \tag{87}$$

che risulta conforme alla condizione (81).
L'espressione esplicita di $\varsigma(x)$ segue dall'integrazione della forma differenziale (86),

$$\varsigma(x) = c\,e^{\int \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}dx}\,, \tag{88}$$

essendo $c \neq 0$ la costante arbitraria di integrazione.
Pertanto, dalle Eq.i (82) e (88), una *trasformata auto-aggiunta* equivalente di **qualsiasi** equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine in forma canonica (77) prende l'espressione esplicita generale, in un intervallo (a, b) appropriato,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}dx}\frac{d}{dx}\right)y + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_0(x)}\,e^{\int \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}dx}\,y = 0\,, \tag{89}$$

evidenziando la struttura dell'operatore differenziale *auto-aggiunto* corrispondente all'Eq. (83),

$$\mathfrak{L}^{\dagger} := \frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}dx}\frac{d}{dx}\right) + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_0(x)}\,e^{\int \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}dx}\,. \tag{90}$$

Un controllo immediato mostra che l'*Equazione differenziale Associata di Legendre*, Eq. (52), si presenta esplicitamente in forma *auto-aggiunta*. Non è così per le altre equazioni soddisfatte dalle *Funzioni Speciali* citate: *di Bessel*, *Associata di Laguerre*, *di Hermite*, *di Čebyšëv di* 1° *tipo*, Eq.i (29.1), (57), (62) e (67), rispettivamente. Queste ultime, comunque, possono essere ricondotte alla forma *auto-aggiunta* mediante l'Eq. (89) (se ne suggerisce la verifica personale).
Così, e.g., per l'Eq. *di Bessel* (29.1) – rappresentazione da considerarsi sufficientemente generale essendo soddisfatta dalle funzioni J_{ν,λ_n} e Y_{ν,λ_n} (o N_{ν,λ_n}), di argomento 'scalato', $\forall\,\lambda$, vs. la variabile indipendente – la *forma auto-aggiunta* si scrive

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{x}{x^2}dx}\frac{d}{dx}\right)y + \frac{\lambda^2x^2 - \nu^2}{x^2}\,e^{\int \frac{x}{x^2}dx}\,y \\ &\equiv x\,y'' + y' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)x\,y\,. \end{aligned} \tag{91}$$

■

2. Il problema regolare di Sturm-Liouville

La teoria delle equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine in rappresentazione *auto-aggiunta* si presenta come legittimamente generale. Essa trova le sue applicazioni più importanti in problemi connessi con la separazione delle variabili nelle equazioni differenziali a derivate parziali di molti modelli della Fisica (e.g., *di Laplace\Poisson*, *di Helmholtz*, di *Schrödinger*, di *Dirac*, etc.) e nel trattamento della cosiddetta *Funzione di Green*. Le equazioni *separate* che se ne ottengono, di una sola variabile indipendente, sono ricombinabili nella forma *auto-aggiunta* generale tipica

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\left(\alpha_0(x)\frac{d}{dx}\right)+\alpha_2(x)\right)}_{\mathfrak{L}^\dagger} y+\kappa w(x)y \,=\, g(x), \tag{92}$$

Qui, κ è un parametro e w è una *funzione-peso* appropriata vs. l'intervallo (a,b), nel quale l'Eq. (92) è definita.
Il riconoscimento dei termini nell'Eq. (92) segue un criterio preciso. La funzione α_0 e il parametro κ sono prontamente identificabili; κ deve comparire come fattore in un prodotto con la funzione incognita y e la *funzione-peso*. Questo è sufficiente per individuare il fattore $w(x)$. Tutti i termini rimanenti moltiplicati per y vanno a costituire, insieme, la funzione α_2.
Ad esempio, ritornando all'*Equazione di Bessel*, la sua forma *auto-aggiunta* (91) si scompone, secondo lo schema dell'Eq. (92), nel quale sia $g(x)\equiv 0$, come

