revisione
19 gennaio 2024

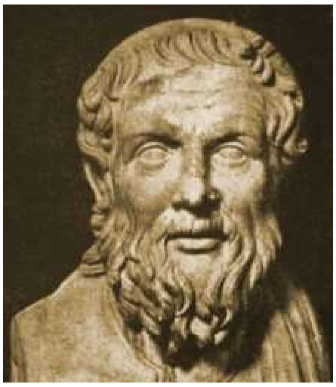
# Sezioni Coniche -

## Elementi e metodi operativi

claudio magno

https://www.cm-physmath.net/

CM_Portable MATH Notebook Series™



*Apollonio da Perga* (~ 262-190 a. C.)

# INDICE

## INTRODUZIONE

Questo math-notebook raccoglie, in modo più o meno coerente, qualche osservazione, applicazioni estemporanee ed elaborazioni personali in formato generale (spero utili per una programmazione) sul tema classico delle Sezioni Coniche in $\mathbb{R}^2$. Gli argomenti – supposti già ben noti a chi legge – presentati in forma essenziale e concisa ma esplicitamente 'operativa', provengono da esemplificazioni contenute nelle mie lezioni e\o esercitazioni in Analisi Matematica 2 presso la Facoltà di Ingegneria dell'UniBG (Università Statale di Bergamo, 1993-1998). Ben lungi dal voler intrufolarmi, anche solo per sbaglio, tra lavori di peso e di rigore che affrontano il tema dal punto di vista, e.g., della Geometria Proiettiva, ho scelto di seguire la strada del Calcolo elementare con un 'mix' leggero di Analisi (funzioni definite implicitamente), di Algebra Lineare (matrici) e qualche 'vago sentore' di Geometria Differenziale …

Ripeto: questi sono solo appunti buttati giù 'a braccio', nulla di più! Il loro obiettivo è, dichiaratamente, quello di indicare un background elementare minimo per iniziare a manipolare certi modelli semplici della Fisica Classica (i.e., Newtoniana), primo tra tutti, quello Gravitazionale (§ 14) in un campo di forza *centrale* $\propto R^{-2} \equiv \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|^{-2}$.

Peraltro, l'APPENDICE finale ha ricevuto un'attenzione particolare: essa contiene formule alquanto dettagliate, sia *dirette* che *inverse*, per le trasformazioni piane isometriche (*affini*) più comuni. Sono quelle, banali quanto si voglia, che, però, quando le cerchi con urgenza, o non le trovi o sono accennate in modo parziale (e lasciate all'utile esercizio per l'interessata\o …) ma quasi mai presentate in modo 'chiaro e distinto' e 'pronte-per-l'uso' generale. Ovviamente, tali formule hanno un ambito di applicazione che va *ben oltre* quello occasionale delle Sezioni Coniche.

Spero di non aver demeritato del tutto.

C M

# 1. La Superficie Conica Generatrice

Seguendo la presentazione classica, le caratteristiche geometriche di una *sezione conica reale* sono determinate a partire da una superficie conica *infinita*, *circolare-retta* e *a due falde*. La scelta che la superficie conica sia a *due* falde è necessaria affinché il *piano secante*, e.g., il piano $X \times Y$ di rappresentazione *cartesiana*, incontri la superficie *quale che sia* l'inclinazione dell'asse del cono.

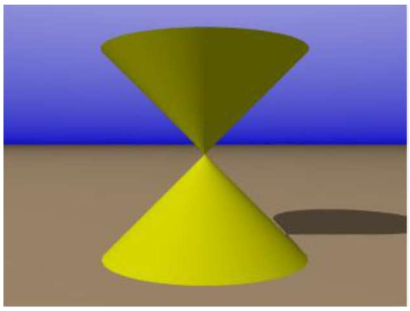


Fig. 1.1 – Superficie conica a due falde

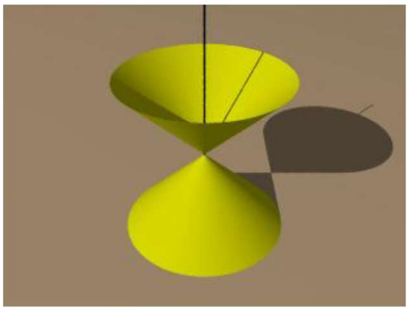


Fig. 1.2 – Asse del cono

Una *superficie conica circolare-retta a due falde*, $\Xi$, può essere definita con metodi vettoriali elementari. Poi, tagliando $\Xi$ con il piano $X \times Y$, si determina una *linea piana* $\mathcal{K}$, detta **sezione conica**, ottenendo una conoscenza dettagliata della struttura dei coefficienti nella rappresentazione della sezione in termini dei parametri caratteristici di $\Xi$.
Parametri sufficienti per una costruzione dell'equazione di una superficie conica circolare-retta a due falde sono:

1.1 le coordinate spaziali del vertice: $V \equiv (x_0; y_0; z_0) \equiv \boldsymbol{r}_0$;

1.2 il versore assiale assegnato $\hat{\boldsymbol{n}} \equiv (n_x; n_y; n_z)$. Le misure delle componenti di $\hat{\boldsymbol{n}}$ sono i *coseni direttori* dell'asse del cono nello spazio $X \times Y \times Z$;

1.3 l'angolo di semi-apertura del cono, *polare* vs. l'asse direttore $\hat{\boldsymbol{n}}$ e di ampiezza (in rad) $\alpha \in (0, \pi/2)$, che fornisce il parametro di proiezione assiale $\kappa := \cos\alpha$ $(> 0)$.

Pertanto, se $P \equiv (x; y; z) \equiv \boldsymbol{r}$ è un punto generico di $\Xi$, l'equazione *scalare* di questa superficie si scompone sinteticamente in

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \pm |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| \, \kappa . \tag{1}$$

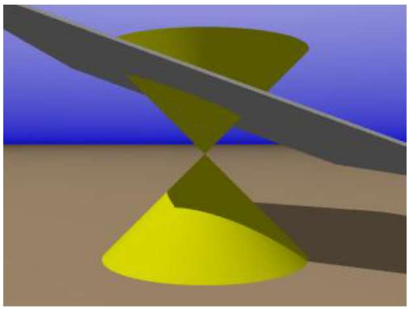


Fig. 2.1 – Ellisse

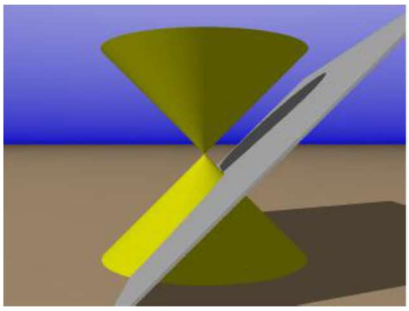


Fig. 2.2 – Parabola

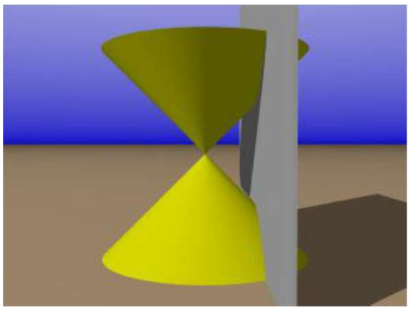


Fig. 2.3 – Iperbole

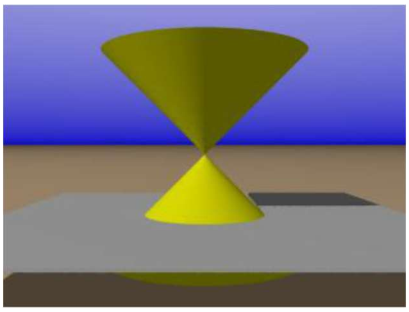


Fig. 2.4 – Circonferenza

L'ambiguità di segno nell'Eq. (1) indica la *simmetria centrale* della superficie conica rispetto al suo vertice $V$. Tale ambiguità viene mascherata elevando al quadrato i membri dell'Eq. (1),

$$((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2 = (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2\kappa^2 , \tag{2}$$

i.e., in rappresentazione scalare cartesiana implicita,

$$((x-x_0)n_x+(y-y_0)n_y+(z-z_0)n_z)^2-((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)\kappa^2 = 0 . \tag{2.1}$$

L'espansione dei quadrati nell'Eq. (2.1) fornisce l'equazione *quadrica* implicita completa

$$Ax^2+Cy^2+M_1z^2+Bxy+M_2xz+M_3yz+Dx+Ey+M_4z+F = 0 , \tag{3}$$

nella quale, le identificazioni dei coefficienti corrispondono alle espressioni *reali* seguenti:

$$A \equiv n_x^2-\kappa^2 , \tag{4.1}$$
$$B \equiv 2n_xn_y , \tag{4.2}$$
$$C \equiv n_y^2-\kappa^2 , \tag{4.3}$$
$$D \equiv -2((n_x^2-\kappa^2)x_0+(y_0n_y+z_0n_z)n_x) , \tag{4.4}$$
$$E \equiv -2((n_y^2-\kappa^2)y_0+(x_0n_x+z_0n_z)n_y) , \tag{4.5}$$
$$F \equiv (x_0n_x+2y_0n_y)x_0n_x+(y_0n_y+2z_0n_z)y_0n_y+(z_0n_z+2x_0n_x)z_0n_z-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\kappa^2 , \tag{4.6}$$
$$M_1 \equiv n_z^2-\kappa^2 , \tag{4.7}$$
$$M_2 \equiv 2n_xn_z , \tag{4.8}$$
$$M_3 \equiv 2n_yn_z , \tag{4.9}$$
$$M_4 \equiv -2((n_z^2-\kappa^2)z_0+(x_0n_x+y_0n_z)n_z) . \tag{4.10}$$

Imponendo $z = 0$ nell'Eq. (3), i.e., intersecando la superficie $\Xi$ del cono con il piano $X \times Y$, si determina l'equazione – a coefficienti *reali* – della *sezione conica* generica $\mathcal{K}$ sul piano stesso,

$$\mathcal{K}:\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0 , \tag{5}$$

nella quale, per garantire la *quadraticità* della linea, *almeno uno* dei tre coefficienti $A$, $B$ o $C$ *deve essere* $\neq 0$.

■

## 2. Classificazione delle Sezioni Coniche

La natura di una conica $\mathcal{K}$ generata nel piano $X \times Y$ è determinata da $n_z$. Più precisamente, dal confronto tra $\alpha$ e l'ampiezza $sin^{-1}|n_z|$ dell'angolo compreso tra l'asse del cono e il piano $X \times Y$ (Fig. 2.5), si distinguono tre classi generali di coniche:

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{ellisse,} & \text{se} & sin^{-1}|n_z| < \alpha \quad (\text{con } |n_z| = 1 \text{ per la } \textit{circonferenza}), \\ \textbf{parabola,} & \text{se} & sin^{-1}|n_z| = \alpha, \\ \textbf{iperbole,} & \text{se} & sin^{-1}|n_z| > \alpha. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Ora, definito il parametro fondamentale

$$\Delta := B^2 - 4AC, \tag{7}$$

detto il **discriminante** o l'*invariante* (isometrico) *quadratico* della conica $\mathcal{K}$, si può scrivere, per mezzo delle identità (4.1), …, (4.10),

$$\begin{aligned} \Delta &= 4n_x^2 n_y^2 - 4(n_x^2 - \kappa^2)(n_y^2 - \kappa^2) = 4\kappa^2(n_x^2 + n_y^2 - \kappa^2) \\ &= 4\kappa^2(1 - n_z^2 - (cos\,\alpha)^2) \equiv 4\kappa^2((sin\,\alpha)^2 - n_z^2). \end{aligned}$$

Da ciò segue che i segni di $\Delta$ e del fattore $((sin\,\alpha)^2 - n_z^2)$ coincidono e, poiché $(sin\,\alpha)^2 - n_z^2 \lesseqgtr 0$, rispettivamente, nel caso in cui $sin^{-1}|n_z| \gtreqless \alpha$, allora, le relazioni (6) implicano che,

$$\text{se } \Delta \lesseqgtr 0,\ \mathcal{K} \text{ è, in modo corrispondente, } \left\{\begin{array}{l} \text{un'}\textbf{ellisse} \ (\text{nel caso, una } \textit{circonferenza}), \\ \text{una } \textbf{parabola}, \\ \text{un'}\textbf{iperbole}, \end{array}\right.$$

*indipendentemente* dal fatto che essa sia *ordinaria* o *degenere*.

