

**Logaritmi in  $\mathbb{R}$  e in  $\mathbb{C} \setminus$**

**Funzioni Integrali  
Logaritmiche Speciali**

claudio magno

<https://www.cm-physmath.net/>

revisione  
12 marzo 2024



*John Napier (1550-1617)*

## INDICE

<b>NOTA INTRODUTTIVA</b>	P. III
<b>RICHIAMI DI PROPRIETÀ DEL LOGARITMO IN <math>\mathbb{R}^+</math></b>	P. 1
• PROBLEMA 1	P. 3
<b>UN ALGORITMO IN <math>\mathbb{R}</math> PER IL CALCOLO APPROSSIMATO DI <math>\ln x</math></b>	P. 4
<b>RICHIAMI DI PROPRIETÀ DEL LOGARITMO NATURALE IN <math>\mathbb{C}</math></b>	P. 7
1. L'ALGORITMO COMPLESSO GENERALE	P. 7
2. IL LOGARITMO NATURALE GENERALE DI UNA POTENZA COMPLESSA	P. 7
3. L'ALGORITMO INVERSO: LA POTENZA COMPLESSA GENERALE DI UN NUMERO COMPLESSO	P. 8
• PROBLEMA 2	P. 8
• PROBLEMA 3	P. 10
4. ANGOLI COMPLESSI	P. 10
• PROBLEMA 4	P. 11
• PROBLEMA 5	P. 11
• PROBLEMA 6	P. 11
• PROBLEMA 7	P. 11
• PROBLEMA 8	P. 11
• PROBLEMA 9	P. 11
<b>FUNZIONI INTEGRALI LOGARITMICHE SPECIALI</b>	P. 12
A. LA FUNZIONE LOG-INTEGRALE IN $\mathbb{R}$	P. 12
B. LA FUNZIONE POLI-LOGARITMICA (DI ORDINE $n \in \mathbb{Z}^+$ ) IN $\mathbb{R}$	P. 15
• PROBLEMA 10	P. 18
• PROBLEMA 11	P. 19
• PROBLEMA 12	P. 19
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	P. 21

## NOTA INTRODUTTIVA

Nelle pagine che seguono, è presentata una panoramica succinta (forse troppo ...) di alcuni aspetti avanzati di quella che ho sempre percepito come la più sottile e intrigante delle operazioni matematiche *elementari* (cosiddette), il *calcolo logaritmico*, ricca di ramificazioni analitiche in  $\mathbb{R}^+$  e in  $\mathbb{C}$  di interesse e di utilità cruciali in innumerevoli applicazioni Fisiche, Ingegneristiche, Statistiche e, in generale, delle Scienze esatte.

L'identità di *trasformazione della base* (v. Eq. (6.1) e segg.) consente di considerare il **logaritmo naturale** (indicato con il simbolo classico  $\ln$ , nella base costante trascendente  $e \equiv 2.71828\dots$ , fondamentale in Analisi Matematica), come l'*elemento neutro* rappresentativo della famiglia continua in  $\mathbb{R}^+$  e in  $\mathbb{C}$  di operatori logaritmici possibili, distinti secondo la base utilizzata.

Per questo math-notebook, è opportuna una conoscenza *applicativa* delle operazioni logaritmiche elementari e una formazione a livello di un corso di Analisi Matematica I, almeno. Detto con altre parole, nella 'toolbox' personale di chi legge, non dovrebbe mancare una pratica consolidata di equazioni, disequazioni <sup>(†)</sup> e integrazioni logaritmiche in una variabile reale <sup>(‡)</sup>, oltre a un minimo di esperienza nelle manipolazioni algebriche in  $\mathbb{C}$ .

C M

---

<sup>(†)</sup> Una presentazione molto completa e 'solida' per una revisione efficace sui fondamenti e sulle applicazioni del *logaritmo in  $\mathbb{R}$*  si trova nel documento PDF scaricabile liberamente da [13], v **Bibliografia**.

<sup>(‡)</sup> Integrazioni logaritmiche utili sono svolte, e.g., nel math-notebook: **Esercizi di Calcolo Integrale in  $\mathbb{R}$** , **II**, p. 75-80.

## Richiami di proprietà del Logaritmo in $\mathbb{R}^+$

In questo paragrafo, si assuma che  $\{b, q\} \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}^+$ . Ne segue che,

1. esponenziando in base  $b$  i termini nei membri di  $u := \log_b q$ , si ottiene che  $b^u = b^{\log_b q}$ , i.e., dalla *contrazione* (o *saturatione*) base-esponente nel membro *destro* ( $\therefore$  inversione), che

$$b^{\log_b q} \equiv q; \blacktriangle \tag{1}$$

2. inoltre, risulta,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\log_b (b^\lambda) = \lambda. \blacktriangle \tag{2}$$

**Dimostrazione**

Esponenziando in base  $b$  i membri dell'Idn. (2), si determina un'identità ovvia.

*Casi particolari* importanti sono:

$$\log_b b \equiv \log_b (b^1) = 1; \tag{2.2}$$

$$\log_b (1/b) \equiv \log_b (b^{-1}) = -1; \tag{2.3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x = \pm \infty \quad \text{se } b \in (0, 1) \vee b \in (1, +\infty); \tag{2.4}$$

3. sia  $q_k \in \mathbb{R}^+, k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Allora,

$$\log_b \left( \prod_{k=1}^n q_k \right) = \sum_{k=1}^n \log_b q_k. \blacktriangle \tag{3}$$

**Dimostrazione**

Posto  $\lambda_k := \log_b q_k$ , si ha, per inversione, che  $q_k = b^{\lambda_k} \wedge \prod_{k=1}^n q_k \equiv \prod_{k=1}^n b^{\lambda_k} = b^{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$ , da cui, prendendo il logaritmo in base  $b$ , si ottiene  $\log_b (b^{\sum_{k=1}^n \lambda_k}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \equiv \sum_{k=1}^n \log_b q_k$ , q. e. d. ;

4. risulta,  $\forall \eta \in \mathbb{R}$ ,

$$\log_b q^\eta = \eta \log_b q. \blacktriangle \tag{4}$$

**Dimostrazione**

Posto  $\lambda := \log_b q$ , segue che  $q = b^\lambda$ , da cui,  $\log_b (q^\eta) = \log_b (b^{\lambda\eta}) = \lambda\eta = \eta \log_b q$ , q. e. d. .

*Casi particolari:*

$$\log_b (1/q) \equiv \log_b (q^{-1}) = -\log_b q; \tag{4.1}$$

$$\log_b ((f(x))^{2n}) = 2n \log_b |f(x)|, \tag{4.2}$$

$\forall \{n, x\} \in \mathbb{Z} \times \mathcal{D}_f$ , purché sia  $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \wedge f(x) \neq 0$ ;

5. sia anche  $p \in \mathbb{R}^+$ .

Allora,

$$\log_b (p/q) = \log_b p - \log_b q. \blacktriangle \tag{5}$$

**Dimostrazione**

Infatti,  $\log_b(p/q) \equiv \log_b(pq^{-1}) = \log_b p + \log_b(q^{-1}) = \log_b p - \log_b q$ , q. e. d. .

Caso particolare (cf/c l’Idn. (4.1)):

$$\log_b(1/q) \equiv \log_b 1 - \log_b q = -\log_b q; \tag{5.1}$$

6. sia, anche,  $\{\beta, \Omega\} \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}^+$ .

Allora, vale l’Identità di *Contrazione* (o *Saturazione*) *Base-Argomento*,

$$(\log_b \beta)(\log_\beta \Omega) = \log_b \Omega. \blacktriangle \tag{6}$$

**Dimostrazione**

Se si definiscono  $\lambda := \log_b \beta \wedge \mu := \log_\beta \Omega$ , segue, dalla combinazione della seconda identità con la prima, che  $\beta = b^\lambda \wedge \Omega = \beta^\mu \equiv b^{\lambda\mu}$ , ordinatamente. Quindi, invertendo la seconda identità e sostituendo le definizioni iniziali di  $\lambda$  e di  $\mu$ , si scrive che  $\lambda\mu = \log_b \Omega \equiv (\log_b \beta)(\log_\beta \Omega)$ , i.e., l’Idn. (6). □

L’Idn. (6) fornisce una formula *fondamentale* per la *trasformazione*  $\beta \mapsto b$  della base logaritmica:

$$\log_\beta \Omega = \frac{\log_b \Omega}{\log_b \beta}. \tag{6.1}$$

*Casi particolari:*

- se  $\Omega \equiv \beta$ , si ritrova l’Idn. (2.2),

$$\log_\beta \beta = \frac{\log_b \beta}{\log_b \beta} \equiv 1; \tag{6.1.1}$$

- se  $\Omega \equiv b$ , si ha

$$\log_\beta b = \frac{\log_b b}{\log_b \beta} \equiv \frac{1}{\log_b \beta}. \tag{6.1.2}$$

□

Come applicazioni, introdotte le notazioni convenzionali  $\log \equiv \log_{10}$  (logaritmo in base 10, o di BRIGGS (H., 1561-1630)) e  $\ln \equiv \log_e$  (logaritmo *naturale*, o di NAPIER), risultano

$$\bullet \ln \Omega = \frac{\log \Omega}{\log e}, \text{ con } \log e \equiv \frac{1}{\ln 10} \approx 0.434294481903; \tag{6.1.3}$$

$$\bullet \log \Omega = \frac{\ln \Omega}{\ln 10}, \text{ con } \ln 10 \equiv \frac{1}{\log e} \approx 2.302585092994. \tag{6.1.4}$$

Inoltre, posta l’Idn. (6.1.2), nella forma equivalente

$$(\log_b \beta)(\log_\beta b) = 1 \equiv \log_\beta \beta, \tag{6.1.5}$$

dove,  $\log_b \beta$  venga considerato come *esponente* dell’argomento  $b$  nel fattore logaritmico (base)

$\log_{\beta} b$ , si riscrive l’Idn. (6.1.3) come  $\log_{\beta}(b^{\log_{\beta} \beta}) \equiv \log_{\beta} \beta$  e, quindi, esponenziando in base  $\beta$ , si ritrova  $b^{\log_{\beta} \beta} \equiv \beta$ , i.e., l’Idn. (1).