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)-\frac{\nu^2}{x}\right)}_{\mathfrak{L}^\dagger} y+\lambda^2 xy \,=\, 0\,. \tag{92.1}$$

È evidente, qui, che $\alpha_0(x)\equiv x$, $\kappa\equiv\lambda^2$, $w(x)\equiv x$ (com'era da attendersi!) e $\alpha_2(x)\equiv -\nu^2/x$, con una ridefinizione dell'operatore $\mathfrak{L}^\dagger$ tale che esso, pur contenendo le due derivate, resta, però, separato additivamente dal prodotto $\kappa w(x)y\equiv\lambda^2 xy$.
Analogamente, mediante l'Eq. (86), si determinano

per l'Eq. (52), relativa all'*Associata di Legendre* di 1° *tipo*,

$$\alpha_0(x)\equiv 1-x^2,\qquad \alpha_2(x)\equiv -m^2/(1-x^2),\qquad \kappa\equiv n(n+1),\qquad w(x)\equiv 1;$$

per l'Eq. (57), relativa all'*Associata di Laguerre*,

$$\alpha_0(x)\equiv x^{m+1}e^{-x},\qquad \alpha_2(x)\equiv 0,\qquad \kappa\equiv n-m,\qquad w(x)\equiv x^m e^{-x}\,;$$

per l'Eq. (62), relativa al *Polinomio di Hermite*,

$$\alpha_0(x)\equiv e^{-x^2},\qquad \alpha_2(x)\equiv 0,\qquad \kappa\equiv 2n,\qquad w(x)\equiv e^{-x^2}\,;$$

per l'Eq. (67), relativa al *Polinomio di Čebyšëv di* 1° *tipo*,

$$\alpha_0(x)\equiv (1-x^2)^{-1/2},\qquad \alpha_2(x)\equiv 0,\qquad \kappa\equiv n^2,\qquad w(x)\equiv (1-x^2)^{-1/2}\,.$$

Assegnato un valore al parametro κ, una funzione y_κ che, oltre l'Eq. (89), soddisfa *condizioni di frontiera* (*boundary conditions*) prescritte è detta *auto-funzione* corrispondente all'*auto-valore* κ.
D'altra parte, non è garantito che esista un'*auto-funzione* y_κ sulla sola base di una scelta arbitraria del valore di κ. Talvolta, infatti, una tale scelta restringe i valori accettabili di κ a un insieme discreto (e.g., numerabile), come avviene per tutte le *Funzioni Speciali* considerate in precedenza.

Questa caratteristica si adatta correttamente ai processi quantistici *indipendenti dal tempo* descritti dall'equazione ondulatoria 1-dim di *Schrödinger*

$$\mathcal{H}\psi_E(x) - E\psi_E(x) = 0\,, \tag{92.2}$$

nella quale, l'operatore *hamiltoniano* $\mathcal{H} \equiv (-\hbar^2/(2m))\nabla^2$ corrisponde all'operatore differenziale *auto-aggiunto* $\mathfrak{L}^\dagger$ mentre l'energia totale E del *sistema* fisico (particella non-relativistica di massa m) corrisponde a $-\kappa$. In $\mathfrak{L}^\dagger$, sono identificate $\alpha_0(x) \equiv -\hbar^2/(2m)$, la costante fenomenologica *cinetica*, e $\alpha_2(x) \equiv U(x)$, l'energia potenziale del sistema-particella. L'*auto-funzione* $(y \mapsto)\psi_E$ costituisce, infine, la cosiddetta *funzione d'onda di particella singola*.