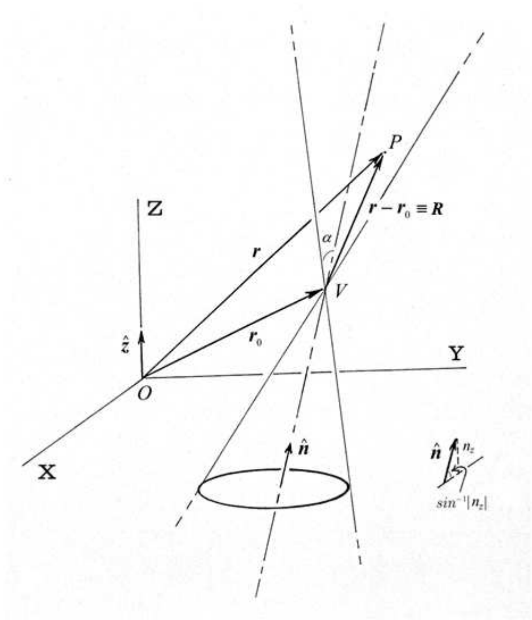



Fig. 2.5

∎

## 3. Orto-riduzione dell'equazione generale di una conica roto-traslata o ruotata

Nell'Eq. (5), il monomio *rettangolare* (o *misto*) $Bxy$ costituisce l'indicatore dell'*obliquità* degli assi di simmetria di $\mathcal{K}$ rispetto alle rette $X$ e $Y$ di riferimento rettangolare.
Ora, poiché ogni conica possiede due direzioni di simmetria *ortogonali* (per la parabola, la retta direttrice può fungere da direzione di simmetria, associata all'asse ordinario), viene spontaneo ruotare il sistema di riferimento $xOy$ di un angolo di ampiezza $\varphi$ opportuna – anti-orariamente od orariamente – così che la rappresentazione di $\mathcal{K}$ nel sistema di riferimento ruotato, $uOv$, risulti *ridotta* (canonica) o, almeno, *semi-ridotta* (traslata), i.e., che *non* contiene più il monomio rettangolare $(B \equiv 0)$. Una tale rotazione è quella generatrice di un'**orto-riduzione** di $\mathcal{K}$.
Applicando le Eq. (A.6) per l'affinità rotazionale di parametro $\varphi$ all'Eq. (5) e riordinando i termini in forma implicita rispetto alle nuove variabili $u$ e $v$, si determina la rappresentazione *generale trasformata* (a coefficienti *reali*)

$$\mathcal{K}: \; A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0\,, \tag{8}$$

nella quale, le espressioni dei coefficienti sono date, mediante i vari parametri originari, da

$$A' = (1/2)(A + C + (A - C)\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi)\,, \tag{9.1}$$
$$B' = (C - A)\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi\,, \tag{9.2}$$
$$C' = (1/2)(A + C - (A - C)\cos 2\varphi - B\sin 2\varphi)\,, \tag{9.3}$$
$$D' = D\cos\varphi + E\sin\varphi\,, \tag{9.4}$$
$$E' = -D\sin\varphi + E\cos\varphi\,, \tag{9.5}$$
$$F' \equiv F\,. \tag{9.6}$$

Imponendo la condizione $B' = 0$, i.e., $(C - A)\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi = 0$, segue,

- per $A \neq C$, che $\tan 2\varphi = B/(A - C)$ e, quindi, che $\varphi = \tan^{-1}(B/(A - C)) + k\pi/2$;
- per $A = C$, che $\cos 2\varphi = 0$ e, quindi, che $(\pm 1 + 2k)\pi/4$ $(k \in \mathbb{Z})$.

La scelta $k = 0$, con $A \neq C$, fornisce l'ampiezza **minore possibile** dell'angolo di rotazione del sistema di riferimento $xOy$, sufficiente per determinare un'orto-riduzione di $\mathcal{K}$:

$$\varphi = \begin{cases} (1/2)\tan^{-1}(B/(A - C)), & \text{se } A \neq C\,, \\ \pi/4, & \text{se } A = C\,. \end{cases} \tag{10}$$

I valori delle varie quantità goniometriche che intervengono nella descrizione dell'orto-riduzione (minore) di $\mathcal{K}$, si ricavano osservando che $2\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ e, quindi, che $0 \le \cos 2\varphi$ $(\le 1)$.
Segue che $1/2^{1/2} \le \cos\varphi$ $(\le 1)$, mentre $\sin\varphi$ e $\tan\varphi$ hanno lo *stesso* segno di $\varphi$, risultando $|\sin\varphi| \le 1/2^{1/2}$, $|\tan\varphi| \le 1$ e, dalle Eq. (10), $\sigma := \mathrm{sgn}\,\varphi \equiv \mathrm{sgn}(B/(A - C))$.
Pertanto, dopo aver calcolato, nell'ordine,

$$\cos 2\varphi \equiv \frac{1}{(1 + (\tan 2\varphi)^2)^{1/2}} \equiv \frac{|A - C|}{((A - C)^2 + B^2)^{1/2}}\,, \tag{11.1}$$

$$\sin 2\varphi \equiv \sigma(1 - (\cos 2\varphi)^2)^{1/2} = \frac{\sigma|B|}{((A - C)^2 + B^2)^{1/2}}\,, \tag{11.2}$$

a partire dalla prima delle condizioni (10) e tenendo conto del caso-limite costituito dalla seconda, si esprimono, $\forall\, \varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$,

$$cos\,\varphi \equiv \left(\frac{1+cos\,2\varphi}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2^{1/2}}\left(1+\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

$$sin\,\varphi \equiv \sigma\left(\frac{1-cos\,2\varphi}{2}\right)^{1/2} = \frac{\sigma}{2^{1/2}}\left(1-\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

$$tan\,2\varphi \equiv \frac{sin\,2\varphi}{1+cos\,2\varphi} = \ldots = \sigma\left(1+\left(\frac{A-C}{B}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{A-C}{B} \tag{14}$$

e, quindi, la matrice di rotazione *minima* $(k = 0)$ generatrice di orto-riduzione, in forma generale,

$$\mathbf{R}_{\varphi} := \begin{pmatrix} cos\,\varphi & -sin\,\varphi \\ sin\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/2}}\left(1+\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2} & -\frac{\sigma}{2^{1/2}}\left(1-\frac{|A-C|}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}\right)^{1/2} \\ \frac{\sigma}{2^{1/2}}\left(1-\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2} & \frac{1}{2^{1/2}}\left(1+\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

↳ (15)

Invertendo l'Eq. (14) vs. la funzione $tan$, sostituendo le espressioni (12) e (13) e tenendo presente che è $B \neq 0$, risulta, in forma sintetica equivalente alla coppia di Eq. (10),

$$\varphi = tan^{-1}\left(\sigma\left(1+\left(\frac{A-C}{B}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{A-C}{B}\right). \tag{16}$$

Infine, si costruiscono i coefficienti dell'Eq. trasformata (8) con la sostituzione delle Eq.i (11), (14), (12.1) e (12.2) nelle Eq.i generali (9.1), …, (9.5),

$$A' = \frac{1}{2}\left(A+C+\frac{(A-C)|A-C|+\sigma B|B|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right), \tag{17.1}$$

$$B' = 0, \tag{17.2}$$

$$C' = \frac{1}{2}\left(A+C-\frac{(A-C)|A-C|+\sigma B|B|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right), \tag{17.3}$$

$$D' = \frac{1}{2^{1/2}}\left(E\left(1+\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2} + \sigma D\left(1-\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2}\right), \tag{17.4}$$

$$E' = \frac{1}{2^{1/2}}\left(E\left(1+\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2} - \sigma D\left(1-\frac{|A-C|}{((A-C)^2+B^2)^{1/2}}\right)^{1/2}\right), \tag{17.5}$$

corrispondenti all'orto-riduzione *minore* possibile.
Chiaramente, per ogni rotazione *rigida* – che costituisca un'*isometria* – vale l'identità $F' \equiv F$.

■

## 4. Coniche reali degeneri

Una sezione conica $\mathcal{K}$ nel piano secante $X \times Y$ è **degenere** se

4.1 $X \times Y$ passa per il *vertice* $V$ della superficie *conica* generatrice $\Xi$. Questa può essere *ordinaria* o *degenere* (i.e., $\Xi$ è una superficie *cilindrica* infinita, o *cono improprio*). Questo corrisponde al fatto che $V$ è, rispettivamente, un punto o *ordinario* (i.e., al *finito*) o *improprio* (i.e., all'*infinito*) [carattere *geometrico* di $\mathcal{K}$];

4.2 l'Eq. (5) nel piano secante $X \times Y$ corrisponde al *prodotto* di due equazioni lineari *implicite* in $x$ e $y$ (i.e., entrambe del tipo $ax + by + c = 0$) [carattere *algebrico* di $\mathcal{K}$].

Analizzando le tre coniche più specificamente, si distinguono i casi seguenti:

**ellisse degenere**: il piano $X \times Y$ passa per il vertice $V$ della superficie conica, che è l'*unico* punto ordinario in comune. In tal caso, *l'ellisse si riduce al suo centro*, i.e., *degenera* nel suo centro (v. Fig. 3.1, il caso della circonferenza degenere);

**parabola degenere**: il piano $X \times Y$ passa per il vertice $V$ del cono – un punto ordinario – ed è tangente a questo lungo *due* sue rette generatrici *coincidenti*, appoggiate su entrambe le falde coniche (v. Fig. 3.2),

oppure,

il piano $X \times Y$ è tangente a un cilindro infinito (i.e., a un cono degenere, con vertice e una falda all'infinito) lungo *due* rette generatrici del cilindro *coincidenti* o *distinte* (in tal caso, *parallele*). Allora,

il membro sinistro nell'Eq. (5) o è l'espansione del quadrato di un trinomio lineare, $(ax + by + c)^2$, o si fattorizza nel prodotto di due trinomi lineari, $(ax + by + c_1)(ax + by + c_2)$, distinti *unicamente* per avere $c_1 \neq c_2$;

**iperbole degenere**: il piano $X \times Y$ contiene l'asse del cono, i.e., passa per il vertice $V$ del cono – un punto ordinario – tagliandolo lungo *due* sue rette generatrici *distinte* (ovviamente, *concorrenti* in $V$) e tangenti a entrambe le falde coniche. In altre parole, l'iperbole *degenera* nei suoi asintoti.
Pertanto,

il membro sinistro nell'Eq. (5) è separabile nel prodotto di due trinomi lineari, distinti per *almeno uno* dei coefficienti delle *variabili*, i.e., risulta $(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2)$, con $a_1 \neq a_2 \vee b_1 \neq b_2$.