- Se  $b \equiv 1/\beta$ , allora, dall’Idn. (6.1), segue che

$$\log_{\beta} \Omega = \frac{\log_{1/\beta} \Omega}{\log_{1/\beta} \beta} \equiv \frac{\log_{1/\beta} \Omega}{-\log_{1/\beta} 1/\beta} = -\log_{1/\beta} \Omega, \tag{6.1.4}$$

mediante la quale, prendendo i reciproci degli argomenti del 2° e del 3° membro, si ottiene la catena di identità (cf/c Fig. 1, P. 5)

$$\log_{\beta} \Omega \equiv -\log_{\beta} \frac{1}{\Omega} \equiv \log_{1/\beta} \frac{1}{\Omega} \equiv -\log_{1/\beta} \Omega. \tag{6.2}$$

Infine, l’invarianza evidente nella scelta della base logaritmica, l’Idn. (6.1) implica *infinito-continue* possibili uguaglianze *alternative*

$$\log_{\beta} \Omega = \frac{\log_b \Omega}{\log_b \beta} \equiv \frac{\log_c \Omega}{\log_c \beta} \equiv \frac{\log_w \Omega}{\log_w \beta} \equiv \dots \tag{6.3}$$

■■■

**Problema 1**

Verificare le identità seguenti:

1.1  $\forall \{ x, y, z, \beta \} \in \mathbb{R}^+ \times \{(0, 1/x) \cup (1/x, +\infty)\} \times \mathbb{R}^+ \times \{(0, 1) \cup (1, +\infty)\},$   
 $\log_{xy} z = \lambda \iff \log_{\beta} z = \lambda(\log_{\beta} x + \log_{\beta} y); \tag{6.4}$

1.2  $\forall \{ x, y, z, \beta \} \in \mathbb{R}^+ \times \{(0, x) \cup (x, +\infty)\} \times \mathbb{R}^+ \times \{(0, 1) \cup (1, +\infty)\},$   
 $\log_{x/y} z = \mu \iff \log_{\beta} z = \mu(\log_{\beta} x - \log_{\beta} y); \tag{6.5}$

1.3  $\forall \{ p, q, \mu, \nu \} \in \{(0, 1) \cup (1, +\infty)\} \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R},$   
 $\log_{p^{\mu}}(q^{\nu}) = (\nu/\mu)\log_p q \equiv \log_p(q^{\nu/\mu}). \tag{6.5}$

■

## Un algoritmo in $\mathbb{R}$ per il calcolo approssimato di $\ln x$

Nella valutazione numerica dei logaritmi naturali in  $\mathbb{R}$ , l'uso della  $\mathcal{M}$ -espansione ( $\therefore$  Maclaurin),

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n \equiv - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} t^n, \quad (7)$$

valida solo per  $t \in (-1, 1]$ , è, comunque, da escludersi, a causa della convergenza eccessivamente *lenta* verso la somma. Da tale serie, però, se ne può dedurre un'altra più adatta a scopi numerici. Con la riflessione  $t \mapsto -t$ , si ha, ora con  $t \in [-1, 1)$ ,

$$\ln(1-t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}. \quad (8)$$

Sottraendo membro a membro l'Eq. (8) dall'Eq. (7), risulta, per  $t \in (-1, 1)$ ,

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad (9)$$

una serie *uniformemente convergente* in ogni intervallo compatto  $[t_1, t_2] \subset (-1, 1)$ .

Ora, definito  $x := \frac{1+t}{1-t}$ , segue che  $t = \frac{x-1}{x+1}$ . Inoltre,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ , si ha che  $t \in (-1, 1)$ . Quindi,

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ , l'Eq. (9) corrisponde all'espansione trasformata

$$\ln x = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}. \quad (10)$$

Per valutare la qualità algoritmica della rappresentazione (10) di  $\ln x$ , si può osservare che il suo resto  $n$ -simo,  $R_n(x)$ , si scrive

$$\begin{aligned} R_n(x) &= 2 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1} \\ &= 2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \frac{1}{2n+5} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 + \dots \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Pertanto, ricordando il valore della somma della *serie geometrica*, risulta che

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq 2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{2n+1} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 + \dots \right) \\ &\equiv \frac{2}{2n+1} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{2n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k} = \frac{2}{2n+1} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{2n+1} \left( 1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2(2n+1)} \frac{|x-1|^{2n+1}}{x|x+1|^{2n-1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

L'espressione (12) fornisce una *maggiorazione* dell'errore assoluto commesso (per difetto) se, nel calcolo della somma dell'espansione (10), ci si arresta al termine  $n$ -simo. Ad esempio, per  $x = 3$ , l'Eq. (10) genera la serie numerica



$$\ln 3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)} . \tag{13}$$

Il valore approssimato di  $s_5$ , la 5<sup>a</sup> somma ridotta della serie (13), è

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5} + \frac{1}{2^6 \cdot 7} + \frac{1}{2^8 \cdot 9} \approx 1.098\ 4995\dots$$

Dalla disuguaglianza (12), l'errore assoluto  $|R_5(x)|$  che si commette prendendo  $s_5$  come valore approssimato di  $\log 3$  (per difetto) risulta *minore di*

$$1/(2^8 \cdot 3 \cdot 11) < 1.184 \cdot 10^{-4} .$$

Infatti, il calcolo esatto dà il valore

$$\ln 3 = 1.098\ 6122\dots$$

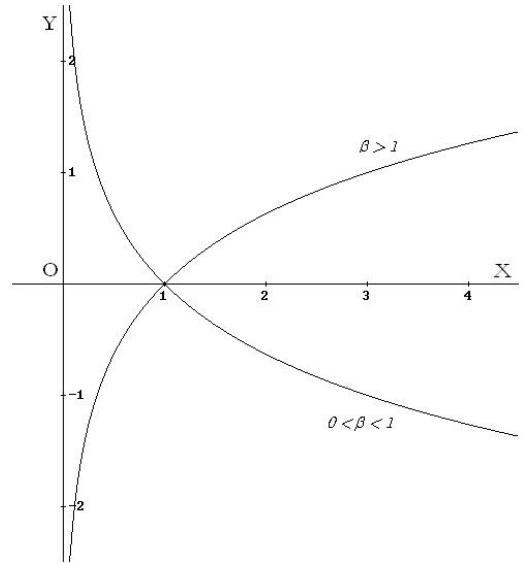


Fig. 1 – La funzione  $x \mapsto \log_{\beta} x$

La disuguaglianza (12) indica che, al crescere di  $x$ , il contenimento dell'errore assoluto entro un ordine di grandezza fissato richiede un numero crescente di termini dell'espansione (10). In tal modo, l'utilità dell'espansione (10) è limitata a valori 'non troppo grandi' di  $x$ , e.g., a  $|x| < 10$ .

□

Si può procedere alla determinazione di un algoritmo seriale *più efficiente*, i.e., più rapidamente convergente, incominciando a scrivere, con  $0 < |p| \leq q$ , che  $p + q \equiv q(1 + p/q)$ .

Pertanto, ricorrendo anche all'espansione (10), si ha

$$\begin{aligned} \ln(p + q) &= \ln q + \ln(1 + p/q) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{q-1}{q+1} \right)^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (p/q)^n \end{aligned} \tag{14}$$

$$\equiv 2 \frac{q-1}{q+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{2n+1} \left( \frac{q-1}{q+1} \right)^{2n+1} - \frac{(-1)^n}{n (q/p)^n} \right) . \tag{14.1}$$

Ora, conviene sostituire l' $\mathcal{M}$ -espansione consueta (e lentissima!) di  $\ln(1 + p/q)$  con un'altra che abbia la stessa somma ma che vi converga più rapidamente. La definizione  $\frac{1+t}{1-t} := 1 + \frac{p}{q}$  (ovvero,

la sua equivalente  $t := \frac{1}{2q/p+1}$  ( $< 1$ )), risponde allo scopo, trasformando l'espansione (9) in

$$\ln(1 + p/q) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2q/p+1)^{2n+1}} . \tag{15}$$

Dall'uguaglianza-base (15), si determina l'algoritmo *generale* cercato in forma *semi-razionale*,

$$\ln(p + q) = \ln q + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2q/p+1)^{2n+1}} . \tag{16}$$

Il confronto tra le Eq.i (14) e (16) mette in evidenza la rapidità *maggiore* di convergenza della serie  $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2q/p+1)^{2n+1}}$  vs. la serie *equivalente*  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(q/p)^n}$ .