Diversamente dal *Problema di Cauchy* (del 2º ordine), nel quale le condizioni di ordine 0 e 1 sono assegnate nello *stesso* punto, si è già osservato, per quanto riguarda il *Problema regolare di Sturm-Liouville*, che condizioni degli stessi ordini sono richieste agli estremi (frontiera) di un intervallo assegnato. Se questo è *compatto*, $[a, b]$, e, *senza perdita di generalità*, $\alpha_0(x) \in \mathbb{R}^+, \forall\, x \in [a, b]$, allora, il complesso delle condizioni fissate in $[a, b]$ per l'Eq. (92) definisce il *Problema di Sturm-Liouville* cosiddetto *regolare* (contrapposto a *singolare*, e.g., quando $\alpha_0 \notin \mathcal{C}([a, b])$).

2.1 Il problema regolare omogeneo di Sturm-Liouville

L'equazione-modello è quella omogenea associata all'Eq. (92),

$$\alpha_0(x)u'' + \alpha_0'(x)u' + (\alpha_2(x) + \kappa w(x))u = 0\,, \tag{93}$$

della quale, si suppone già determinato l'integrale generale, relativo all'*auto-valore* κ,

$$u_\kappa(x) = c_1 u_{1,\kappa}(x) + c_2 u_{2,\kappa}(x) \quad (\in \mathcal{C}^2([a, b]))\,. \tag{94}$$

Al solito, gli integrali particolari $u_{1,\kappa}(x)$ e $u_{2,\kappa}(x)$ sono linearmente indipendenti mentre c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie di integrazione.

Per il *Problema regolare omogeneo di Sturm-Liouville*, le *condizioni di frontiera* sono espresse dal sistema generale, anch'esso omogeneo,

$$\begin{cases} \gamma_{11} u_\kappa(a) + \gamma_{12} u_\kappa'(a) + \gamma_{13} u_\kappa(b) + \gamma_{14} u_\kappa'(b) = 0 \\ \gamma_{21} u_\kappa(a) + \gamma_{22} u_\kappa'(a) + \gamma_{23} u_\kappa(b) + \gamma_{24} u_\kappa'(b) = 0 \end{cases}. \tag{95}$$

In esso, i coefficienti γ_{ij} sono valori *costanti* assegnati.

L'apparenza ridondante del sistema (95) non è tale. In realtà, esso include una varietà di vincoli diversificati secondo le tipologie del *Problema regolare omogeneo di Sturm-Liouville*. Infatti, si possono incontrare vincoli sia *semplici* che *misti*, e.g., di *periodicità*, del tipo

$$\begin{cases} u_\kappa(a) = u_\kappa(b) \\ \alpha_0(a)u_\kappa'(a) = \alpha_0(b)u_\kappa'(b) \end{cases} \tag{95.1}$$

e di *regolarità* (*well-behavior*) interna ad $[a, b]$, del tipo

$$\begin{cases} \{u_\kappa(a), u_\kappa'(a)\} \in \mathbb{R} \;\wedge\; \alpha_0(a) = 0 \quad \text{e\textbackslash o} \\ \{u_\kappa(b), u_\kappa'(b)\} \in \mathbb{R} \;\wedge\; \alpha_0(b) = 0 \end{cases}. \tag{95.2}$$

Ad esempio, nella seconda delle Eq. (95.1), può avvenire che $\gamma_{22} \equiv \alpha_0(a) = \pm\gamma_{24} \equiv \alpha_0(b)$.

Con le Eq.i (93), (94) e la derivata $u'_{\kappa}(x) \equiv c_1 u'_{1,\kappa}(x) + c_2 u'_{2,\kappa}(x)$, le condizioni (95) si riscrivono

$$\begin{cases} h_{11,\kappa} c_1 + h_{12,\kappa} c_2 = 0 \\ h_{21,\kappa} c_1 + h_{22,\kappa} c_2 = 0 \end{cases} \tag{96}$$