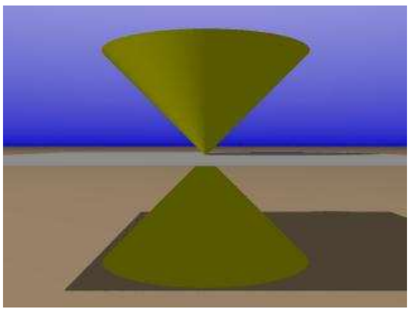


Fig. 3.1 – Circonferenza degenere

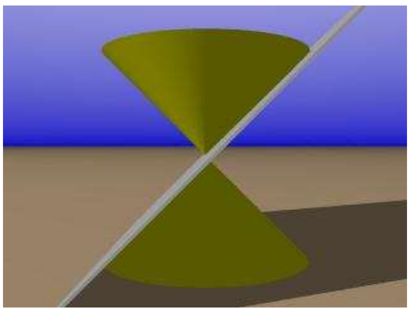


Fig. 3.2 – Parabola degenere

■

## 5. L'Invariante Cubico di una conica

Una verifica diretta mostra che le Eq.i generali (5) e (8) condividono, oltre ai parametri *invarianti lineare*, $\Lambda := A + C \equiv A' + C' := \Lambda'$, e *quadratico*, $\Delta := B^2 - 4AC \equiv B'^2 - 4A'C' := \Delta'$, anche anche il parametro *invariante* **cubico**, $\Omega$, esprimibile in forma di determinante simmetrico

$$\Omega := \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = 2(BDE - AE^2 - CD^2 - F\Delta), \tag{18}$$

$$\equiv \frac{\Delta(D^2 - 4AF) - (BD - 2AE)^2}{2A}, \quad \text{se } A \neq 0, \tag{18.1}$$

$$\equiv \frac{\Delta(E^2 - 4CF) - (BE - 2CD)^2}{2C}, \quad \text{se } C \neq 0. \tag{18.2}$$

$$\equiv 2(B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2 - F\Delta') := \Omega'. \tag{18.3}$$

Ora, si possono ricavare i *fattori lineari* in cui si scinde l'equazione di una sezione conica *degenere* risolvendo l'Eq. (5) rispetto all'una o all'altra delle variabili, $x$ o $y$.
Infatti, con $A \neq 0$, si ottiene

$$x = \frac{-By - D \pm (\Phi(y))^{1/2}}{2A}, \tag{19}$$

dove,

$$\Phi(y) := (\Delta)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF, \tag{19.1}$$

mentre, con $C \neq 0$, vale l'espressione analoga

$$y = \frac{-Bx - E \pm (\Psi(x))^{1/2}}{2C}, \tag{20}$$

nella quale,

$$\Psi(x) := (\Delta)x^2 + 2(BE - 2CD)x + E^2 - 4CF. \tag{20.1}$$

La *condizione di degenerazione* di $\mathcal{K}$ implica che $\Phi(y)$ e $\Psi(x)$ siano *trinomi quadratici perfetti* vs. $x$ e $y$, rispettivamente. In quanto segue, la discussione viene riferita alle Eq.i (19) e (19.1). Per simmetria evidente di scambio tra i termini dell'Eq. (5) ($(x \rightleftarrows y$, $A \rightleftarrows C$, $D \rightleftarrows E$, $B \rightleftarrows B$ e $F \rightleftarrows F)$, l'analisi si applica *in modo identico* alle Eq.i (20) e (20.1), con modificazioni ovvie nei dettagli di procedimento.

Pertanto, nei casi di un'*iperbole* ovvero di una *parabola* degeneri, le equazioni delle due rette di degenerazione sono specificate dalle soluzioni (19), con $\Phi(y) \geq 0$.

Nel caso di un'*ellisse* reale degenere (nel suo centro), si avrà, in generale, che $\Phi(y) \leq 0$ perché, tenuto conto che $\Phi(y)$ deve essere un trinomio quadratico perfetto, l'unico valore (doppio) reale di $y$ che annulla $\Phi(y)$ corrisponde all'*ordinata* del centro (di degenerazione) dell'ellisse. Il valore dell'*ascissa* di tale centro si calcola dall'Eq. (19).

Il problema dell'ellisse reale degenere è risolto, in modo equivalente, dalle formule (23), v. P. 13.

D'altra parte, quando l'Eq. (5) (a coefficienti *reali*!) rappresenta un'ellisse, questa potrebbe essere

costituita da punti *non-reali* (ellisse *complessa*). In tale eventualità, conviene sfruttare l'invarianza per roto-traslazione dei parametri $\Lambda$ e $\Omega$, costruendo il parametro *invariante* composto $\Lambda'\Omega'$ corrispondente, per semplicità, alla forma *canonica* dell'ellisse.
Così, e.g., considerata la rappresentazione implicita specifica dell'ellisse *reale*,

$$b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2 = 0,$$

dalle Eq.i (18) e (18.3), vale *sempre* l'identità *invariante*

$$\begin{aligned}\Lambda\Omega \equiv \Lambda'\Omega' &= (A'+C')(2(\cancel{B'D'E'} - \cancel{A'E'^2} - \cancel{C'D'^2} - F'(\cancel{B'^2} - 4A'C'))) \\ &\equiv -8(a^2+b^2)a^4b^4 < 0,\end{aligned}$$

risultando, evidentemente, $F' \equiv -a^2b^2 < 0$.
D'altra parte, l'eventualità opposta di trovare $\Lambda\Omega > 0$, i.e., che l'orto-riduzione canonica fornisca il termine costante $F' > 0$ e, da questo, che sia, necessariamente, $F' \neq -a^2b^2$, porta al criterio *sufficiente* di riconoscimento seguente:

$$\text{l'ellisse è } \begin{cases}\text{reale} \\ \text{complessa}\end{cases} \quad \text{se} \quad \Lambda\Omega \begin{cases}< 0 \\ > 0\end{cases}.$$

Infine, quando $A \equiv C = 0$ (purché sia $B \neq 0$), si trova che $\Omega \equiv B(DE - BF) = 0$, i.e., che $DE = BF$. Questa circostanza corrisponde alla degenerazione di una particolare iperbole equilatera roto-traslata nei suoi asintoti *paralleli agli assi di riferimento*, di equazioni rispettive $x = -E/B$ e $y = -D/B$ (*iperbole omografica rettangolare*, v. p. 16). Infatti, l'equazione di $\mathcal{K}$ è ridotta alla forma fattorizzata $(x + E/B)(y + D/B) = 0$.

Altrimenti, nel caso in cui sia, almeno, $A \neq 0 \vee C \neq 0$, sussiste l'importante

**Teorema**

Condizione *necessaria* e *sufficiente* affinché la sezione conica $\mathcal{K}$ a coefficienti *reali* sia **degenere** è che risulti $\Omega = 0$. ▲

**Dimostrazione**

(caso $A \neq 0$; per il caso $C \neq 0$, si procede in modo analogo)

- La condizione è *necessaria* perché,

  se $\mathcal{K}$ è degenere, allora, $\Phi(y)$ è un *trinomio quadratico perfetto*, i.e., $\Phi(y) \equiv (|\Delta|^{1/2}y \pm (|D^2 - 4AF|)^{1/2})^2$. Questo implica, dall'Eq. (19.1), che $0 = \Delta(D^2 - 4AF) - (BD - 2AE)^2 = \ldots = 2A\Omega$. Ma, poiché è $A \neq 0$, segue che $\Omega \equiv 0$;

- la condizione è *sufficiente* perché,

  se $\Omega \equiv 0$, allora, si deduce che $0 = 2A\Omega = \ldots = \Delta(D^2 - 4AF) - (BD - 2AE)^2$, i.e., il trinomio quadratico $\Phi(y) := (\Delta)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF$ è perfetto. Quindi, la conica $\mathcal{K}$, che, attraverso la *coppia* delle Eq.i (18) e (18.1), costituisce una rappresentazione *alternativa* ed *equivalente* dell'Eq. (5), è degenere.

■

Come completamento degli argomenti discussi, i tre TEOREMI DI DANDELIN (GERMINAL PIERRE, 1794-1847), significativi nell'ambito delle proiezioni stereografiche in Cartografia, sono proposti a chi legge per una loro dimostrazione (piuttosto semplice) (†):

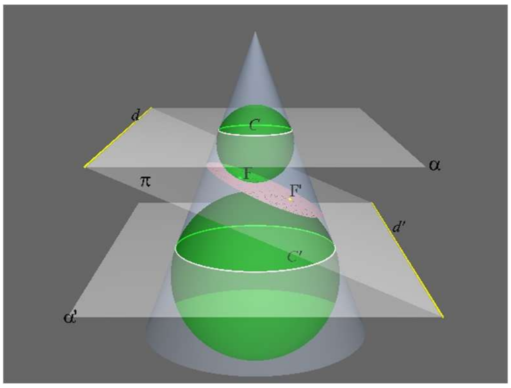



Fig. 4.1 – Le sfere di Dandelin per l'**ellisse**

**Teorema** $\mathfrak{D}_{\mathrm{e}}$

I fuochi dell'*ellisse* generata tagliando una falda della superficie conica circolare retta $\varXi$ con un piano π (e.g., $X \times Y$) coincidono con i punti di contatto delle due sfere tangenti *sia* al piano $X \times Y$ *sia* al piano $\varXi$, *entrambe* interne a una *stessa* falda. ▲

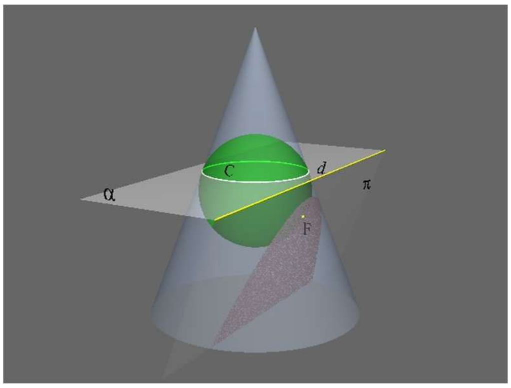



Fig. 4.2 – La sfera di Dandelin per la **parabola**

**Teorema** $\mathfrak{D}_{\mathrm{p}}$

Il fuoco della *parabola* generata tagliando una superficie conica circolare retta $\varXi$ con un piano π (e.g., $X \times Y$) coincide con il punto di contatto della sfera tangente *sia* a questo piano *sia* a $\varXi$ internamente a una *stessa* falda.
La retta *direttrice* della parabola risulta intersezione tra il piano $X \times Y$ e il piano in cui giace la circonferenza di contatto tra $\varXi$ e la sfera. ▲

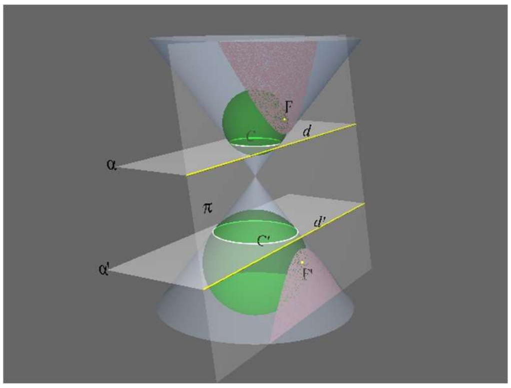



Fig. 4.3 – Le sfere di Dandelin per l'**iperbole**

**Teorema** $\mathfrak{D}_{\mathrm{h}}$

I fuochi dell'*iperbole* generata tagliando una superficie conica circolare retta $\varXi$ con un piano π (e.g., $X \times Y$) coincidono con i punti di contatto delle due sfere tangenti *sia* a tale piano *sia* a $\varXi$, interne, *ciascuna esclusivamente*, all'una o all'altra falda. ▲

■

---

(†) *Sugg.*: Si sfruttino le proprietà elementari di tangenza a una sfera – ridotta in 2-dim alla sua circonferenza meridiana – vs. un punto *esterno* ad essa e la definizione fondamentale di ciascuna Sezione Conica.