Una rappresentazione completamente in serie dell'Eq. (16) è determinabile ancora con l'Eq. (10),

$$\ln(p+q) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \left( \frac{q-1}{q+1} \right)^{2n+1} + \frac{1}{(2q/p+1)^{2n+1}} \right). \quad (16.1)$$

Il vantaggio nell'uso degli algoritmi (16) o (16.1) sta nella flessibilità maggiore consentita dalla presenza di *due* gradi di libertà, i parametri *indipendenti*  $p$  e  $q$ . Come esempio,

- quando  $p+q \equiv x$ , allora,

$$\begin{aligned} \ln x &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \left( \frac{x-p-1}{x-p+1} \right)^{2n+1} + \frac{1}{(2q/p+1)^{2n+1}} \right), \\ &\equiv \ln(x-p) + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2x/p-1)^{2n+1}}, \end{aligned} \quad (17.1)$$

- mentre, per  $p \equiv 1 \wedge q \equiv x$ , risulta la *formula ricorsiva* (di passo  $p = 1$ )

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} + \frac{1}{(2x+1)^{2n+1}} \right) \\ &\equiv \ln x + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Il calcolo di  $\ln 3$  con l'Eq. (17.2), nella quale, la serie sia arrestata a  $s_5$ , migliora la precisione già di *due* ordini di grandezza rispetto al calcolo precedente, risultando  $|R_5(x)| < 1.14 \cdot 10^{-6}$ .

Infine, quando  $x \in (-\infty, -1]$ , eseguendo la riflessione  $x \Leftrightarrow -x$ , si verifica prontamente che vale l'espansione semi-razionale in serie

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{2n+1} - \frac{1}{(2x-1)^{2n+1}} \right) \\ &\equiv \ln(-x) - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2x-1)^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

### Osservazioni

- È banalmente evidente come l'Analisi Matematica e la programmazione numerica che da essa è stata sviluppata abbiano confinato le venerande *Tavole dei Logaritmi* (e.g., il 'Brasca-Levi') tra i reperti preistorici, un attrezzo deprecabile di validità pedagogica discutibile. Peraltro, dai tempi di Taylor, Euler e Fourier, le serie di funzioni hanno avuto *ampiamente* modo di diventare un tema classico ...
- Le somme delle  $\mathcal{M}$ -espansioni (7) e (8) sono note, storicamente, come *Funzioni di MERCATOR* (latinizzazione di KAUFMANN (NIKLAUS, 1620(?) - 1687), matematico e astronomo tedesco) e, rispettivamente, l'*opposta* della *Associata*, o *anti-Associata*, della *Funzione di Mercator* (v. P. 14).



## Richiami di proprietà del Logaritmo Naturale in $\mathbb{C}$

### 1. L'algoritmo complesso generale

Sia  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Distinguendo la funzione *monòdroma*  $\ln$  in  $\mathbb{C}$  ( $\supset \mathbb{R}^+$ ), dal suo prolungamento *polidromo* (in  $\mathbb{C}$ ), qui indicato con  $\mathbf{Ln}$ , vale la definizione *formale* (e.g., v. [3], [7], [8], [9]):

$$\mathbf{Ln} z := \ln|z| + i(\theta + 2\pi k) \equiv \Re(\mathbf{Ln} z) + i\Im(\mathbf{Ln} z), \quad (19)$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$  (indice ordinale della ‘pila’ infinito-numerabile dei *fogli di Riemann*, Fig. 2), essendo

- $|z| := ((\Re z)^2 + (\Im z)^2)^{1/2}$ ,
- $\theta \equiv \arg(z) \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right) \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$

( $k \equiv 0$  specifica l’intervallo *principale* di  $\theta$ , l’*anomalia logaritmica*).

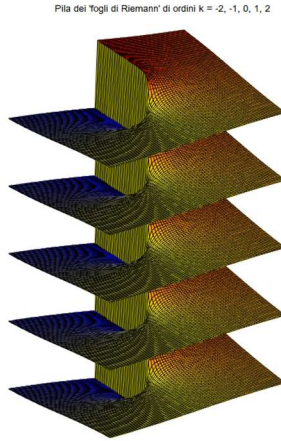


Fig. 2 – La funzione polidroma  $z \mapsto \mathbf{Ln} z$  (‘pila’ dei fogli di Riemann)

### 2. Logaritmo naturale generale di una Potenza complessa

Siano  $\{u, v\} \in \{\mathbb{C} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{C}$ . La rappresentazione algebrica del *logaritmo naturale generale* di  $u^v$  corrisponde, formalmente in  $\mathbb{C}$ , all’*infinità numerabile* vs.  $k \in \mathbb{Z}$ , dei valori complessi

$$\begin{aligned} \mathbf{Ln} u^v &\equiv v \mathbf{Ln} u = (\Re v + i\Im v)(\ln|u| + i(\theta + 2\pi k)) \quad (\theta \equiv \arg(u)) \\ &= (\ln|u|)\Re v - (\theta + 2n\pi)\Im v + i((\theta + 2n\pi)\Re v + (\ln|u|)\Im v), \end{aligned} \quad (20)$$

In particolare, l’Eq. (20) fornisce le formule, valide  $\forall \{u, \lambda\} \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ , con  $\theta \equiv \arg(u)$ ,

$$\mathbf{Ln}(u^{i\lambda}) = \lambda((2k\pi - \theta) + i\ln|u|), \quad (20.1)$$

$$\mathbf{Ln}(e^{i\lambda}) = \lambda(2k\pi + i). \quad (20.2)$$

Per le Eq.i (20.1) e (20.2), si è tenuto conto della simmetria di  $k$  ( $\in \mathbb{Z}$ ) vs. 0; inoltre, *ogni* numero  $z \in \mathbb{C}$  del ‘foglio’  $k \equiv 0$  nell’Eq. (20) costituisce un *Logaritmo Principale* in  $\mathbb{C}$ .

L’estensione a  $\mathbb{C}$  dell’Eq. (6.1) (*cambio di base logaritmica*) è *definita formalmente* come

$$\mathbf{Log}_w u := \frac{\mathbf{Ln} u}{\mathbf{Ln} w} \equiv \frac{\ln|u| + i(\varphi_1 + 2r\pi)}{\ln|w| + i(\varphi_2 + 2s\pi)}, \quad (21)$$

( $\varphi_1 \equiv \arg u$ ,  $\varphi_2 \equiv \arg w$ ;  $\{r, s\} \subset \mathbb{Z}$  due infinità numerabili e *indipendenti* di indici interi).

3. L'algoritmo inverso:

**La Potenza complessa generale di un numero complesso**

Con le stesse definizioni precedenti, si calcola la *potenza generale* per  $\{z, \xi\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
 z^\xi &\equiv e^{Ln z^\xi} \equiv e^{\xi Ln z} = e^{(\Re \xi + i \Im \xi)(\ln|z| + i(\theta + 2k\pi))} \\
 &= e^{(\Re \xi) \ln|z| - (\Im \xi)(\theta + 2k\pi)} e^{i((\Re \xi)(\theta + 2k\pi) + (\Im \xi) \ln|z|)} \quad (\ddagger) \\
 &\equiv |z|^{\Re \xi} e^{- (\Im \xi)(\theta + 2k\pi)} (\cos((\Im \xi) \ln|z| + (\Re \xi)(\theta + 2k\pi)) + \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \downarrow + i \sin((\Im \xi) \ln|z| + (\Re \xi)(\theta + 2k\pi))). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Quindi, la variazione di  $k \in \mathbb{Z}$  dà origine a un'infinità numerabile di immagini numeriche, una in ogni  $k$ -piano complesso ('foglio'  $k$ -simo della 'pila',  $\{\Re z^\xi + i \Im z^\xi\}_k$ ). L'immagine  $k$ -sima di  $z^\xi$  è posta alla distanza (modulo)  $\rho$  dall'origine del 'foglio'  $k$ -simo, i.e., dall'asse della 'pila'. Per la distanza  $\rho$ , risulta

$$\rho := |z^\xi| \equiv |z|^{\Re \xi} e^{- (\Im \xi)(\theta + 2k\pi)}. \quad (23)$$

Il fattore di *polidromia*  $e^{- (\Im \xi)(\theta + 2k\pi)}$  nelle Eq. (22) e (23) distribuisce le immagini geometriche intorno al *punto stereografico all'infinito* ( $k \rightarrow -\infty$ ) e all'*asse delle origini* ( $k \rightarrow +\infty$ ).

L'insieme numerabile di valori complessi nell'Eq. (22) corrispondente a  $k = 0$  si dice *Potenza Principale* in  $\mathbb{C}$  di grado  $\xi$  e base  $z$  sul 'foglio' di Riemann di indice ordinale  $k = 0$ :

$$\begin{aligned}
 z^\xi|_{k=0} &= |z|^{\Re \xi} e^{- \theta (\Im \xi)} (\cos((\Im \xi) \ln|z| + (\Re \xi) \theta) + \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \downarrow + i \sin((\Im \xi) \ln|z| + (\Re \xi) \theta)). \quad (24)
 \end{aligned}$$

La formula (22) costituisce la sintesi più generale delle operazioni di elevamento a potenza e di estrazione di radice complesse. Infatti, si verifica facilmente che le *Formule di De Moivre* e le loro estensioni al caso di una potenza razionale qualsiasi non ne sono che applicazioni particolari. □

( $\ddagger$ ) E.g., con la formula del prodotto:  $(a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ .

**Problema 2**

Come risultato d'uso frequente, si consideri  $z_1 \equiv z \equiv a + i b \wedge z_2 \equiv 1/2$ , i.e., il calcolo in  $\mathbb{C}$  di *radici quadrate*. Sia  $\varphi := \arg z \in [0, 2\pi)$ , da cui,  $\varphi/2 \in [0, \pi)$ , e  $|z| := \rho \equiv (a^2 + b^2)^{1/2}$ .

Allora, essendo  $\cos \varphi \equiv a/\rho$ , risultano

$$\cos(\varphi/2) = \pm((1 + \cos \varphi)/2)^{1/2} \equiv \pm(2^{1/2}/2)(1 + a/\rho)^{1/2}, \quad (25)$$

$$\sin(\varphi/2) = \pm((1 - \cos \varphi)/2)^{1/2} \equiv \pm(2^{1/2}/2)(1 - a/\rho)^{1/2}. \quad (26)$$

Segue, con  $k = 0, 1$ , che

$$z^{1/2} \equiv (a + i b)^{1/2} = \rho^{1/2} (\cos(\varphi/2 + k\pi) + i \sin(\varphi/2 + k\pi)).$$

Dopo aver individuato il quadrante del piano complesso in cui è situata l'immagine di  $z$  e, quindi, il quadrante *terminale* di  $\varphi/2$  ( $\therefore$  il 1° oppure il 2°), si trova, con le Eq. (25) e (26),

- per  $k = 0$ ,

$$z_0^{1/2} = \rho^{1/2} (\cos(\varphi/2) + i \sin(\varphi/2)) = (2^{1/2}/2)(\pm(\rho + a)^{1/2} + i(\rho + a)^{1/2});$$

• per  $k = 1$ ,

$$z_1^{1/2} = \rho^{1/2} (\cos(\varphi/2 + \pi) + i \sin(\varphi/2 + \pi)) = \rho^{1/2} (-\cos(\varphi/2) - i \sin(\varphi/2)) \equiv -z_0^{1/2}.$$

Pertanto, la formula generale cercata è costituita dalla coppia di numeri complessi opposti

$$\{z^{1/2}\} \equiv \{(2^{1/2}/2)(\pm(\rho + a)^{1/2} + i(\rho - a)^{1/2}), -(2^{1/2}/2)(\pm(\rho + a)^{1/2} + i(\rho - a)^{1/2})\}, \quad (27)$$

nella quale, l'ambiguità del segno delle parti reali  $\pm(\rho + a)^{1/2}$  dipende dal quadrante cartesiano (di Argand-Gauss) terminale di  $\varphi/2$ : +, se è il 1° quadrante, o -, se è il 2° quadrante.

□

Qui di seguito, è mostrato il grafico (ridotto) nello spazio rettangolare reale  $\{X, Y, K\} \equiv \{\Re w, \Im w, \Im(Ln w)\}$ , tratto dal documento: *Scripts e applicazioni semplici di guida nella grafica scientifica con GNUplot*, P. 101, # 37.

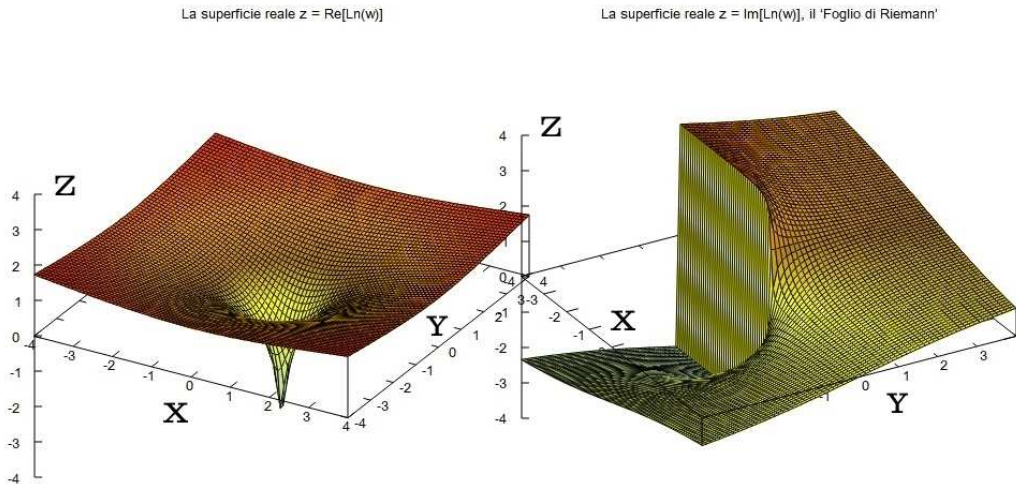


Fig. 3 –

Dalla funzione *logaritmica complessa generale*  $w \mapsto g := Ln w$ , con  $w = x + iy$ , si costruisce lo spazio rettangolare reale  $\{\Re w, \Im w, \Im g\}$ . Circa il grafico (reale) di  $\Im g$ , il celebre ‘foglio di Riemann’ (v. [3], VOL. 3, P. 251; [4], P. 70-76; [8], CAP. 2; [9], P. 314-317), se ne noti il ‘salto’,  $\Delta = 2\pi$ , lungo il *taglio di diramazione (branch-cut)*.

□

Il calcolo logaritmico in  $\mathbb{C}$  richiede, in molti casi, la separazione esplicita delle *parti reali* dalle *parti immaginarie*. Inevitabilmente, questo rimanda a identità goniometriche in  $\mathbb{C}$  sia *circolari* che *iperboliche* e alla loro riduzione a  $\mathbb{R}$ .

Nell'esercizio che segue, è proposto un riepilogo di relazioni elementari nella forma algebrica separata  $a + ib$ . L'esercizio è semplice ma un po' lungo e ripetitivo, se lo si esegue volendo mostrare *tutti* i dettagli.

**Problema 3**

Sia  $z := x + iy$ . Verificare le identità seguenti, ciascuna nel dominio appropriato:

$$2.a \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad ((x; y) \in \mathbb{R}^2), \quad (28.1)$$

$$2.b \quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \quad ((x; y) \in \mathbb{R}^2); \quad (28.2)$$

$$2.1 \quad \tan z = \frac{\sin(2x)}{\cosh(2y) + \cos(2x)} + i \frac{\sinh(2y)}{\cosh(2y) + \cos(2x)}, \quad ((x; y) \neq ((2k+1)\pi/2; 0)), \quad (29)$$

$$2.2 \quad \cot z = \frac{\sin(2x)}{\cosh(2y) - \cos(2x)} - i \frac{\sinh(2y)}{\cosh(2y) - \cos(2x)}, \quad ((x; y) \neq (k\pi; 0)), \quad (30)$$

$$2.3 \quad \sec z = \frac{2 \cosh y \cos x}{\cosh(2y) + \cos(2x)} + i \frac{2 \sinh y \sin x}{\cosh(2y) + \cos(2x)}, \quad ((x; y) \neq ((2k+1)\pi/2; 0)), \quad (31)$$

$$2.4 \quad \csc z = \frac{2 \cosh y \sin x}{\cosh(2y) - \cos(2x)} - i \frac{2 \sinh y \cos x}{\cosh(2y) - \cos(2x)}, \quad ((x; y) \neq (k\pi; 0)); \quad (32)$$

$$2.c \quad \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \quad ((x; y) \in \mathbb{R}^2), \quad (33.1)$$

$$2.d \quad \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \quad ((x; y) \in \mathbb{R}^2), \quad (33.2)$$

$$2.5 \quad \tanh z = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) + \cos(2y)} + i \frac{\sin(2y)}{\cosh(2x) + \cos(2y)}, \quad ((x; y) \neq (0; (2k+1)\pi/2)), \quad (34)$$

$$2.6 \quad \coth z = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) - \cos(2y)} - i \frac{\sin(2y)}{\cosh(2x) - \cos(2y)}, \quad ((x; y) \neq (0; k\pi)), \quad (35)$$

$$2.7 \quad \operatorname{sech} z = \frac{2 \cosh x \cos y}{\cosh(2x) + \cos(2y)} + i \frac{2 \sinh x \sin y}{\cosh(2x) + \cos(2y)}, \quad ((x; y) \neq (0; (2k+1)\pi/2)), \quad (36)$$

$$2.8 \quad \operatorname{csch} z = \frac{2 \sinh x \cos y}{\cosh(2x) - \cos(2y)} - i \frac{2 \cosh x \sin y}{\cosh(2x) - \cos(2y)}, \quad ((x; y) \neq (0; k\pi)). \quad (37)$$

Si considerino attentamente le simmetrie di scrittura tra le rappresentazioni algebriche delle funzioni *circolari* e quelle delle funzioni *iperboliche*. ■

#### 4. Angoli complessi

In certe questioni di Fisica Quantistica avanzata, di Teoria di Campo Quantistico e di Relatività, si incontra il concetto di ‘angolo complesso’, che pone la necessità di una sua rappresentazione operativa. Come esempio, si può ricordare l’*angolo di Cabibbo* nel Modello Standard delle interazioni fisiche fondamentali ad ‘alte energie’ (meccanismo CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) nel ‘quark mixing’ di violazione CP, mediato dal cambiamento del numero quantico di ‘sapore’ (*flavour*) dei quarks coinvolti in processi QCD interattivi). □