vs. le incognite c_1 e c_2. Il calcolo dei coefficienti $h_{rs,\kappa}$ dà

$$h_{11,\kappa} \equiv \gamma_{11} u_{1,\kappa}(a) + \gamma_{12} u'_{1,\kappa}(a) + \gamma_{13} u_{1,\kappa}(b) + \gamma_{14} u'_{1,\kappa}(b)\,, \tag{96.1}$$
$$h_{12,\kappa} \equiv \gamma_{11} u_{2,\kappa}(a) + \gamma_{12} u'_{2,\kappa}(a) + \gamma_{13} u_{2,\kappa}(b) + \gamma_{14} u'_{2,\kappa}(b)\,, \tag{96.2}$$
$$h_{21,\kappa} \equiv \gamma_{21} u_{1,\kappa}(a) + \gamma_{22} u'_{1,\kappa}(a) + \gamma_{23} u_{1,\kappa}(b) + \gamma_{24} u'_{1,\kappa}(b)\,, \tag{96.3}$$
$$h_{22,\kappa} \equiv \gamma_{21} u_{2,\kappa}(a) + \gamma_{22} u'_{2,\kappa}(a) + \gamma_{23} u_{2,\kappa}(b) + \gamma_{24} u'_{2,\kappa}(b)\,. \tag{96.4}$$

Ora, indicato con $det\,\mathbf{H}_{\kappa}$ il determinante della matrice $\mathbf{H}_{\kappa}$ dei coefficienti del sistema omogeneo (96), relativo all'*auto-valore* κ, quando $det\,\mathbf{H}_{\kappa} \neq 0$, il sistema (96) ammette come soluzione solo quella *nulla*, $(c_1, c_2) \equiv (0,0)$, e, quindi, il *Problema regolare omogeneo* (93) $\cap$ (95) *di Sturm-Liouville* ammette la *sola* soluzione particolare *identicamente nulla*,

$$\bar{u}_{\kappa}(x) = 0 \cdot u_{1,\kappa}(x) + 0 \cdot u_{2,\kappa}(x) \equiv 0\,. \tag{96.5}$$

Invece, se $det\,\mathbf{H}_{\kappa} = 0$, il sistema (96) ammette *infinite* soluzioni *non-nulle*, $(c_{1,\kappa}, c_{2,\kappa}) \not\equiv (0,0)$. Gli infiniti integrali particolari *distinti* corrispondenti (caso *degenere*),

$$\bar{u}_{\kappa}(x) = c_{1,\kappa} u_{1,\kappa}(x) + c_{2,\kappa} u_{2,\kappa}(x)\,, \tag{96.6}$$

detti *auto-soluzioni* del *Problema regolare omogeneo* (93) $\cap$ (95) *di Sturm-Liouville*, sono tutti associati allo *stesso auto-valore* κ. Il numero delle *auto-soluzioni* linearmente indipendenti sarà al più 2, a seconda del valore, 0 o 1, del rango di $\mathbf{H}_{\kappa}$.

2.2 Il problema regolare non-omogeneo di Sturm-Liouville

Si consideri, ancora, l'equazione l'Eq. (92) come l'equazione differenziale-modello. Il suo integrale generale, $y_{\kappa}(x) \in \mathcal{C}^2([a,b])$, relativo all'*auto-valore* κ, si supponga già determinato,

$$y_{\kappa}(x) = c_1 y_{1,\kappa}(x) + c_2 y_{2,\kappa}(x) + \upsilon_{\kappa}(x)\,, \tag{97}$$

essendo $\upsilon_{\kappa}(x)$ un integrale particolare qualsiasi dell'Eq. (non-omogenea) (92).