## 6. Condizione puntuale sufficiente per la determinazione di una conica reale

**Proposizione**

*Cinque punti ordinari distinti in un piano, qualsiasi terna dei quali non sia allineata, determinano una e una sola conica non-degenere.* ▲

Una formulazione equivalente di tale proposizione è:

*Cinque rette distinte in un piano, determinano univocamente una conica non-degenere, quella tangente ad esse, che determina i cinque punti di tangenza* ([1]). ▲

L'asserto segue dal fatto che, nell'Eq. generale (5), *almeno uno* dei coefficienti degli addendi quadratici, $A$, $B$ o $C$, $B$, *deve* essere $\neq 0$. Supponendo, e.g., che sia $A \neq 0$ e dividendo i membri dell'Eq. (5) per $A$, si ottiene la rappresentazione *equivalente* della conica

$$x^2 + \kappa_1 xy + \kappa_2 y^2 + \kappa_3 x + \kappa_4 y + \kappa_5 = 0\,,$$

nella quale, $\kappa_1 \equiv B/A$, $\kappa_2 \equiv C/A$, etc. .

La normalizzazione vs. $x^2$ riduce a *cinque* il numero dei coefficienti *incogniti* da determinare e implica la sufficienza di *cinque equazioni vincolari lineari di appartenenza puntuale alla conica*, i.e., la conoscenza di una cinquina di punti ordinari *distinti* qualsiasi della conica, $\{(x_j; y_j)\}$, con $j = 1, 2, \ldots, 5$.

Inoltre, considerato che la *curvatura* di una conica reale *non-degenere* $\in \mathbb{R}^2$ ([2]), *non può esistere una terna di tale cinquina che appartenga a una stessa retta* (linea a curvatura *nulla*!).

■

In Geometria Proiettiva, dall'inversione del *Teorema di Pascal*, si arriva all'equazione canonica di una sezione conica *non-degenere*, della quale, sia nota una cinquina *qualsiasi* di suoi punti *distinti*. L'equazione, contratta in forma generale di determinante, è

$$\mathcal{C}(x,y) \equiv \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{21}$$

Pertanto, i coefficienti nell'Eq. (5) corrispondono ai sei complementi algebrici $\mathcal{C}_{1,j}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, degli elementi della 1ª riga del determinante $\mathcal{C}(x,y)$:

$$A \equiv \mathcal{C}_{1,1} = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}\,, \qquad B \equiv \mathcal{C}_{1,2} = -\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}\,,$$

$$C \equiv C_{1,3} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \qquad D \equiv C_{1,4} = -\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & y_5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$E \equiv C_{1,5} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & 1 \end{vmatrix}, \qquad F \equiv C_{1,6} = -\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{vmatrix}.$$

Le riduzioni dei complementi algebrici $C_{1,j}$ alle forme numeriche esplicite rispettive sono operazioni elementari, facilmente programmabili ([3]).

■

### Osservazioni

([1]) È nota la costruzione geometrico-proiettiva *di Braikenridge-Maclaurin* di una sezione conica *non-degenere* a partire da cinque punti *distinti qualsiasi* di questa, *nessuna terna* dei quali sia allineata.

([2]) *Derivando implicitamente* vs. $x$ l'Eq. generale (5), risulta che il valore $\xi(x, y(x))$ della funzione *curvatura* $\xi$ di $\mathcal{K}$ dipende (prevedibilmente …) da quello dell'*invariante cubico* $\Omega$ $(\neq 0)$ (v. Eq. (18) e **Teorema** a P. 9):

$$\xi(x, y(x)) = \frac{2|AE^2 - BDE + CD^2 + F\Delta|}{((2Ax + By + D)^2 + (Bx + 2Cy + E)^2)^{3/2}} \equiv \frac{|\Omega|}{((2Ax + By + D)^2 + (Bx + 2Cy + E)^2)^{3/2}}.$$

([3]) Nel calcolo dei determinanti $C_{1,j}$ in $\mathbb{R}$, può essere utile ricordare le proprietà seguenti:

- un determinante e il suo *trasposto* associato hanno lo *stesso* valore;
- se si scambiano tra loro le $n$ *righe* (vettori) $\boldsymbol{a}_j$ di un determinante $n \times n$, disposte inizialmente in allineamento indiciale *discendente*, in modo da ottenerne la ridisposizione *opposta* a quella iniziale, i.e., in allineamento indiciale *ascendente*, il determinante *cambia segno*, rispettivamente, secondo il fattore $(-1)^{n(n-1)/2}$:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}.$$

Il numero $n(n-1)/2$ è il numero *minore* di scambi tra le righe $\boldsymbol{a}_j$ *necessari* per realizzare il re-allineamento completo richiesto.

■

## 7. Coordinate del centro di una conica a-centro

Sia il punto *ordinario* $O' \equiv (\overline{x}; \overline{y})$ il centro della conica $\mathcal{K}$. Per questa ragione, $\mathcal{K}$ viene detta *conica a-centro* e corrisponde, chiaramente, o a un'*ellisse* o a un'*iperbole*. Sia l'equazione canonica (5) di $\mathcal{K}$ a coefficienti *reali*.
Per la determinazione di espressioni generali dei valori $\overline{x}$ e $\overline{y}$, la traslazione in $O'$ del sistema di riferimento è realizzata dall'affinità

$$\begin{cases} x = u + \overline{x} \\ y = v + \overline{y} \end{cases}.$$

Questa, applicata all'equazione (5) di $\mathcal{K}$,

$$A(u+\overline{x})^2 + B(u+\overline{x})(v+\overline{y}) + C(v+\overline{y})^2 + D(u+\overline{x}) + E(v+\overline{y}) + F = 0,$$

dà luogo alla forma implicita trasformata

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + (2A\overline{x} + B\overline{y} + D)u + (B\overline{x} + 2C\overline{y} + E)v + \hookleftarrow$$
$$\hookrightarrow + (A\overline{x}^2 + B\overline{x}\overline{y} + C\overline{y}^2 + D\overline{x} + E\overline{y} + F) = 0. \qquad (22)$$

Ora, una conica a-centro è intrinsecamente simmetrica vs. il suo centro $O'$. In altre parole, poiché $O'$ costituisce la nuova origine di riferimento cartesiano, l'Eq. (22) risulta *invariante* attraverso la simmetria centrale $(u; v) \mapsto (-u; -v)$. Questo implica che l'Eq. (22) sia priva dei termini *lineari*, i.e., che valgano le condizioni

$$\begin{cases} 2A\overline{x} + B\overline{y} + D = 0 \\ B\overline{x} + 2C\overline{y} + E = 0 \end{cases}. \qquad (22.1)$$

Pertanto, la soluzione del sistema (22.1) corrisponde al vettore delle coordinate del centro $O'$ di $\mathcal{K}$ espresse vs. il vecchio sistema di riferimento $xOy$:

$$\boxed{O' \equiv (\overline{x}; \overline{y}) \equiv \left( \frac{2CD - BE}{\Delta}; \frac{2AE - BD}{\Delta} \right)}. \qquad (23)$$

Si osservi che le espressioni (23) implicano che la distanza del centro di una *parabola* da qualsiasi suo punto ordinario è *infinita*, essendo, in questo caso, $\Delta \equiv B^2 - 4AC = 0$.

Se $\mathcal{K}$ corrisponde all'ellisse *complessa* $E$, le coordinate di $O'$ sono comunque *reali*, i.e., $O' \in X \times Y$ ! Inoltre, sostituendo $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$ nell'equazione canonica $E(x, y) = 0$ di $E$, si verifica, significativamente, che $O'$ è un punto *esterno* all'ellisse, i.e., che $E(\overline{x}, \overline{y}) = -\mathcal{Q}\Delta \equiv$ $\equiv -\mathcal{Q}'\Delta' > 0$. Gli invarianti $\mathcal{Q}' \equiv 8A'C'F' \equiv 8a^2b^2F' > 0$ (pertanto, risulta che $F' \neq -a^2b^2$ e $\Delta' \equiv -4A'C' \equiv -4a^2b^2$ sono entrambi riferiti alla rappresentazione *canonica* della conica (cf/c discussione alle P. 7-8).
Analogamente, si verifica che gli assi di un'ellisse *complessa* $E$ sono luoghi di punti *reali esterni* ad $E$ stessa.

■

## 8. Equazioni degli asintoti di un'iperbole

Si supponga che l'Eq. (5), qui di seguito indicata sinteticamente con $H(x,y) = 0$, sia quella di un'iperbole ($\Rightarrow\ \Delta > 0$), i cui asintoti siano posti nella forma esplicita $y = mx + q \equiv y(x)$.

Quanto più è $|x| \gg 1$ tanto meglio il valore $y_P$ dell'ordinata del punto generico $P$ dell'iperbole è approssimato dal valore del binomio $mx_P + q$, essendo $x_P$ il valore dell'ascissa di $P$ mentre $m$ e $q$ sono valori parametrici da determinarsi.
Pertanto, all'Eq. (5) nel regime asintotico $|x| \to +\infty$, corrisponde la quantità *infinitesima*

$$\begin{aligned} H(x,y(x)) &:= Ax^2 + Bx(mx+q) + C(mx+q)^2 + Dx + E(mx+q) + F \ (\approx 0) \\ &= (Cm^2 + Bm + A)x^2 + (2Cmq + Em + Bq + D)x + Cq^2 + Eq + F = o(1)\,, \end{aligned}$$

dal quale, diventando la quantità costante $Cq^2 + Eq + F$ definitivamente *trascurabile* rispetto agli altri due addendi (tra l'altro, $(\ldots)x^2$ è un *infinito* di ordine *superiore* vs. $(\ldots)x$), segue che la rappresentazione asintotica *minimale* dell'Eq. (5),

$$(Cm^2 + Bm + A)x^2 + (2Cmq + Em + Bq + D)x \sim 0\,, \tag{24}$$

è sufficiente per determinare i due valori parametrici $m$ e $q$ che soddisfano, definitivamente $\forall\, x$, le condizioni (asintotiche) *simultanee*

$$\begin{cases} Cm^2 + Bm + A \equiv 0 \\ 2Cmq + Em + Bq + D \equiv 0 \end{cases}. \tag{25}$$

### 8.1. Sia $C \neq 0$.

Le soluzioni formali del sistema (25) sono costituite dai due vettori

$$\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-B \pm \Delta^{1/2}}{2C} \\ \dfrac{-E\Delta^{1/2} \pm (BE - 2CD)}{2C\Delta^{1/2}} \end{pmatrix}.$$

Così, le corrispondenze di segno $+ \rightleftarrows +$ e $- \rightleftarrows -$ consentono di scrivere immediatamente le equazioni degli *asintoti* (*obliqui*) *dell'iperbole*:

$$y = \frac{\Delta^{1/2} - B}{2C}\,x - \frac{E(\Delta^{1/2} - B) + 2CD}{2C\Delta^{1/2}}\,, \tag{26.1}$$

$$y = -\frac{\Delta^{1/2} + B}{2C}\,x - \frac{E(\Delta^{1/2} + B) - 2CD}{2C\Delta^{1/2}}\,. \tag{26.2}$$

### 8.2. Sia $C = 0$.

Allora, il sistema (25) si riduce alla forma lineare

$$\begin{cases} Bm + A = 0 \\ Em + Bq + D = 0 \end{cases},$$

la cui soluzione regolare, espressa dal vettore generale

$$\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A/B \\ (AE - BD)/B^2 \end{pmatrix},$$

individua l'asintoto genericamente *obliquo* (od *orizzontale*, quando $A \equiv 0$),

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{AE - BD}{B^2} \,. \tag{27}$$

L'altro asintoto, *verticale*, è determinabile in corrispondenza di quel valore di $x$ per quale la rappresentazione equivalente esplicita vs. $y$ dell'iperbole,

$$y = -\frac{Ax^2 + Dx + F}{Bx + E} \,, \tag{28}$$

non è definita in $\mathbb{R}$, i.e. (cf/c p. 20), per

$$x = -E/B \,. \tag{28.1}$$

■

---

Per la determinazione delle equazioni degli *assi* dell'iperbole – *bisettrici* tra i suoi asintoti – si veda, e.g., il math-notebook PDF: math-crumbs, p. 21, Eq.i (1) o (10).