Siano  $\Phi \in \mathbb{C}$  l’angolo espresso in *rad generalizzati* e  $\zeta \equiv \alpha + i\beta$  ( $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}^2$ ) un parametro *noto* assegnato in forma algebrica. Dall’equazione

$$\tan \Phi = \zeta, \quad (38)$$

segue che 
$$\zeta = -i \tanh(i\Phi) \equiv \frac{e^{-i\Phi} - e^{i\Phi}}{e^{-i\Phi} + e^{i\Phi}} = \frac{\cancel{e^{-i\Phi}} (1 - e^{2i\Phi})}{\cancel{e^{-i\Phi}} (1 + e^{2i\Phi})},$$

i.e., risolvendo vs.  $e^{2i\Phi}$ ,

$$e^{2i\Phi} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}. \tag{38.1}$$

Allora, dall'Eq. (19), risulta per inversione (lo si verifichi),

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{i}{2} \left( \ln \left| \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right| + i \left( \tan^{-1} \left( \frac{\Im((1-\zeta)/(1+\zeta))}{\Re((1-\zeta)/(1+\zeta))} \right) + 2k\pi \right) \right) \\ &\dots = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 1} \right) + k\pi + i \frac{1}{4} \ln \left( \frac{(\alpha+1)^2 + \beta^2}{(\alpha-1)^2 + \beta^2} \right), \end{aligned} \tag{39}$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ , e introducendo la forma algebrica del parametro  $\zeta \in \mathbb{C}$ .

Dunque, l'espressione di  $\Phi$  è riconducibile al calcolo di un logaritmo in  $\mathbb{C}$ , i.e., di una famiglia  $\{\Phi_k\}$  numerabile di angoli *complessi*, con parti reali e parti immaginarie separate esplicitamente.

È ovvio che, a ciascun elemento  $\Phi_k$ , sono applicabili le Idn. (28.1), ..., (37) precedenti.

**Problema 4**

Verificare che la potenza polidroma  $i^i$  corrisponde agli infinito-numerabili valori *reali*  $e^{-(\pi/2)(1+4k)}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Problema 5**

Verificare che, tra gli infiniti numeri complessi  $z = x + iy$  soddisfacenti il vincolo  $|z - i| = |z + 2|$ , quello di modulo *minore* è  $-(3 \cdot 5^{1/2}/10)e^{i \tan^{-1}(1/2)}$ .

**Problema 6**

Determinare le soluzioni dell'equazione  $\sin \frac{2\pi z}{1+z^2}$ , verificando che tutti – eccetto uno – hanno modulo  $\rho = 1$ .

**Problema 7**

Siano  $z_1 = a + ib$  e  $w = p + iq$ . Si verifichino le formule simmetriche comode

$$\begin{cases} zw^* + z^*w = 2(ap + bq) \\ zw + z^*w^* = 2(ap - bq) \end{cases}, \quad \begin{cases} zw^* - z^*w = -2i(aq - bp) \\ zw - z^*w^* = 2i(aq + bp) \end{cases}.$$

**Problema 8**

Verificare che  $\Re((\cot \varphi + i)^n) = (\cot n\varphi) \Im((\cot \varphi + i)^n)$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Problema 9**

Si consideri la coppia di *variabili*  $\{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$  legate dalla relazione mutua  $(z_1 + 3)(z_2 - 2) - 3(z_2 - iz_1 - 7) = 0$ . Sapendo che  $|z_1| = 3$ , si determini la curva-immagine di  $z_2$  al variare di quella di  $z_1$ .

## Funzioni Integrali Logaritmiche Speciali

### A. La Funzione Log-integrale in $\mathbb{R}$

La funzione integrale formale

$$x \mapsto \lambda(x) := \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \tag{40}$$

ha come dominio *massimale* l'insieme  $\mathfrak{D} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Infatti, per  $t \rightarrow 0^+$ ,  $(\ln t)^{-1} = o(1)$  e, quindi, è integrabile in  $\mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ , con  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x (\ln t)^{-1} dt = 0^-$ .

Per  $t \rightarrow 1^\pm$ ,  $(\ln t)^{-1}$  è un infinito di ordine 1 vs. l'infinito principale  $|t-1|^{-1}$  e, di conseguenza,  $\int_0^x (\ln t)^{-1} dt$  diverge in  $\mathcal{U}_\delta(1)$ , presentando, come funzione, un asintoto verticale per  $x = 1$ .

Ora, nel limite  $t \rightarrow 1^\pm$ , si ha, dall'Eq. (40),  $(\ln t)^{-1} \sim (t+1)/(2(t-1)) \sim (t-1)^{-1}$ , da cui, secondo Cauchy, è corretto il risultato

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} (\ln t)^{-1} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln|t-1| \Big|_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} = 0;$$

detto altrimenti, per  $x > 1$ , il *Valore Principale di Cauchy*,  $\mathfrak{C}$ , dell'integrale (40) è idoneo a definire, come *prolungamento analitico* in  $(1, +\infty)$ , la cosiddetta *Funzione Log-integrale*,

$$\lambda \mapsto li: x \mapsto li(x) := \mathfrak{C} \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \tag{41}$$

una funzione *trascendente*. L'integrale (41) trova applicazione in problemi vari di Elettrodinamica e di teoria della *distribuzione asintotica* dei *Numeri Primi*.

Per  $x \rightarrow +\infty$ , si determina il valore *infinito*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} li(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}. \tag{41.1}$$

Tenuto conto della variazione di segno di  $\ln t$  nell'intervallo di integrazione  $(0, +\infty)$ , il segno dell'infinito (41.1) può essere determinato nel modo seguente:

eseguita la separazione additiva

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} = \int_0^1 \frac{dt}{\ln t} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} \equiv \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2, \tag{41.1.1}$$

si ponga  $t := 1/u$  in  $\mathfrak{J}_2$ , da cui, si calcolano  $\ln t = -\ln u$  e  $\int_1^{+\infty} (dt) \mapsto \int_1^0 (-du/u^2)$ . Quindi,

$$\mathfrak{J}_2 \equiv \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} = - \int_0^1 \frac{du}{u^2 \ln u} \equiv - \int_0^1 \frac{dt}{t^2 \ln t}, \tag{41.1.2}$$

dopo il ripristino *ininfluente*  $u \mapsto t$  della variabile di integrazione, ridotta all'intervallo  $(0, 1)$ .

Pertanto, con le Idn. (41.1.1) e (41.1.2), si scrive



$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} \equiv \int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2 \ln t} dt, \tag{41.2}$$

nella quale, è  $(t^2-1)/(t^2 \ln t) > 0, \forall t \in (0, 1)$ , si conclude che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} li(x) = +\infty$ .

Inoltre, si ha  $li(x) < 0$  per  $x \in (0, 1)$  ed essendo  $t \mapsto (\ln t)^{-1}$  e  $x \mapsto li(x)$  funzioni monotone entrambe, segue che  $li(x)$  possiede *una sola* radice,  $\mu$ , per  $x \in (1, +\infty)$ . Con un calcolo numerico, si ottiene il valore  $\mu \approx 1.451369234883381$ , noto come la *Costante di Soldner-Ramanujan*.

Nella maggior parte delle questioni numeriche, la necessità di un’espansione in serie di  $li(x)$  è risolta riportando la rappresentazione integrale (40) alla *Funzione Integro-esponenziale* <sup>(†)</sup>

$$Ei: \xi \mapsto Ei(-\xi) := - \int_{\xi}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \equiv \int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^w}{w} dw \quad (w := -u)$$

e alla sua espansione in serie vs. il parametro  $\xi \equiv -\ln x$ . Infatti, dalla sostituzione  $t := e^u$ , risulta (e.g., v. il math-notebook: **Esercizi di Calcolo Integrale in  $\mathbb{R}$ , IL-1**)

$$li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \mapsto - \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \equiv Ei(-\ln x) = \gamma + \ln(|\ln x|) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!}. \tag{42}$$

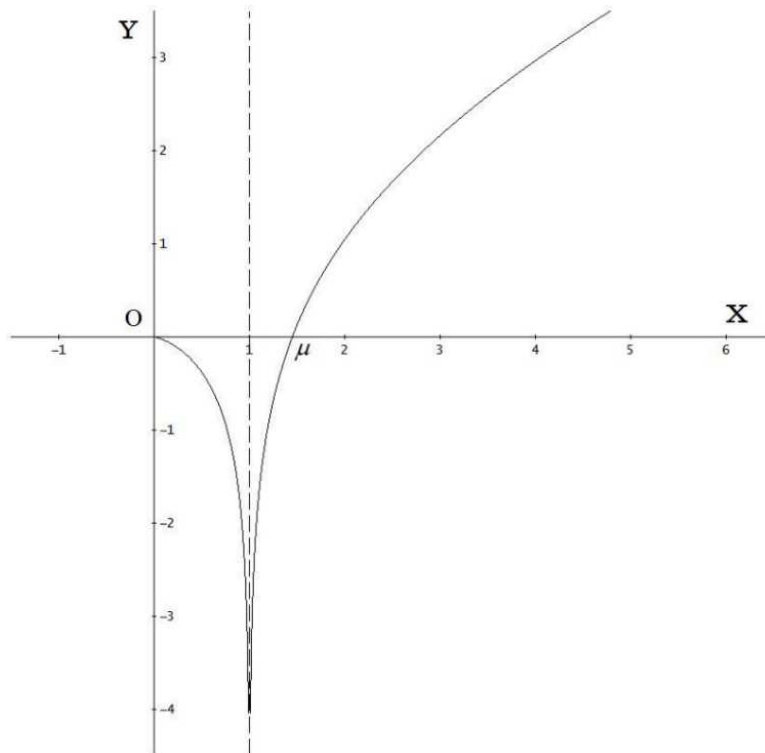


Fig. 4 – Grafico della funzione  $f : x \mapsto li(x)$

<sup>(†)</sup> Si consultino, e.g., [1], [2], [3].