Per il problema regolare non-omogeneo di *Sturm-Liouville*, le *condizioni di frontiera* sono espresse dal sistema generale, anch'esso non-omogeneo,

$$\begin{cases} \gamma_{11} y_{\kappa}(a) + \gamma_{12} y'_{\kappa}(a) + \gamma_{13} y_{\kappa}(b) + \gamma_{14} y'_{\kappa}(b) = \beta_1 \\ \gamma_{21} y_{\kappa}(a) + \gamma_{22} y'_{\kappa}(a) + \gamma_{23} y_{\kappa}(b) + \gamma_{24} y'_{\kappa}(b) = \beta_2 \end{cases}, \tag{98}$$

dove sono *costanti* assegnate, come lo sono anche le γ_{ij}. β_1 e β_2

Analogamente al caso del sistema omogeneo (96), si riscrive il sistema non-omogeneo (98) in forma canonica vs. i parametri *incogniti* c_1 e c_2,

$$\begin{cases} h_{11,\kappa} c_1 + h_{12,\kappa} c_2 = \sigma_1 \\ h_{21,\kappa} c_1 + h_{22,\kappa} c_2 = \sigma_2 \end{cases}, \tag{99}$$

nel quale, i coefficienti $h_{rs,\kappa}$ sono dati ancora dalle Eq.i (96.1), …, (96.4) mentre le espressioni delle costanti σ_1 e σ_2 risultano, rispettivamente,

$$\sigma_1 \equiv \beta_1 - \gamma_{11}\upsilon_\kappa(a) - \gamma_{12}\upsilon'_\kappa(a) - \gamma_{13}\upsilon_\kappa(b) - \gamma_{14}\upsilon'_\kappa(b)\,, \tag{99.1}$$

$$\sigma_2 \equiv \beta_2 - \gamma_{21}\upsilon_\kappa(a) - \gamma_{22}\upsilon'_\kappa(a) - \gamma_{23}\upsilon_\kappa(b) - \gamma_{24}\upsilon'_\kappa(b)\,. \tag{99.2}$$

Poiché il determinante della matrice $\mathbf{H}_\kappa$ dei coefficienti del sistema non-omogeneo (99) è identico a quello del caso omogeneo, allora, se $det\,\mathbf{H}_\kappa \neq 0$, il sistema (99) possiede un'*unica* soluzione, per il *Teorema di Cramer*, $(c_1, c_2) \equiv (c_{1,\kappa}, c_{2,\kappa})$, dalla quale, si scrive immediatamente l'unica *auto-soluzione* corrispondente all'*auto-valore* κ,

$$y_\kappa(x) = c_{1,\kappa}\, y_{1,\kappa}(x) + c_{1,\kappa}\, y_{2,\kappa}(x) + \upsilon_\kappa(x)\,.$$

Invece, se $det\,\mathbf{H}_\kappa = 0$, il *Teorema di Rouché-Capelli* garantisce l'esistenza di una o di infinite (caso *degenere*) soluzioni $(c_{1,\kappa}, c_{2,\kappa})$ del sistema (99) *se e solo se* $\mathbf{H}_\kappa$ e la matrice *aumentata* associata

$$\mathbf{H}_{\kappa,+} := \begin{pmatrix} h_{11,\kappa} & h_{12,\kappa} & \sigma_1 \\ h_{21,\kappa} & h_{22,\kappa} & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso *rango*, r. Questo fissa la condizione per la *compatibilità* del sistema (99), i.e., affinché esso sia o no risolvibile. Se il rango comune è $r = 2$, il sistema (99) ammette *una sola* soluzione; se $r = 1 \veebar 0$, il sistema (97) ammette $\infty \veebar \infty^2$ soluzioni, rispettivamente.
Da queste condizioni algebriche fondamentali di *compatibilità*, si deduce il numero e il valore delle *auto-soluzioni* associate all'*auto-valore* κ per il *Problema regolare non-omogeneo* (97) $\cap$ (98) *di Sturm-Liouville*.
Pertanto, si osserva che il teorema di *esistenza* e *unicità* per le (*auto-*)*soluzioni* (97) eventuali dell'Eq. differenziale (92) risulta condizionato da un *principio di alternativa* fondato sul *Teorema di Rouché-Capelli*.