## 9. L'Eccentricità dell'Iperbole come invariante geometrico

Senza perdita di generalità, per fissare le idee, si consideri il 1° quadrante cartesiano del sistema di riferimento $xOy$ e l'arco illimitato di iperbole, in rappresentazione canonica

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1\,,$$

contenuto in tale quadrante.
Poi, si considerino il vertice $V \equiv (a\,;0)$ e il fuoco $F \equiv (c\,;0)$ dell'iperbole. Il punto $K \equiv (a\,;b)$ appartiene sia alla circonferenza di centro $O$ e di raggio $OF$ che all'asintoto avente coefficiente angolare $m = b/a \equiv tan\,\alpha$ (v. Fig. 6).

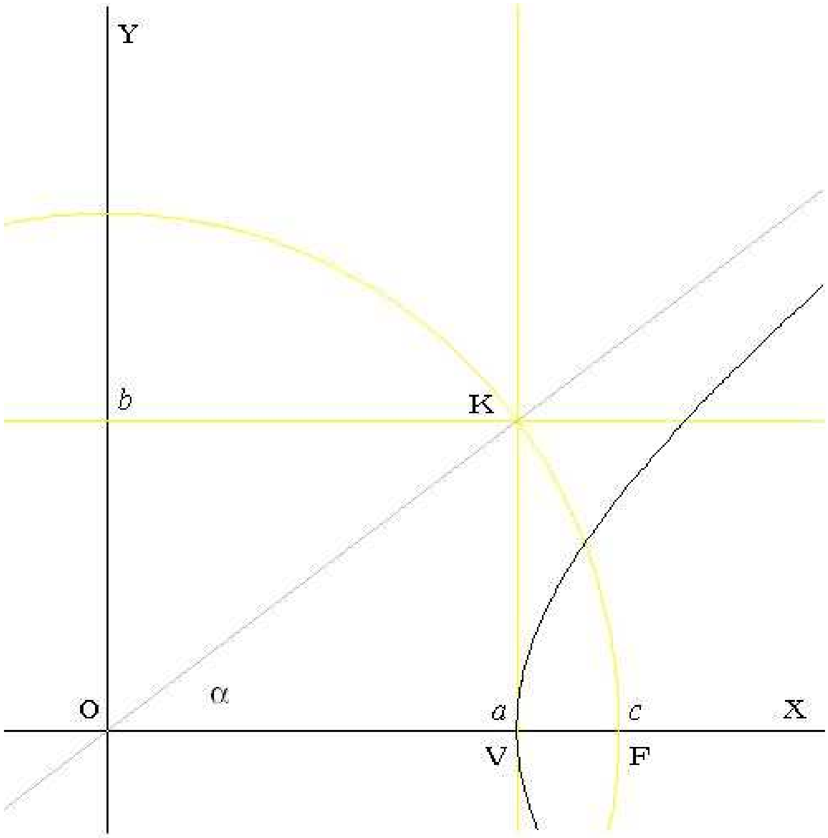



Fig. 6

Dunque, risultano

$$\overline{OV} = a\,, \overline{VK} = b = a\,tan\,\alpha \text{ e } \overline{OK} \equiv \overline{OF} = c = (a^2 + b^2)^{1/2}\,.$$

Da queste uguaglianze, segue immediatamente che

$$\varepsilon = (a^2 + b^2)^{1/2}/a \equiv (1 + (b/a)^2)^{1/2} = (1 + (tan\,\alpha)^2)^{1/2} = sec\,\alpha\,. \tag{41}$$

Tale proprietà è *puramente geometrica*, i.e., non dipende dal sistema di riferimento *ortogonale* in cui sia rappresentata l'iperbole: semplicemente, essa esprime una relazione *generale invariante* tra l'eccentricità $\varepsilon$ dell'iperbole e l'angolo *acuto*, di ampiezza $\alpha$, tra ciascun degli asintoti e l'asse *trasverso*.

■

## 10. L'Iperbole Omografica rettangolare

L'equazione algebrica implicita

$$pxy - rx + qy - s = 0, \tag{29}$$

con $\{p, q, r, s\} \in \{\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^3\}$, rappresenta un'iperbole, come è immediato verificare dal segno del suo discriminante: $\Delta \equiv p^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = p^2 > 0$. L'eventuale degenerazione della conica nei suoi asintoti corrisponde all'annullamento dell'*invariante cubico* (cf/c Eq. (18))

$$\mathcal{Q} := \begin{vmatrix} 0 & p & -r \\ p & 0 & q \\ -r & q & -2s \end{vmatrix} = 2p(ps - qr), \tag{30}$$

i.e., all'eventualità che $ps = qr$.

Esplicitando l'Eq. (29) vs. $y$, si ottiene la rappresentazione della cosiddetta *funzione omografica rettangolare*,

$$y = \frac{rx + s}{px + q}. \tag{31.1}$$

Le caratteristiche di tale iperbole sono messe in evidenza mediante divisione polinomiale:

$$y \equiv \frac{r}{p} + \frac{s - qr/p}{p(x + q/p)} \equiv \frac{r}{p} + \frac{k}{x + q/p}, \tag{31.2}$$

dove si è posto

$$k := \frac{ps - qr}{p^2} \equiv \frac{\mathcal{Q}}{2p^3}. \tag{32}$$

Poiché l'Eq. (31.1) equivale alla scrittura $y - \dfrac{r}{p} = \dfrac{k}{x + q/p}$, con la traslazione

$$\begin{cases} u = x - q/p \\ v = y - r/p \end{cases},$$

si trova l'equazione trasformata

$$v = k/u, \tag{33}$$

che è quella di un'*iperbole equilatera* riferita al sistema $uO'v$ dei suoi asintoti (v. Fig. 5).

Le equazioni degli *asintoti*, orizzontale e verticale, si determinano calcolando, dall'Eq. (26) o dall'Eq. (32), rispettivamente, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = (r/p)^{\pm}$ e $\lim\limits_{x \to -(q/p)^{\pm}} y(x) = \pm\infty$, precisando con cura i versi di tendenza al punto di accumulazione (i.e., se per difetto o per eccesso).

Evidentemente, risultano le equazioni

$$\begin{cases} y = r/p \\ x = -q/p \end{cases}. \tag{34}$$

Il *centro* $O'$ dell'iperbole è il punto di intersezione tra gli asintoti: $O' \equiv (\bar{x}; \bar{y}) \equiv (-q/p; r/p)$; i punti di intersezione della conica con gli assi sono $(-s/r; 0)$ e $(0; s/q)$.

Comunque, il segno di $k$ specifica la posizione dei rami dell'iperbole nei quadranti appropriati del piano $U \times V$ .

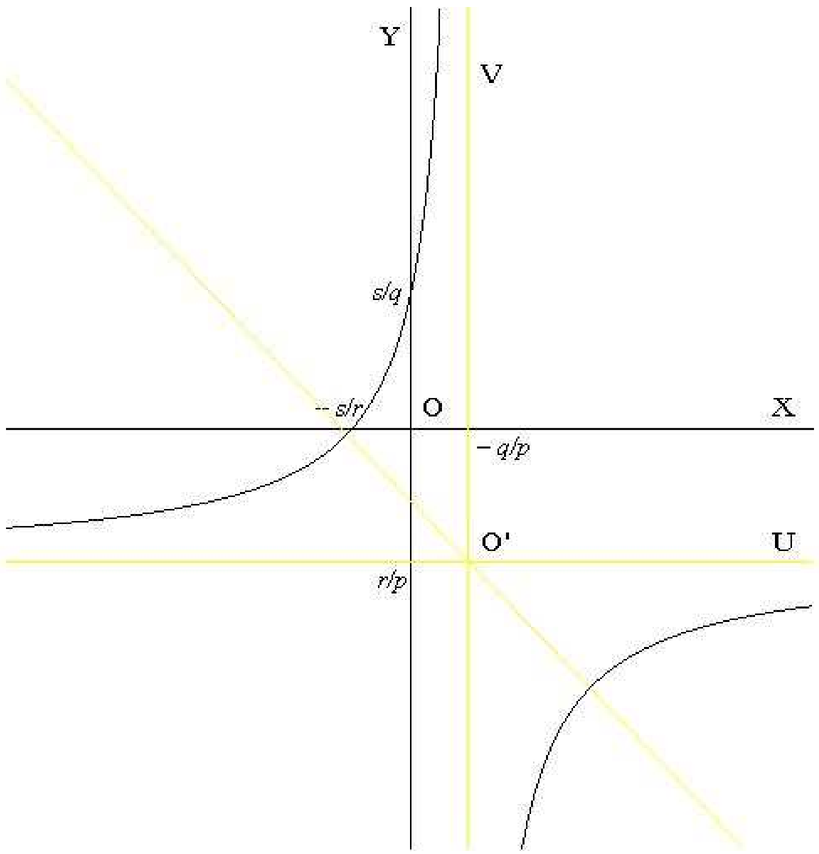



Fig. 5

Gli *assi* dell'iperbole sono paralleli alle bisettrici dei quadranti e passano per $O'$. Quindi, dalla specificazione dei coefficienti angolari, $\dfrac{y - r/p}{x + q/p} = \pm 1$, seguono le equazioni degli assi,

$$y = \pm x + \frac{r \pm q}{p} \; , \tag{35}$$

Ora, per stabilire quale dei due assi sia quello *trasverso*, basta osservare che, secondo che si abbia $k \gtrless 0$, l'equazione corretta è, rispettivamente,

$$y = \sigma x + \frac{r + \sigma q}{p} \; , \tag{35.1}$$

avendo definito, per brevità, $\sigma := sgn k \equiv sgn(ps - qr)$.

Le coordinate dei *vertici*, indicando l'uno o l'altro con $V$ , si determinano intersecando l'iperbole omografica con il suo asse trasverso,

$$\begin{cases} y = \dfrac{rx + s}{px + q} \\ y = \sigma x + \dfrac{r + \sigma q}{p} \end{cases} . \tag{36}$$

Scartando il caso degenere $k \equiv 0$ nelle Eq. (36), si arriva all'equazione risolvente:

$$\sigma p x^2 + 2\sigma q x + \sigma (q^2/p) = (ps - qr)/p\,,$$

i.e., contraendo il quadrato evidente a sinistra, a

$$\sigma (x + q/p)^2 \equiv k$$

e, infine, a

$$(x + q/p)^2 = |k|\,. \tag{37}$$

L'Eq. (37) fornisce immediatamente i valori delle *ascisse* dei vertici,

$$x_V = \pm |k|^{1/2} - q/p\,; \tag{38.1}$$

introducendo tali valori nell'equazione dell'asse trasverso, si calcolano le *ordinate* associate,

$$y_V = \pm\sigma \pm |k|^{1/2} + q/p\,. \tag{38.2}$$

Poiché la funzione omografica discussa è un'iperbole *equilatera*, la sua eccentricità $\varepsilon$ vale $2^{1/2}$. Inoltre, il centro, i vertici e i fuochi sono allineati.
Quindi, per il *Teorema di Talete* applicato alla coppia delle rette del riferimento cartesiano e all'asse trasverso, si ha, per l'uno o l'altro fuoco, $F$,

$$\frac{\overline{O'F}}{\overline{O'V}} \equiv \varepsilon = 2^{1/2} = \begin{cases} \dfrac{x_F - \overline{x}}{x_V - \overline{x}} \\[2ex] \dfrac{y_F - \overline{y}}{y_V - \overline{y}} \end{cases}, \tag{39}$$

da cui, si ottengono i valori associati delle coordinate dei *fuochi*,

$$\begin{cases} x_F = \overline{x} + 2^{1/2}(x_V - \overline{x}) = \pm(2|k|)^{1/2} - q/p \\ y_F = \overline{y} + 2^{1/2}(y_V - \overline{y}) = \pm\sigma(2|k|)^{1/2} + r/p \end{cases}. \tag{40}$$