Inoltre, quando  $|\ln x| \gg 1$ , è possibile ricavare una espansione *asintotica* di  $li(x)$ . Integrando *per parti*  $n$  volte la rappresentazione (40), si ottiene

$$\int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln x)^k} + R_n(x), \quad (43)$$

dove risulta, chiaramente,  $|R_n(x)| = O(|\ln x|^{-n-1})$ .

La derivazione (sotto il segno di integrale) di  $li(x)$ ,

$$\frac{d}{dx} li(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\ln t)^{-1} dt}_{\equiv 0} + \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{dx} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln t} \frac{d0}{dx}}_{\equiv 0} = \frac{1}{\ln x}.$$

indica che la *Funzione Integro-logaritmica* decresce per  $x \in (0, 1)$  ma cresce per  $x \in (1, +\infty)$ . In particolare, si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d}{dx} li(x) = 0^-$  mentre è  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{d}{dx} li(x) = \mp \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} li(x) = 0^+$ .

Infine, dalla seconda derivazione di  $li(x)$ ,

$$\frac{d^2}{dx^2} li(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0.$$

si rilevano l'assenza di punti di flesso e la *concavità* di *graf*( $li$ ) in tutto  $\mathcal{D}$ . ■

**B. La Funzione Poli-logaritmica (di ordine  $n \in \mathbb{Z}^+$ ) in  $\mathbb{R}$**

Nidificando la rappresentazione integrale della *Associata di Mercator* – nota comunemente come *Funzione Uni-logaritmica*,  $Li_1$ , o *Integro-logaritmica del 1° ordine* (v. Osservazione, P. 6) –

$$x \mapsto Li_1(x) := \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \equiv -\ln(1-x) \equiv \int_0^x \frac{dt}{1-t}, \quad (44)$$

si definisce la *Funzione Di-logaritmica*, o *Funzione Integrale di SPENCE* (WILLIAM, 1777-1815),

$$x \mapsto Li_2(x) := \int_0^x \frac{Li_1(t)}{t} dt \equiv \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt, \quad (45)$$

Si tratta di una funzione *trascendente*, non rappresentabile in termini di funzioni elementari. Il dominio *massimale*  $\mathcal{D}$  di  $Li_2$  è quello della sua rappresentazione integrale in  $\mathbb{R}$  (cf/c. **IL-6**, d.).

Per comodità, indicata l'espressione integranda come  $\Lambda(t) := -(\ln(1-t))/t \equiv Li_1(t)/t$ , si trova,

- per  $t \rightarrow x \rightarrow -\infty$ , che  $\Lambda(t) \sim 0^+$ . Così,  $\Lambda(t)$  è integrabile in  $\mathcal{U}(-\infty)$ , essendovi limitata;
- per  $t \rightarrow x \rightarrow 0^\pm$ , che  $\Lambda(t) \rightarrow 1^\mp$  (e.g., con la *Regola di de l'Hôpital*). Quindi,  $\Lambda(t)$ , rimanendo limitata e  $\in \mathcal{C}(\mathcal{U}_\delta(0))$ , è integrabile in  $\mathcal{U}_\delta(0)$ ;
- per  $t \rightarrow x \rightarrow 1^-$ , che  $\Lambda(t) \sim -\ln(1-t)$  e, pertanto, che diventando un infinito di ordine  $< 1$  vs. l'infinito principale  $(1-t)^{-1}$ ,  $\Lambda(t)$  è integrabile in senso generalizzato in  $\mathcal{U}_{\delta^-}(1)$ ;
- per  $t \rightarrow x \in [1, +\infty)$ , che  $\Lambda(t)$  non è definita.

Allora, il dominio di  $Li_2(x)$  è  $\mathcal{D} = (-\infty, 1]$ , per il quale, l'aggiunta dei valori  $(t \rightarrow) x = 0, 1$  è ininfluente vs. l'operazione di integrazione poiché essi costituiscono un insieme di *misura nulla*. La *formula di Leibniz* di derivazione sotto il segno di integrale fornisce la funzione *derivata 1<sup>a</sup>*,

$$\begin{aligned} x \mapsto \frac{d}{dx} Li_2(x) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \lambda(t) dt + \lambda(x) \frac{dx}{dx} - \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \frac{d0}{dx} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} \equiv \frac{Li_1(x)}{x}, \end{aligned} \quad (46)$$

che è  $> 0 \ \forall x \in \mathcal{D}$ . Quindi,  $Li_2$  non possiede estremanti ed è crescente in tutto  $\mathcal{D}$ . Essendo, poi,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} dLi_2(x)/dx = +\infty$ , allora, *graf*( $Li_2$ ) ha tangente verticale nel *punto di arresto*  $(1; Li_2(1))$ .

Dal calcolo della funzione *derivata 2<sup>a</sup>* di  $Li_2$ , è facile verificare che,  $\forall x \in \mathcal{D}$ , si ha

$$x \mapsto \frac{d^2}{dx^2} Li_2(x) = \frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x(x-1)} > 0, \quad (47)$$

i.e., che  $Li_2$  è una funzione *convessa*.

Anche circa la *Funzione Di-logaritmica*, le questioni più strettamente computazionali necessitano, almeno, di una sua rappresentazione in serie.

Ricordando che la legittimità dello scambio tra le operazioni di somma infinita e di integrazione in ogni intervallo *compatto*  $[0, x]$  richiede che, in tale intervallo, l'espansione di  $\lambda(t)$  in serie sia *uniformemente convergente*, risulta, allora, per  $x \in (-1, 1]$ ,

$$Li_2(x) = - \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-t)^k dt = \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad (48)$$

mentre, nel caso in cui  $x \in (-\infty, -1]$ , è necessaria la scomposizione preliminare seguente:

$$\begin{aligned} \ln(1-t) &\equiv \ln((-t)(1-1/t)) = \ln(-t) + \ln(1-1/t) \\ &= \ln(-t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-1/t)^k \equiv \ln(-t) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k t^k}. \end{aligned} \quad (49)$$

Quindi, per  $x \in (-\infty, -1]$ , tenendo presente il risultato espresso dall'Eq. (48), si scrive

$$\begin{aligned} Li_2(x) &= - \int_0^{-1} \frac{\ln(1-t)}{t} dt - \int_{-1}^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt \equiv Li_2(-1) - \left( \int_{-1}^x \frac{\ln(-t)}{t} dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \int_{-1}^x \frac{dt}{t^{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{2} (\ln(-x))^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 x^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} (\ln(-x))^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 x^k}. \end{aligned} \quad (50)$$

La rappresentazione (50) costituisce il *prolungamento analitico* in  $\mathbb{R}$  – l'unico – della *restrizione* (48) di  $Li_2(x)$  a  $(-1, 1] \subset X$ .

Oltre all'ovvio  $Li_2(0) \equiv 0$ , si trova il valore particolare (cf/c la *Serie di Fourier* corrispondente)

$$Li_2(1) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \equiv \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (51.1)$$

Inoltre, ricordando che  $\eta(x) := (1-2^{1-x})\zeta(x)$ , entrambe le Eq.i (48) e (50) danno

$$Li_2(-1) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \equiv -\eta(2) = -\frac{\pi^2}{12}. \quad (51.2)$$

Al solito, i simboli convenzionali  $\zeta$  e  $\eta$  indicano, rispettivamente, le *Funzioni Zeta di Riemann* ed *Eta di Dirichlet*.

Dalla definizione (45), si ricavano alcune identità funzionali per  $Li_2$ :

$$Li_2(x) + Li_2(1-x) = \pi^2/6 - (\ln x)\ln(1-x); \quad (52.1)$$

$$Li_2(x^2) = 2(Li_2(x) + Li_2(-x)); \quad (52.2)$$

$$Li_2(-1/x) + Li_2(-x) = -\pi^2/6 - (\ln x)^2/2; \quad (52.3)$$

$$Li_2(x) + Li_2(y) + Li_2(z) = (1/2)(Li_2(-xy/z) + Li_2(-yz/x) + Li_2(-zx/y)), \quad (52.4)$$

con la condizione, nell'Idn. (52.4), che  $1/x + 1/y + 1/z = 1$ .

Per una verifica, e.g., dell'Idn. (52.1), si consideri la rappresentazione integrale di  $Li_2(1-x)$ ,

$$Li_2(1-x) \equiv - \int_0^{1-x} \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

La posizione  $t := 1-u$  genera la trasformazione  $\int_0^{1-x} (dt) \mapsto \int_1^x (-du)$  dell'operatore integrale.