■

Pafnutij L'vovič Čebyšëv (1821-1894)

Proprietà operatoriali di $\mathfrak{L}^\dagger$ e natura dei suoi auto-valori

Mediante la definizione (83) dell'operatore differenziale lineare *auto-aggiunto* $\mathfrak{L}^\dagger$ del 2º ordine, si riscriva l'Eq. omogenea associata all'Eq. (92) nella forma

$$\mathfrak{L}^\dagger u + \kappa w(x) u = 0\,, \tag{100}$$

generalizzandola come segue: $\{\alpha_0(x), \alpha_2(x), w(x)\} \subset \mathbb{R}$, i.e., le funzioni *note* contenute in essa mantengano i loro valori *reali* in $[a, b]$, ma si ammetta che, in $[a, b]$, sia $\{\kappa, u(x)\} \subset \mathbb{C}$. Da $u(x) \equiv \mathfrak{Re}\, u(x) + i\,\mathfrak{Im}\, u(x)$, seguono, per *linearità*, i risultati ($u' \equiv du/dx$, etc.)

- $u' = (\mathfrak{Re}\, u)' + i(\mathfrak{Im}\, u)'$, (100.1)
- $(u^*)' \equiv (u')^*$, (100.2)
- $\displaystyle\int_a^b u\, dx \equiv \int_a^b (\mathfrak{Re}\, u)\, dx + i\int_a^b (\mathfrak{Im}\, u)\, dx$, etc. . (100.3)

Il fatto che $\mathfrak{L}^\dagger$ sia *auto-aggiunto* genera alcune conseguenze interessanti. Se $\{u_r, u_s\} \subset \mathbb{C}$ è una coppia di *auto-soluzioni distinte* dell'Eq. (100) in $[a, b]$, corrispondenti agli *auto-valori distinti* κ_r e κ_s, rispettivamente, ma che soddisfano le **stesse** condizioni di frontiera *à-la Sturm-Liouville*, si può ricorrere ancora al *Metodo di Green*. Scritta l'identità

$$\mathfrak{L}^\dagger u_r + \kappa_r w(x) u_r \equiv 0\,, \tag{100.4}$$

e quella *coniugata* vs. u_s,

$$\mathfrak{L}^\dagger u_s^* + \kappa_s^* w(x) u_s^* \equiv 0\,, \tag{100.5}$$

si ha, moltiplicando i termini nell'Idn. (100.1) per u_s^* e quelli nell'Idn. (100.2) per u_r, sottraendo tra loro le espressioni così ottenute e integrando queste tra a e b (cf/c Eq.i (32) e (33)),

$$\begin{aligned}(\kappa_s^* - \kappa_r)\int_a^b u_s^* u_r w(x) dx &= \int_a^b (u_s^* \mathfrak{L}^\dagger u_r - u_r \mathfrak{L}^\dagger u_s^*)\, dx \\ &\equiv \int_a^b (u_s^* (\alpha_0 u_{r,\kappa}')' - u_r (\alpha_0 u_{s,\kappa}^{*\,\prime})') dx \\ &\alpha_0 (u_s^* u_r' - u_r u_s^{*\prime})\Big|_a^b \equiv 0\,,\end{aligned} \tag{101}$$

poiché entrambe le funzioni u_r e u_s soddisfano le *stesse* condizioni di frontiera *à-la Sturm-Liouville* in $[a, b]$, dove, si ricordi, è $\alpha_0(x) \neq 0$.