■

## 11. L'iperbole Omografica obliqua

Una funzione del tipo

$$x \mapsto f(x) := \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}, \tag{42}$$

quando sia $X \times Y$, rappresenta un'*iperbole roto-traslata* (v. Fig. 7), come è immediato verificare riscrivendo l'Eq. (42) nella forma implicita equivalente, per $x \neq -q/p$,

$$ax^2 - pxy + bx - qy + c = 0 \tag{43}$$

e controllando il segno del discriminante di quest'ultima, $\Delta \equiv (-p)^2 - 4 \cdot a \cdot 0 = p^2 > 0$.
Dunque, l'Eq. (42) implica che la conica possiede un asintoto *verticale* di equazione $x = -q/p$. Per la determinazione dell'equazione dell'altro asintoto, evidentemente *obliquo*, si può eseguire la divisione polinomiale espressa dall'Eq. (42), scrivendo

$$y = \mu x - \alpha - \omega(x), \tag{44}$$

dove,

$$\mu := a/p, \qquad \alpha := (aq - bp)/p^2, \qquad \omega(x) := k/(x + q/p),$$

con $k := -(c + \alpha q)/p$, e riconoscere la *parte lineare* della rappresentazione (44) come *dominante* quando $x \to \pm\infty$:

$$y \sim \mu x - \alpha. \tag{45}$$

Il calcolo dei limiti $\lim_{x \to (-q/p)^{\pm}} \omega(x) = \mp\infty$ consente di stabilire in quale delle due coppie di regioni simmetriche rispetto al suo centro, $O' \equiv (\bar{x}; \bar{y})$, siano situati i rami dell'iperbole (non-degenere).
Le coordinate di $O'$, ottenibili dall'Eq. (23) o dall'intersezione dei due asintoti, risultano

$$(\bar{x}; \bar{y}) \equiv (-q/p; p - 2aq/p^2).$$

Gli *assi* dell'iperbole sono le *bisettrici* degli angoli tra gli asintoti. Se $(x; y)$ rappresenta il punto generico appartenente all'uno o all'altro asse-bisettrice, allora le equazioni preliminari di questi si determinano nelle forme

$$|x + q/p| = \frac{|y - \mu x + \alpha|}{(1 + \mu^2)^{1/2}}, \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{y - \mu x + \alpha}{(1 + \mu^2)^{1/2}} = \pm(x + q/p).$$

Quindi, definito $M := (1 + \mu^2)^{1/2}$, si deducono le equazioni delle rette *reciprocamente ortogonali*

$$\left.\begin{aligned} y &= (\mu + M)x - \alpha + (q/p)M \equiv m_1 x + \beta_1 \\ y &= (\mu - M)x - \alpha - (q/p)M \equiv m_2 x + \beta_2 \end{aligned}\right\}. \tag{46}$$

Essendo evidente che $m_1 > 0$ mentre $m_2 < 0$, $\forall \{a, p\}$ ammissibile, risulta alternativamente, per l'equazione dell'*asse trasverso* dell'iperbole,

$$\begin{cases} y = m_1 x + \beta_1 \\ y = m_2 x + \beta_2 \end{cases}, \quad \text{secondo che sia, rispettivamente,} \quad \begin{cases} k < 0 \\ k > 0 \end{cases}.$$

L'ampiezza $\varphi \lessgtr 0$ dell'angolo *acuto* tra l'asse trasverso dell'iperbole e il versore $\hat{x}$ dell'asse di riferimento $X$ si trova immediatamente essere l'uno o l'altro dei valori

$$\varphi = \begin{cases} tan^{-1} m_1 \equiv tan^{-1}(\mu + M), & \text{se } k < 0 \\ tan^{-1} m_2 \equiv tan^{-1}(\mu - M), & \text{se } k > 0 \end{cases} . \tag{47}$$

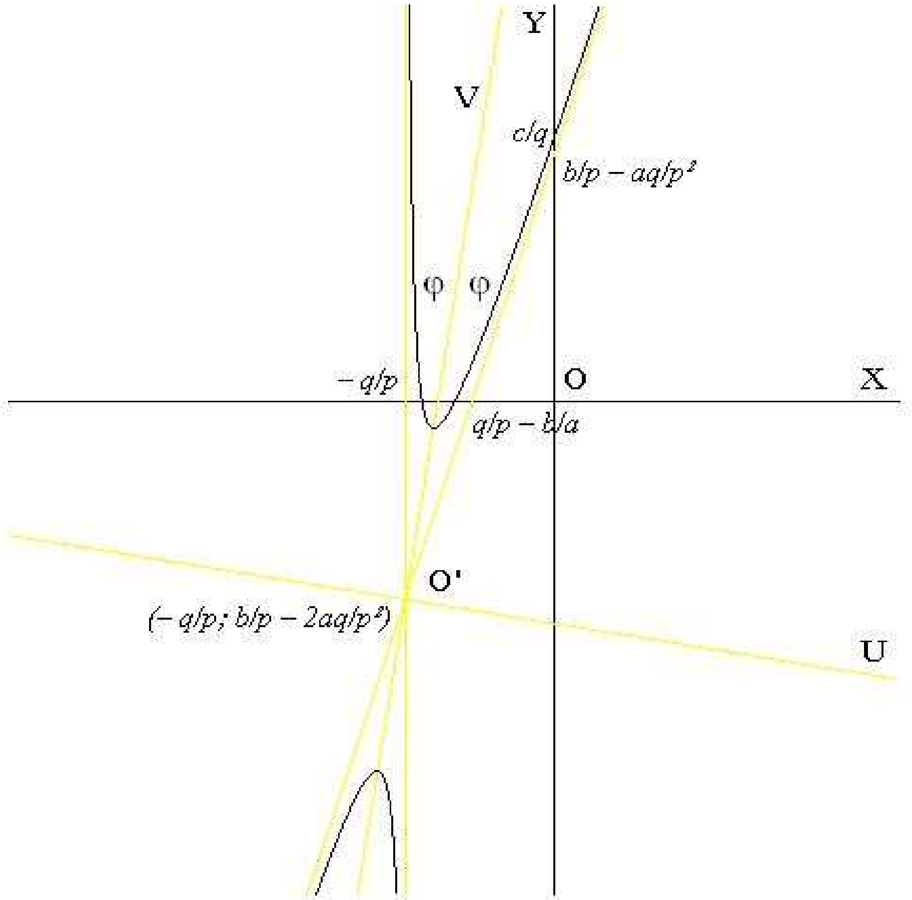



Fig. 7

Se $y = mx + \beta$ è l'equazione dell'*asse trasverso* dell'iperbole, allora il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q} \\ y = mx + \beta \end{cases} \tag{48}$$

è soddisfatto dalle due coppie dei valori delle coordinate dei *vertici*. Eliminando $y$ tra le equazioni (48), si ottiene l'equazione risolvente

$$(a - mp)x^2 + (b - \beta p - mq)x + c - \beta q = 0, \tag{48.1}$$

che, riscritta *coerentemente* con le quantità *alternative* $m \equiv m_{1 \vee 2} := \mu \pm M$, Eq.i (47), e in termini dei parametri originari, equivale, *nell'ordine*, all'una o all'altra delle equazioni

$$x^2 \mp 2(q/p)x + \frac{aq^2 - bpq + cp^2}{p|p|(a^2 + p^2)^{1/2}} \mp \frac{q^2}{p^2} = 0. \tag{48.2}$$

Le radici di entrambe le Eq.i (48.1) e (48.2), $x_{V_1}$ e $x_{V_2}$, sono le *ascisse* dei vertici dell'iperbole. Le *ordinate* corrispondenti, $y_{V_1} \equiv mx_{V_1} + \beta$ e $y_{V_2} \equiv mx_{V_2} + \beta$, si calcolano dall'equazione lineare nel Sistema (48).

L'*invariante cubico* dell'iperbole omografica obliqua è deducibile dalla forma implicita (43):

$$\mathcal{Q} := \begin{vmatrix} 2a & -p & b \\ -p & 0 & -q \\ b & -q & 2c \end{vmatrix} = 2(bpq - aq^2 - cp^2) \equiv -2(cp^2 + q(aq - bp))$$

$$\equiv -2(cp^2 + q\alpha p^2) = -2(c + q\alpha)p^2 \equiv 2kp \cdot p^2 = 2kp^3. \tag{49.1}$$

Così, il risultato, coerente con l'Eq. (32),

$$\boxed{k = \frac{\mathcal{Q}}{2p^3}}, \tag{49.2}$$

appare tutt'altro che accidentale. Infatti, la degenerazione $(\mathcal{Q} \equiv 0)$ eventuale dell'iperbole *nei suoi asintoti* corrisponde a $k \equiv 0$ e, quindi, a $\omega(x) \equiv 0$ (cf/c le Eq.i (44) e (45)).

Per determinare un'espressione dell'*eccentricità* $\varepsilon$ della conica, indicata con $\theta := \pi/2 - |\varphi|$ la misura *assoluta* dell'angolo *acuto* compreso tra il semi-asse trasverso e l'asintoto verticale, si ha, dall'Eq. (41),

$$\boxed{\varepsilon =} (1 + (tan\,\theta)^2)^{1/2} \equiv (1 + (tan(\pi/2 - |\varphi|)^2)^{1/2} \equiv (1 + (cot\,\varphi)^2)^{1/2}$$

$$= (1 + (cot(tan^{-1}(\mu \pm M)))^2)^{1/2}, \qquad \text{dalle Eq.i (46),}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{(\mu \pm M)^2}\right)^{1/2} \equiv \boxed{\begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{(\mu + M)^2}\right)^{1/2}, & \text{se } k < 0 \\ \left(1 + \dfrac{1}{(\mu - M)^2}\right)^{1/2}, & \text{se } k > 0 \end{cases}}, \tag{50}$$

tenuto conto delle Eq.i (47).
Infine, come per l'iperbole omografica *rettangolare*, una volta trovate le coordinate dei vertici dell'iperbole omografica *obliqua*, se ne determinano le coordinate dei *fuochi*, quelle del centro e l'eccentricità $\varepsilon\ (> 1)$ sfruttando il *Teorema di Talete* (cf/c le Eq.i (39) e (40)) applicato alla coppia delle rette del riferimento cartesiano e all'asse trasverso. Risultano

$$\boxed{\begin{cases} x_F = \bar{x} + \varepsilon(x_V - \bar{x}) \\ y_F = \bar{y} + \varepsilon(x_V - \bar{y}) \end{cases}}. \tag{51}$$

Le formule (50) si riferiscono, ovviamente, *all'uno o all'altro* ramo dell'iperbole.

■

## 12. Equazione di una retta tangente a una conica generica

La determinazione dell'equazione della retta tangente a una conica $\mathcal{K}$ generica in un punto $P \equiv (x_0; y_0)$ comune a entrambe è un problema fondamentale e classico dell'Analisi Matematica ma può essere ricondotto a un problema algebrico di 2º grado corrispondente al sistema risolvente

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases} \tag{52}$$

dell'Eq. implicita (5) di $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}(x, y)$ e di quella del fascio proprio di rette con supporto in $P$.
Il procedimento, elementare e ben noto, consiste nell'individuazione delle radici, necessariamente identiche, $m_1 \equiv m_2$, dell'equazione $\Delta_r(m) = 0$, essendo $\Delta_r(m)$ il trinomio di 2º grado, nella variabile $m$, che costituisce il *discriminante* dell'equazione parametrica *risolvente* equivalente al sistema (52). In altri termini, se $P \in \mathcal{K}$, ciò implica che $\Delta_r(m)$ è un *trinomio quadratico perfetto*. Così, la soluzione algebrica *doppia* rappresenta la congruenza-limite di *due* rette passanti per $\mathcal{Q} \equiv 0$ e costituenti, insieme, una *singola* retta tangente a $\mathcal{K}$ in $P$ stesso.
È chiaro che tale corrispondenza algebrico-geometrica non dipende dal sistema rappresentativo specifico di riferimento cartesiano ortogonale. Pertanto, anche nel caso generale dell'Eq. (5), l'unicità (geometrica) della retta tangente a $\mathcal{K}$ in un suo punto $P$ deve corrispondere, comunque, alla *duplicità* sia di $x_0$ che di $y_0$ come coordinate-soluzione che verificano il sistema parametrico (52) o l'equazione risolvente equivalente associata.