Così, con un'integrazione *per-parti*, si ha

$$\begin{aligned} Li_2(1-x) &= - \int_1^x \frac{\ln u}{1-u} (-du) \equiv - \int_1^x (\ln u) \frac{d(1-u)}{1-u} \\ &= -\ln(1-u) \ln u \Big|_1^x + \int_1^x \ln(1-u) \frac{du}{u} = \int_1^x \frac{\ln(1-u)}{u} du - (\ln(1-x))(\ln x) \end{aligned}$$

e, dopo un'ultima ridefinizione ininfluente,  $u \rightleftharpoons t$ , della variabile di integrazione, si scrive

$$\begin{aligned} Li_2(x) + Li_2(1-x) &= - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt + \int_1^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt - \ln(1-x) \ln x \\ &\equiv - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt - \int_x^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt - \ln(1-x) \ln x \\ &= - \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt - \ln(1-x) \ln x \equiv Li_2(1) - \ln(1-x) \ln x \\ &= \pi^2/6 - \ln(1-x) \ln x, \quad \text{i.e., l'Idn. (40.1).} \end{aligned}$$

Ancora, l'Idn. (52.1) fornisce un valore interessante in corrispondenza di  $x = 1/2$ ,

$$Li_2(1/2) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\ln 2)^2 \equiv \eta(2) - \frac{1}{2} (\ln 2)^2, \tag{53}$$

dal quale, aiutandosi con l'Eq. (51.2), si deduce elementarmente la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 + (-2)^k}{2^k k^2} = -\frac{(\ln 2)^2}{2} \approx -0.2402265069. \tag{53.1}$$

La definizione della *Funzione Tri-logaritmica*,  $Li_3$ , segue, per *nidificazione integrale*, da quella di  $Li_2$ ,

$$x \mapsto Li_3(x) := \int_0^x \frac{Li_2(t)}{t} dt. \tag{54}$$

Le proprietà di  $Li_3$  in  $(-\infty, -1]$  sono generate da quelle di  $Li_2$ , combinando l'Eq. (50) con l'Eq. (54).

In modo analogo, si procede sequenzialmente con le *Funzioni Poli-logaritmiche* di ordini successivi,

$$x \mapsto Li_n(x) := \int_0^x \frac{Li_{n-1}(t)}{t} dt. \tag{55}$$

Dall'Eq. (48), per induzione, si arriva all'espansione valida  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  ma *ristretta* all'intervallo compatto  $[-1, 1] \subset X$  (isomorfo a  $\mathbb{R}$ ),

$$Li_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^n}. \tag{55.1}$$

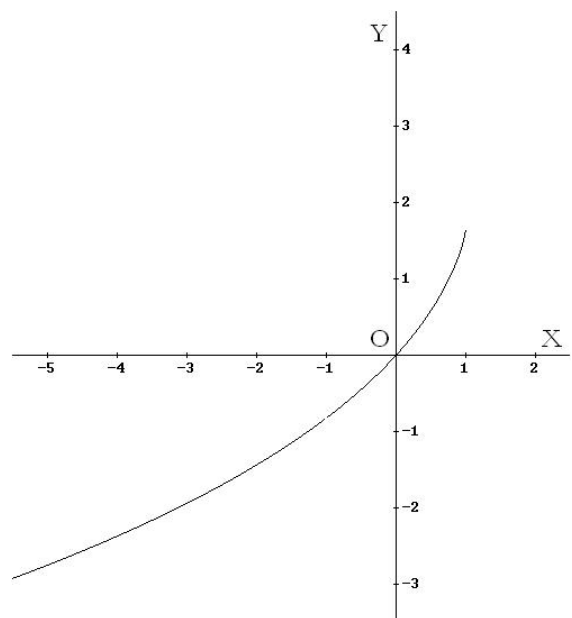


Fig. 5 – La funzione  $x \mapsto Li_2(x)$

La serie (55.1), *uniformemente* convergente in  $[-1, 1]$ , generalizza le Eq.i (51.1) e (51.2), risultando

$$Li_n(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \equiv \zeta(n), \quad (55.2)$$

$$Li_n(-1) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^n} \equiv -\eta(n). \quad (55.3)$$

Dunque, per  $x = \pm 1$ , i valori della *Funzione Poli-logaritmica* di ordine  $n$  corrispondono alle somme, rispettivamente, della *Serie  $\zeta$  di Riemann* e dell'*opposto della Serie  $\eta$  di Dirichlet* di ordine  $n$ . Inoltre, il punto  $(0; 0) \in \text{graf}(Li_n)$ . Infatti, si ha,  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$Li_n(0) = 0. \quad (55.4)$$

Dagli sviluppi precedenti, è pure evidente che una rappresentazione integrale *multipla* per  $Li_n(x)$  è data, in forma iterata *nidificata*, dall'applicazione generatrice

$$\begin{aligned} Li_n(x) &= \int_0^x \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} \frac{dt_{n-2}}{t_{n-2}} \dots \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{Li_1(t)}{t} dt \\ &\equiv - \int_0^x \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} \frac{dt_{n-2}}{t_{n-2}} \dots \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\ln(1-t)}{t} dt, \end{aligned} \quad (56)$$

nelle  $n$  variabili di integrazione  $t, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ . Chiaramente, se  $t_1 \in (-\infty, -1]$  (quindi, anche  $\{t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, x\} \subset (-\infty, -1]$ ), l'integrazione *deve* essere iniziata dall'Eq. (50).

Per  $x = \pm 1$ , l'Eq. (56) fornisce, rispettivamente, una rappresentazione integrale  $n$ -pla di  $\zeta(n)$  e una di  $-\eta(n)$ . ■

**Problema 10**

Si verifichino esplicitamente le identità seguenti relative alla *Funzione Tri-logaritmica* (le identità specificamente *funzionali* sono valide solo per  $x \in [-1, 1]$ ):

$$Li_3(x) + Li_3(1-x) + Li_3(1-1/x) = \zeta(3) + \frac{1}{6}(\ln x)^3 + \frac{\pi^2}{6} \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \ln(1-x); \quad (57.1)$$

$$Li_3(x^2) = 4(Li_3(x) + Li_3(-x)); \quad (57.2)$$

$$Li_3(-x) - Li_3(-1/x) = \frac{1}{6}(\ln x)((\ln x)^2 + \pi^2); \quad (57.3)$$

$$Li_3(1/2) = \frac{7}{8}\zeta(3) + \frac{1}{6}(\ln 2)^3 - \frac{\pi^2}{12} \ln 2; \quad (57.4)$$

$$Li_3(2-\phi) = \frac{4}{5}\zeta(3) + \frac{2}{3}(\ln \phi)^3 - \frac{2}{15}\pi^2 \ln \phi, \quad (57.5)$$

*valendo*  $\zeta(3) \approx 1.2020569031595942853$  mentre  $\phi := (1+5^{1/2})/2$  indica la cosiddetta *Costante Aurea* (o *Numero di Fidia*). Per quanto riguarda l'Idn. (57.5), si notino le identità interne ulteriori seguenti:

$$2-\phi \equiv 1-1/\phi = (3-5^{1/2})/2 \approx 0.3819660113, \quad (57.6)$$

$$\ln \phi \equiv \operatorname{csch}^{-1} 2 \approx 0.4812118251 \text{ ovvero, inversamente, } \phi = e^{\operatorname{csch}^{-1} 2} \equiv (1+5^{1/2})/2. \quad (57.7)$$

■

**Problema 11**

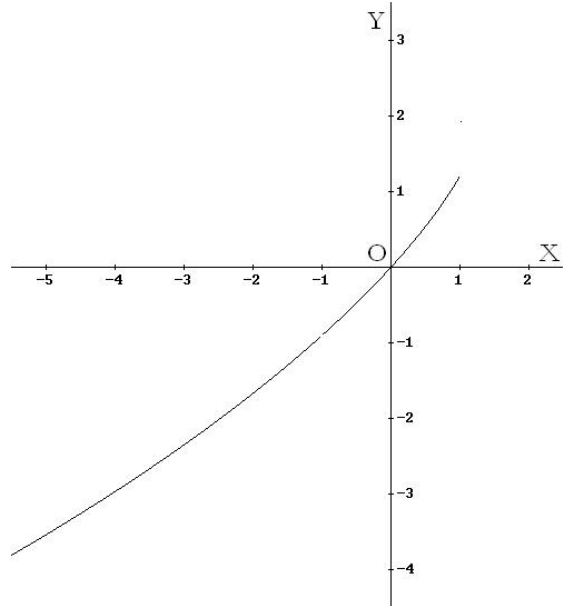
Procedere come con l’Eq. (50) verificando sequenzialmente che, per  $x \in (-\infty, -1]$ , valgono i *prolungamenti analitici* (reali) in serie di funzioni *uniformemente* convergenti – unici in intervalli *compatti* –

$$Li_3(x) = -\frac{\pi^2}{6} \ln(-x) - \frac{1}{6} (\ln(-x))^3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 x^k} ;$$

$$Li_4(x) = -\frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{12} (\ln(-x))^2 - \frac{1}{24} (\ln(-x))^4 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4 x^k} ; \tag{58.2}$$

$$Li_5(x) = -\frac{7\pi^4}{360} \ln(-x) - \frac{\pi^2}{36} (\ln(-x))^3 - \frac{1}{120} (\ln(-x))^5 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5 x^k} ; \tag{58.3}$$