Allora, dall'Eq. (101), si arriva alla condizione *necessaria e sufficiente* di *auto-aggiuntezza* di $\mathfrak{L}^\dagger$, espressa mediante il *prodotto interno* in $\mathbb{C}$ in *notazione di Dirac* (cf/c l'Eq. (2.1)),

$$(\kappa_s^* - \kappa_r)\int_a^b u_s^* u_r w(x) dx \approx \langle u_s | \mathfrak{L}^\dagger u_r \rangle - \langle \mathfrak{L}^\dagger u_s^* | u_r \rangle = 0\,, \tag{102}$$

che fornisce immediatamente la proprietà fondamentale di *auto-aggiuntezza*:

$$\langle u_s | \mathfrak{L}^\dagger u_r \rangle = \langle \mathfrak{L}^\dagger u_s^* | u_r \rangle\,. \tag{102.1}$$

Dunque, ritornando al membro sinistro dell'Eq. (102), si conclude che due *auto-soluzioni distinte* qualsiasi dell'Eq. (100), soddisfacendo le *stesse* condizioni di frontiera *à-la Sturm-Liouville* ed essendo relative ad *auto-valori distinti*, sono *ortogonali* in $[a, b]$ vs. la *funzione-peso* w. In altri termini, con $r \neq s$, si ha (cf/c l'Eq. (2.1))

$$\langle u_s | u_r \rangle = 0. \tag{103}$$

Invece, nell'ipotesi che le due *auto-soluzioni* distinte precedenti corrispondano allo *stesso auto-valore* κ (degenerazione), allora, risulta che

$$\begin{aligned} u_s^* \mathfrak{L}^\dagger u_r - u_r \mathfrak{L}^\dagger u_s^* &= u_s^* (\alpha_0 u_r')' - u_r (\alpha_0 u_s^{*\prime})' = 0 \\ &= \frac{d}{dx} (\alpha_0 (u_s^* u_r' - u_r u_s^{*\prime})), \end{aligned}$$

i.e., $\alpha_0 (u_s^* u_r' - u_r u_s^{*\prime}) = c$, una *costante*, in $[a, b]$. Per qualsiasi condizione di frontiera (95), salvo quella di *periodicità* (95.1), questa espressione si annulla agli estremi $x = a$ e $x = b$.

D'altra parte, poiché è $\alpha_0(x) \not\equiv 0$ in $[a, b]$, risulta, qui, necessariamente, $u_s^* u_r' - u_r (u_s^*)' \equiv 0$, i.e., $u_r' / u_r = (u_s^*)' / u_s^*$. Integrando e, infine, esponenziando, si ottiene

$$u_r = c u_s^*. \tag{104}$$

Questa uguaglianza implica che, per uno *stesso* valore di κ, sia $\{\kappa, u_r(x), u_s(x)\} \subset \mathbb{R}$, così che $u_r(x)$ e $u_s(x)$ *non possono* essere linearmente indipendenti in $[a, b]$, eccetto che in presenza di condizioni di frontiera *periodiche*. Come esempio di questa circostanza anomala, si consideri il modello dell'*oscillatore armonico* quantistico,

$$y'' + \kappa y = 0, \tag{105}$$

per il quale, si ha $\kappa \equiv (n\pi/L)^2$. Esso possiede le *auto-soluzioni indipendenti* $x \mapsto cos(n\pi x/L)$ e $x \mapsto sin(n\pi x/L)$ nell'intervallo $[a, b] \equiv [0, L]$.

Se $r \equiv s$, l'integrale nell'Eq. (100) non può annullarsi (è $w(x) > 0$ generalmente), salvo che per il caso banale $u_r \equiv 0$ identicamente in $[a, b]$. Allora, è il coefficiente $(\kappa_r^* - \kappa_r)$ ad annullarsi, i.e.,

$$\kappa_r^* \equiv \kappa_r. \tag{106}$$

I risultati espressi dalle Eq. (104) e (106) sono sintetizzati dal seguente, fondamentale

Teorema

Se il *Problema regolare omogeneo* (94) $\cap$ (96) *di Sturm-Liouville* è *auto-aggiunto*, allora,