Comunque, per coerenza con la presentazione dell'argomento del paragrafo successivo, conviene sviluppare un procedimento alternativo.

L'appartenenza di $P$ alla conica $\mathcal{K}$ implica l'identità

$$Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0,$$

dalla quale, il sistema generale (52) può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + \cancel{F} = Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + \cancel{F} \\ y = m(x - x_0) \end{cases},$$

e, quindi, con raccoglimenti evidenti nell'equazione quadratica,

$$\begin{cases} A(x^2 - x_0^2) + B(xy - x_0y_0) + C(y^2 - y_0^2) + D(x - x_0) + E(y - y_0) = 0 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}. \tag{53}$$

Poi, per l'*identità* $xy - x_0y_0 \equiv (x - x_0)(y - y_0) + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0)$, il sistema (53) diventa

$$\begin{cases} A(x - x_0)(x + x_0) + B[(x - x_0)(y - y_0) + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0)] + \\ \qquad\qquad + C(y - y_0)(y + y_0) + D(x - x_0) + E(y - y_0) = 0 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}. \tag{54}$$

Eliminando il termine $y - y_0$ tra le equazioni del sistema (54), si ottiene l'equazione risolvente, *equivalente* al sistema (52) originario,

$$(x - x_0)(A(x + x_0) + Bm(x - x_0) + By_0 + Bmx_0 + Cm(y + y_0) + D + Em) = 0. \tag{55}$$

Poiché la condizione di *tangenza* in $P$ richiede che il *vettore* $(x_0 \quad y_0)$ sia soluzione *doppia* dell'Eq. risolvente (55), allora, tale vettore, oltre ad annullare il fattore *lineare* $(x - x_0)$, deve annullare, *necessariamente*, anche l'altro fattore, *lineare* vs. $x$ e $y$, nella stessa equazione; detto in linguaggio più elementare, per il punto $(x\,;y) \equiv (x_0\,;y_0)$, *deve* valere l'identità

$$(A(x+x_0)+Bm(x-x_0)+By_0+Bmx_0+Cm(y+y_0)+D+Em)\Big|_{(x;\,y)\,\equiv\,(x_0;\,y_0)} =$$
$$= 2Ax_0+By_0+Bmx_0+2Cmy_0+D+Em \equiv 0\,.$$

Da questa, si ricava il coefficiente angolare $m \equiv m(x_0, y_0)$ della retta tangente a $\mathcal{K}$ in $P$,

$$m = -\frac{2Ax_0+By_0+D}{Bx_0+2Cy_0+E} \equiv y'(x_0) \left( \equiv -\frac{\partial\mathcal{K}(x,y)/\partial x}{\partial\mathcal{K}(x,y)/\partial y}\Bigg|_{(x_0;\,y_0)} \right), \tag{56}$$

con il quale, si scrive l'equazione esplicita della retta tangente cercata,

$$y = -\frac{2Ax_0+By_0+D}{Bx_0+2Cy_0+E}(x-x_0)+y_0\,. \tag{57.1}$$

La forma implicita corrispondente all'Eq. (57.1) è

$$(2Ax_0+By_0+D)(x-x_0)+(Bx_0+2Cy_0+E)(y-y_0) = 0\,. \tag{57.2}$$

Eseguendo i prodotti contenuti nell'Eq. (57.2), aggiungendo ai termini risultanti la quantità *nulla* $0 \equiv Dx_0 - Dx_0 + Ey_0 - Ey_0$ e raccogliendo gli addendi vs. i coefficienti $A, B, C, D, E, F$, risulta

$$2Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+2Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)- \hookleftarrow$$
$$\Lsh -2(Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0) = 0\,. \tag{57.3}$$

Infine, osservata l'identità $Ax_0^2+Bx_0y_0+Dx_0+Ey_0 \equiv -F$, dividendo per 2 i membri dell'Eq. (57.3), si arriva alla cosiddetta **forma di sdoppiamento** della retta tangente a $\mathcal{K}$ in $P$,

$$Ax_0x+B\,\frac{y_0x+x_0y}{2}+Cy_0y+D\,\frac{x+x_0}{2}+E\,\frac{y+y_0}{2}+F = 0\,. \tag{58}$$

Il risultato formale è interessante: quando $P \equiv (x_0\,;y_0) \in \mathcal{K}$ è noto, l'Eq. (58) può sempre essere dedotta dall'Eq. fondamentale (5) – e viceversa – mediante le corrispondenze mnemoniche di *media*:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{quadratico-geometrica:} & x^2 \rightleftarrows x_0x\,, & xy \rightleftarrows \frac{1}{2}(y_0x+x_0y)\,, & y^2 \rightleftarrows y_0y\,, \\ \text{lineare-algebrica:} & x \rightleftarrows \frac{1}{2}(x+x_0)\,, & y \rightleftarrows \frac{1}{2}(y+y_0)\,. & \end{array}\right\} \tag{59}$$

■

## 13. Equazione della retta polare di un punto vs. una conica generica

La breve discussione che segue è rivolta al caso di un punto $P \equiv (x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$, detto *polo*, *non-interno* a una conica generica $\mathcal{K}$ di equazione (5) a coefficienti reali, i.e., tale che, da esso, siano tracciabili *due e due sole rette reali* tangenti a $\mathcal{K}$, *distinte* (*ma non parallele*) o *coincidenti* (si ricordi che il sistema (52) è di 2° grado!).

□

Per fissare le idee, siano $t_Q$ e $t_S$ le due rette *distinte* tangenti a $\mathcal{K}$ condotte da $P$ *esterno* a $\mathcal{K}$ e siano $Q \equiv (x_1; y_1)$ e $S \equiv (x_2; y_2)$ i punti di tangenza rispettivi.

La retta passante per $Q$ e $S$ (v. Fig. 8), qui di seguito indicata come $r_{QS}$, è detta **polare** del punto $P$ vs. $\mathcal{K}$ e la sua equazione si scrive immediatamente nella forma fondamentale

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} . \tag{60}$$

L'Eq. (58) dà le equazioni di $t_Q$ e di $t_S$ immediatamente (forme di *sdoppiamento*),

$$t_Q: \quad Ax_1x + B\frac{y_1x+x_1y}{2} + Cy_1y + D\frac{x+x_1}{2} + E\frac{y+y_1}{2} + F = 0, \qquad \text{ovvero,}$$

$$t_Q: \quad (2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0, \tag{61}$$

e $$t_S: \quad Ax_2x + B\frac{y_2x+x_2y}{2} + Cy_2y + D\frac{x+x_2}{2} + E\frac{y+y_2}{2} + F = 0, \qquad \text{ovvero,}$$

$$t_S: \quad (2Ax_2 + By_2 + D)x + (Bx_2 + 2Cy_2 + E)y + Dx_2 + Ey_2 + 2F = 0. \tag{62}$$

Ora, poiché i valori delle coordinate di $P$ devono soddisfare entrambe le Eq.i implicite (61) e (62), se si sottraggono tra loro membro a membro le identità seguenti:

$$\begin{cases} (2Ax_1 + By_1 + D)x_0 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_0 + Dx_1 + Ey_1 + 2F \equiv 0 \\ (2Ax_2 + By_2 + D)x_0 + (Bx_2 + 2Cy_2 + E)y_0 + Dx_2 + Ey_2 + 2F \equiv 0 \end{cases},$$

si ottiene

$$(2Ax_0 + By_0 + D)(x_2 - x_1) + (Bx_0 + 2Cy_0 + E)\,(y_2 - y_1) = 0$$

e, da questa, il rapporto

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{2Ax_0 + By_0 + D}{Bx_0 + 2Cy_0 + E} \equiv m . \tag{63}$$

Il risultato espresso dall'Eq. (63) indica che il coefficiente angolare in corrispondenza di $\overline{x}$ è, formalmente, *identico* a quello rappresentato dall'Eq. (56).

D'altra parte, è elementare osservare che l'equazione della retta passante per $P$ e parallela a $r_{QS}$ ha come espressione $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$, i.e., dall'Eq. (63),

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = -\frac{2Ax_0 + By_0 + D}{Bx_0 + 2Cy_0 + E} . \tag{64}$$

Infine, mediante l'Eq. (57.3), l'Eq. (64) può essere posta nelle forme equivalenti

$$Ax_0x + B\frac{y_0x + x_0y}{2} + Cy_0y + D\frac{x + x_0}{2} + E\frac{y + y_0}{2} + F = 0,$$

ovvero,

$$(2Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + 2Cy_0 + E)y + Dx_0 + Ey_0 + 2F = 0, \tag{66}$$

fornendo la conclusione evidente:

*Le rappresentazioni* (65) *e* (66) *sono quelle della retta polare di* $P$ *rispetto alla conica* $\mathcal{K}$ *o della retta tangente a* $\mathcal{K}$ *in* $P$ *secondo che* $P$ *è* **esterno** *o* **appartiene** *a* $\mathcal{K}$.

I risultati formali espressi dalle Eq.i (66), (61) e (62) consentono di risolvere immediatamente il problema generale inverso della

*determinazione delle equazioni delle rette tangenti a una conica* $\mathcal{K}$, *avente equazione assegnata di tipo* (5)*, e appartenenti al fascio proprio di rette con supporto in* $P \equiv (x_0; y_0)$, *esterno a* $\mathcal{K}$:

1. si risolve il sistema delle equazioni di $\mathcal{K}$ e della retta polare di $P$ vs. $\mathcal{K}$,

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ (2Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + 2Cy_0 + E)y + Dx_0 + Ey_0 + 2F = 0 \end{cases},$$

   ottenendo le coordinate dei due punti di intersezione, $Q \equiv (x_1; y_1)$ e $S \equiv (x_2; y_2)$;

2. si determinano le equazioni delle rette tangenti a $\mathcal{K}$ in $Q$ e in $S$ mediante le Eq.i (61) e, rispettivamente, (62).

Chiaramente, se $Q \equiv S$, allora, $P \in \mathcal{K}$.

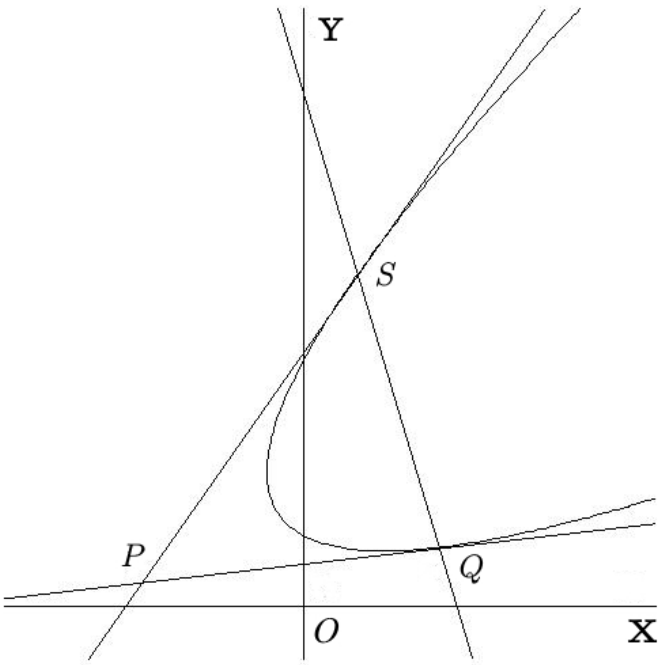



Fig. 8

■

## 14. La $\mathcal{N}$-rappresentazione polare-piana di una conica generica

La rappresentazione polare-piana, $\{\varphi, \rho\} \equiv [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_0^+$, nello studio delle sezioni coniche non fornisce, semplicemente, una modalità alternativa (talvolta, più agevole e trasparente del Sistema Rettangolare) per la deduzione di proprietà geometriche interessanti ma apre la strada a modelli applicativi di importanza fondamentale, e.g., nella Meccanica Analitica e, soprattutto, nella Teoria Classica (Newtoniana) delle Orbite in campi di *forze centrali* $\propto R^{-2} \equiv \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|^{-2}$.