Fig. 6 – La funzione  $x \mapsto Li_3(x)$



$$Li_6(x) = -\frac{31\pi^6}{15120} - \frac{7\pi^4}{720} (\ln(-x))^2 - \frac{\pi^2}{144} (\ln(-x))^4 - \frac{1}{720} (\ln(-x))^6 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6 x^k} ; \tag{58.4}$$

$$Li_7(x) = -\frac{31\pi^6}{15120} \ln(-x) - \frac{7\pi^4}{2160} (\ln(-x))^3 - \frac{\pi^2}{720} (\ln(-x))^5 - \frac{1}{5040} (\ln(-x))^7 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^7 x^k} ; \tag{58.5}$$

$$Li_8(x) = -\frac{127\pi^8}{604800} - \frac{31\pi^6}{30240} (\ln(-x))^2 - \frac{7\pi^4}{8640} (\ln(-x))^4 - \frac{\pi^2}{4320} (\ln(-x))^6 - \frac{1}{40320} (\ln(-x))^8 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8 x^k} . \tag{58.6}$$

**Problema 12**

La *Funzione Poli-logaritmica* si incontra, e.g., nel calcolo di certi integrali connessi ai *diagrammi di Feynman*, relativi a correzioni quanto-elettrodinamiche del *rapporto giromagnetico* dell’elettrone, e di integrali di *densità* (distribuzioni) quantistiche di insiemi di particelle libere, identiche e in equilibrio statistico.

12.1 Nella rappresentazione di un ‘gas’ di *fermioni* liberi, identici e in equilibrio statistico, dopo averne discusso le condizioni di integrabilità, si calcoli l’integrale, parametrico in  $\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}$ ,

$$\mathfrak{J}_{FD}(\lambda, \mu) := \int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda}{e^{x+\mu} + 1} dx ;$$

12.2 si calcoli l’integrale analogo, relativo a un ‘gas’ di *bosoni* liberi, identici e in equilibrio statistico,

$$\mathfrak{J}_{BE}(\lambda, \mu) := \int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda}{e^{x+\mu} - 1} dx .$$

**Soluzione** (†)

12.1 Circa l'insieme dei valori del parametro  $\lambda$ , per i quali  $\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu)$  è convergente ( $\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu) < +\infty$ ), definita, per brevità,  $\psi_{\lambda, \mu}(x) := x^\lambda / (e^{x+\mu} + 1)$  l'espressione integranda, si osserva che,

se  $x \in \mathcal{U}(+\infty)$ , è  $\psi_{\lambda, \mu}(x) = o(1)$  di ordine  $> \omega \in (1, +\infty)$  vs. l'infinitesimo principale  $1/x$  e, pertanto, che  $\psi_{\lambda, \mu}(x)$  è integrabile in  $\mathcal{U}(+\infty) \forall \lambda$ ;

se  $x \in \mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ , allora,  $\psi_{\lambda, \mu}(x) \sim x^\lambda / (e^\mu + 1)$ , i.e.,  $\psi_{\lambda, \mu}(x)$  risulta integrabile solo se  $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ .

Quindi,  $\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu) < +\infty$  solo per  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Poiché  $\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu)$  non è rappresentabile in forma chiusa mediante funzioni elementari, l'integrazione in serie appropriata inizia dividendo sia il numeratore che il denominatore di  $\psi_{\lambda, \mu}(x)$  per  $e^{x+\mu}$ :

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda, \mu}(x) &\equiv \frac{x^\lambda e^{-(x+\mu)}}{1 + e^{-(x+\mu)}} = x^\lambda e^{-(x+\mu)} \sum_{k=0}^{+\infty} (-e^{-(x+\mu)})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(k+1)\mu} x^\lambda e^{-(k+1)x} \\ &\equiv \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} (e^{-\mu})^k (x^\lambda e^{-kx}) \equiv - \sum_{k=1}^{+\infty} (-e^{-\mu})^k (x^\lambda e^{-kx}). \end{aligned} \tag{59}$$

Nell'intervallo di integrazione  $[0, +\infty)$ , il fattore  $(1 + e^{-(x+\mu)})^{-1}$  corrisponde alla somma della *Serie Geometrica* di ragione variabile  $r_\mu(x) \equiv -e^{-(x+\mu)}$  sse  $x > -\mu$ . Ciò implica che,  $\forall x$ , deve essere  $\mu > 0$ .

Essendo  $x^\lambda e^{-kx} \leq x^\lambda = o(1)$  in  $\mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ , la rappresentazione (59) di  $\psi_{\lambda, \mu}(x)$  è uniformemente convergente in  $[0, +\infty)$ , per il *criterio di Weierstrass*. Quindi, è ammissibile scambiare l'ordine delle operazioni di somma infinita e di integrazione e scrivere

$$\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu) = - \sum_{k=1}^{+\infty} (-e^{-\mu})^{k-1} \int_0^{+\infty} x^\lambda e^{-kx} dx.$$

Con la sostituzione  $x := t/k$ , il cui elemento differenziale è  $dx = dt/k$ , si ha

$$\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-e^{-\mu})^{k-1}}{k^{\lambda+1}} \int_0^{+\infty} t^{(\lambda+1)-1} e^{-t} dt = -\Gamma(\lambda+1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-e^{-\mu})^{k-1}}{k^{\lambda+1}}.$$

Ora, poiché  $\mu > 0$ , ne segue che  $|-e^{-\mu}| < 1$  e, quindi, dall'Eq. (55), risulta

$$\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu) = -\Gamma(\lambda+1) Li_{\lambda+1}(-e^{-\mu}); \tag{60}$$

12.2 il controllo di convergenza dell'integrale *bosonico*  $\mathcal{J}_{BE}(\lambda, \mu)$  porta a conclusioni identiche. Con procedimento di calcolo analogo a quello per  $\mathcal{J}_{FD}(\lambda, \mu)$ , si trova facilmente che,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \wedge \mu > 0$ ,

$$\mathcal{J}_{BE}(\lambda, \mu) = \Gamma(\lambda+1) Li_{\lambda+1}(e^{-\mu}). \tag{61}$$

**Osservazioni**

- Il fatto che  $\lambda \in \mathbb{R}$  corrisponde all'estensione della definizione della *Funzione Poli-logaritmica* all'ordine *reale relativo*. Tale proprietà trova fondamento nel prolungamento in  $\mathbb{C}$  di  $Li_{\#}(x) \mapsto Li_{\#}(z)$  e, quindi, delle *Funzioni* (analitiche)  $\zeta$  di *Riemann* (e delle sue associate) e  $\eta$  di *Dirichlet*, entrambi i tipi correlati a *Li*.
- Nelle Eq.i (60) e (61), il parametro esponenziale  $e^{-\mu} \equiv \mathcal{Z}^{-1}$  corrisponde al *reciproco* della *fugacità*,  $\mathcal{Z}$ , del 'gas' quantistico vs. la statistica rispettiva, *fermionica* (F-D) o *bosonica* (B-E). ■

(†) Un integrale simile è risolto nel math-notebook, già citato: **Esercizi di Calcolo Integrale in  $\mathbb{R}$ , IS-2.**



**Bibliografia**

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: [https://www.cm-phymath.net/libr\\_page.html](https://www.cm-phymath.net/libr_page.html).

- [1] LEBEDEV, N. N., *Special Functions and their Applications*, DOVER PUBL.S (1965; REPR. 1972);
- [2] GATTESCHI, L., *Funzioni Speciali*, U.T.E.T. (1973);
- [3] MARKUSHEVICH, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2<sup>a</sup> ED., VOLL. **I**, P.S 224-228, & **III**, P. 251, CHELSEA PUBL. CO. (1977);
- [4] LEVINSON, N. - REDHEFFER, R. M., *Complex Variables*, HOLDEN DAY, INC. (1970);
- [5] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2<sup>ND</sup> ED., CH. 10, PRENTICE-HALL, INC. (1976);
- [6] CARRIER, G. F. - KROOK, M. - PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable*, MCGRAW-HILL, INC. (1966);
- [7] BROWN, J. W. - CHURCHILL, R. V., *Complex Variables and Applications*, 8<sup>TH</sup> ED., MCGRAW-HILL BOOK CO. (2009);
- [8] SPIEGEL, M. R., ET AL., *Complex Variables*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 2<sup>ND</sup> ED., MCGRAW-HILL CO. (2009);
- [9] HAUSER, A. A., *Complex Variables with physical applications*, SIMON & SCHUSTER TECH OUTLINE (1971);
- [10] TEMME, N. M., *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);
- [11] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7<sup>TH</sup> ED., CH. 13, ACADEMIC PRESS (2013);
- [12] OLVER, F. W. J. - LOZIER, D. W. - BOISVERT, R. F. - CLARK, C. W., EDS., *N.I.S.T. Handbook of Mathematical Functions*, CAMBRIDGE UN. PRESS (2012) [ link: <https://dlmf.nist.gov/> ];
- [13] ROI, L., *Funzioni esponenziali e logaritmiche*, ED. H - ALPHA (2010)  
[ dwld link: <https://www.lorenzoroi.net/prelievi/Logaritmi.pdf> ].