- tutti gli *auto-valori* sono **reali**, per l'Eq. (105). Essi sono di numero *infinito* e possono essere disposti in sequenza crescente *divergente*, infinito-continua o infinito-numerabile. In questo secondo caso, si determina la successione divergente $\{\kappa_n\}$;
- le *auto-funzioni* corrispondenti ad *auto-valori distinti* sono **ortogonali** tra loro in $[a, b]$ vs. la *funzione-peso* w appropriata in $[a, b]$ nella base assegnata. ▲

■

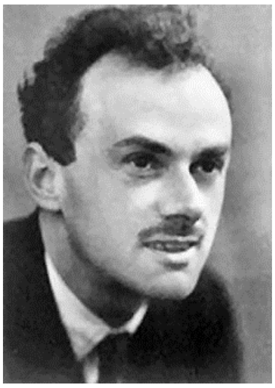
Le conseguenze del Teorema precedente sono cruciali: quando le *auto-funzioni* costituiscono un insieme *numerabile*, come effetto di condizioni di frontiera (tipicamente, quelle *periodiche*) che *discretizzano* la sequenza delle *auto-funzioni* ammissibili, da tale *famiglia ortogonale* può essere estratta, in modo evidente, una **base vettoriale orto-normale** di espansione in serie secondo le condizioni fissate dai *Teoremi di espansione 1* e *2* (v. PP. 3-4).

La questione dell'ortogonalità non può ancora ritenersi risolta definitivamente. Infatti, anche con $r \neq s$, esiste l'eventualità che risulti $\kappa_r \equiv \kappa_s$ e, pertanto, che l'integrale nell'Eq. (102) *non sia* nullo necessariamente. Questo fenomeno, indicato tecnicamente come **degenerazione** degli *auto-valori*, appare anche attraverso la possibilità che *auto-funzioni* linearmente indipendenti *non siano* ortogonali tra loro e che si riveli necessario ricorrere a un procedimento di *orto-normalizzazione* del sotto-spazio da esse generato, e.g., al *Metodo di Gram-Schmidt* (v. PP. 8-10).

■■■

Charles Hermite (1822-1901)

Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886)



Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [3], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

[1] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2ND ED., PRENTICE-HALL, INC. (1976);

[2] CHURCHILL, R. V., *Operational Mathematics*, 3RD ED., MCGRAW-HILL BOOK CO. (1972);

[3] CHURCHILL, R. V. - BROWN, J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3RD ED., MCGRAW-HILL BOOK CO. (1978);

[4] SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of Laplace Transforms*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1965);

[5] SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of ADVANCED MATHEMATICS for Scientists and Engineers*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1971);

[6] SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1974);

[7] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7TH ED., ACADEMIC PRESS (2013);

[8] BENDER, C. M. - ORSZAG, S. A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1978);

[9] DETTMAN, J. W., *Mathematical Methods in Physics and Engineering*, 2ND ED., DOVER PUBNS. (2003);

[10] LEBEDEV, N. N., *Special Functions and their Applications*, DOVER PUBLNS., INC. (1972);

[11] TEMME, N. M., *Special Functions - An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);

[12] HOCHSTADT, H., *The Functions of Mathematical Physics*, WILEY INTERSCIENCE (1971);

[13] COHEN-TANNOUDJI, C. - DIU, B. - LALOË, F., *Quantum Mechanics*, VOL. **1**, CH. 2, JOHN WILEY & SONS (1977);

[14] MESSIAH, A., *Quantum Mechanics*, VOL. **1**, CH. VII, JOHN WILEY & SONS (1977);

[15] DUCHATEAU, P. - ZACHMANN, D. W., *Theory and Problems of PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1986);

[16] WIDDER, D. V., *Advanced Calculus*, 2ND ED., PRENTICE-HALL, INC. (1961; REPR., 1964);

[17] L'AUTORE (CM) [math-notebooks PDF],

- [16.1] EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI - METODI DI INTEGRAZIONE;
- [16.2] SERIE DI FOURIER IN $\mathbb{R}$ - PROPRIETÀ E APPLICAZIONI.

■■■