Si considerino due rette *ortogonali*, $\alpha$ e $\delta$, e sia $F \in \alpha$, con $F \not\equiv \alpha \cap \delta$, un punto ordinario.

**Definizione**

Una *sezione conica* $\mathcal{K}$ del piano $\alpha \times \delta$ (euclideo-cartesiano) è il *luogo* di punti generici $P$, per i quali, il *rapporto* $\varepsilon$ delle distanze da $F$ e da $H \in \delta$ (Fig. 9) è *isometricamente invariante*:

$$(0 \leq)\ \varepsilon := \overline{PF}/\overline{PH} \lesseqgtr 1. \ \blacktriangle \tag{67}$$

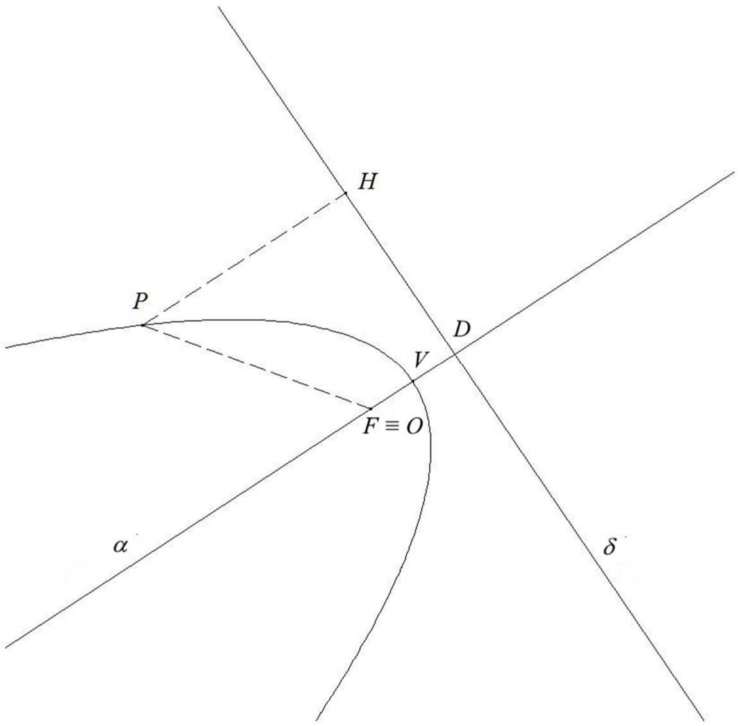



Fig. 9

La retta $\alpha$ costituisce l'*asse principale di simmetria* di $\mathcal{K}$, $F$ è il *fuoco* associato alla retta *direttrice* $\delta$ mentre il rapporto invariante $\varepsilon$ fornisce l'*eccentricità* di $\mathcal{K}$.

Ora, risulta cruciale introdurre il sistema di riferimento duplice *polo-rettangolare*, nel piano $\alpha \times \delta$, facendo *coincidere* sia il polo che l'origine cartesiana, entrambi detti $O$, con il *fuoco* $F$ di $\mathcal{K}$, mentre, l'*asse polare* e l'*asse cartesiano* $X$ delle ascisse vengono scelti *congruenti* con la retta $\alpha$ di simmetria di $\mathcal{K}$. Tale sistema *ortogonale* sarà indicato come il *Riferimento Newtoniano* (o, più brevemente, il riferimento '$\Sigma_{\mathcal{N}}$') *associato a* $\mathcal{K}$.

Considerando la Fig. 10, la Definizione generale (67) di *sezione conica* nel suo $\Sigma_{\mathcal{N}}$ si riscrive, per un punto $P$ qualsiasi di $\mathcal{K}$,

$$\overline{OP} = \varepsilon \overline{PH}. \tag{67.1}$$

Quando $\phi = \pi/2$, i.e., $P \equiv M$, allora, $OP \equiv OM \wedge PH \equiv MK$, in modo che la proporzionalità *generale* (67.1) assume la rappresentazione equivalente *normale*

$$(\overline{OP} \equiv)\ \overline{OM} = \varepsilon \overline{MK} \equiv \varepsilon \overline{OD}. \tag{67.2}$$

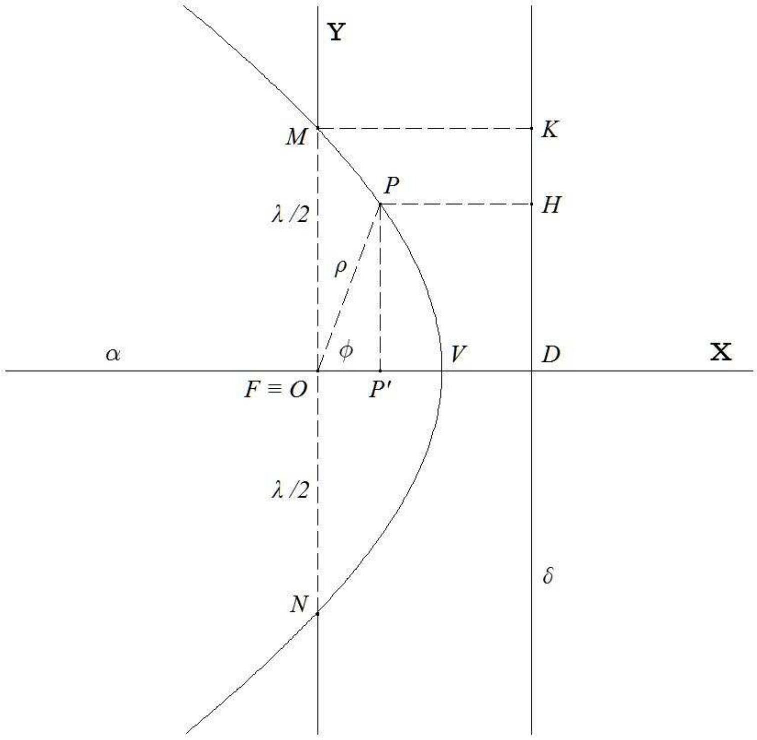



Fig. 10

D'altra parte, si ha che

$$\begin{aligned} \overline{MK} &= \overline{OP'} + \overline{PH} = \overline{OP}\cos\phi + \overline{OP}/\varepsilon, \qquad \text{dall'Eq. (67.1),} \\ &= (\overline{OP}/\varepsilon)(1 + \varepsilon\cos\phi). \end{aligned} \tag{68}$$

Eliminando $\overline{MK}$ tra la prima delle uguaglianze (67.2) e (68) e risolvendo vs. $\overline{OP}$, si ottiene

$$OP = \frac{\overline{OM}}{1 + \varepsilon\cos\phi} \equiv \frac{\overline{MN}/2}{1 + \varepsilon\cos\phi}. \tag{69}$$

Chiaramente, $\overline{OP} = \rho$ è la coordinata polare *radiale* (variabile con $P$) mentre il segmento $MN$ è il '*latus rectum*' di $\mathcal{K}$, associato agli elementi-base $\alpha$, $\delta$ e $F$, i.e., è la corda di $\mathcal{K}$ *ortogonale* all'asse $\alpha$ in $F$ e, quindi, *parallela* a $\delta$.

Dette $\lambda := \overline{MN}$ e $\zeta := \overline{OD}$, rispettivamente, la lunghezza del *latus rectum* e la distanza tra questo e la retta direttrice $\delta$, l'equazione piano-polare *generale* di una sezione conica nel suo sistema di riferimento $\Sigma_{\mathcal{N}}$ si scrive, dall'Eq. (67.2),

$$\rho = \frac{\lambda/2}{1 + \varepsilon\cos\phi} \equiv \frac{\varepsilon\zeta}{1 + \varepsilon\cos\phi} = \rho(\phi), \tag{70}$$

che è una rappresentazione *equivalente* dello *stesso* luogo geometrico descritto dall'Eq. (5).

La questione della classificazione di una sezione conica dipende dal valore assunto da $\varepsilon$. A livello elementare, ci si può appoggiare alle proprietà di *invarianza isometrica* dei parametri (positivi) che compaiono nelle equazioni standard delle sezioni coniche in rappresentazione cartesiana.

- Facendo riferimento alla Fig. 10, si faccia l'ipotesi che il tratto di sezione conica mostrato sia quello di un'*ellisse*, con l'asse maggiore traslato lungo l'asse $X$ così da far coincidere il fuoco *destro* con l'origine. Allora, l'equazione di tale ellisse è del tipo

$$(x-c)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \tag{71}$$

con $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$, senza perdita di generalità. La determinazione della lunghezza del *latus rectum* si esegue elementarmente, imponendo $x \equiv 0$ nell'Eq. (71). Risulta

$$0 < \lambda \equiv 2y_F = 2b\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{1/2} \equiv 2b\,\frac{(a^2-c^2)^{1/2}}{a} = \frac{2b^2}{a}\ , \tag{71.1}$$

dove, dall'Eq. (70), è evidente che deve essere $\varepsilon := c/a \in [0, 1)$.
Pertanto, l'equazione polare di un'*ellisse* nel suo riferimento $\Sigma_N$ si scrive

$$\boxed{\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}}\ , \tag{72}$$

essendone $a$ la misura del *semi-asse maggiore*.
Quando $\varepsilon = 0$, l'Eq. (70) (o (72)) si riduce alla forma

$$\rho = \lambda/2 \equiv a = \text{costante},$$

che rappresenta una *circonferenza*.

- Analogamente, si supponga che la Fig. 10 mostri una porzione del ramo sinistro di un'*iperbole*, con l'asse trasverso traslato lungo l'asse $X$ in modo tale da far coincidere il fuoco *sinistro* con l'origine. Allora, l'equazione di tale iperbole è del tipo

$$(x-c)^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \tag{73}$$

con $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$, come per l'ellisse. Il calcolo della lunghezza del *latus rectum* si esegue prontamente, imponendo $x \equiv 0$ nell'Eq. (73). Risulta

$$0 < \lambda \equiv 2y_F = 2b\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)^{1/2} \equiv 2b\,\frac{(c^2-a^2)^{1/2}}{a} = \frac{2b^2}{a}\ , \tag{73.1}$$

dove, dall'Eq. (70), è evidente che deve essere $\varepsilon = c/a \in (1, +\infty)$.
Quindi, l'equazione piano-polare di un'*iperbole*, nel suo sistema $\Sigma_N$ si scrive (cf/c l'Eq. (72)),

$$\boxed{\rho = \frac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos\phi}}\ , \tag{74}$$

essendo $a$ la misura del *semi-asse trasverso* (i.e., la semi-distanza tra i vertici) dell'iperbole.

### Esercizio

Si verifichi l'esistenza dell'*invariante geometrico* associato, valido per *entrambe* le classi di coniche *a centro*,

$$\boxed{\overline{FD} \equiv \overline{OD} \equiv \zeta = \frac{2b^2}{c}}\ . \tag{75}$$

- Nel caso in cui la Fig. 10 corrisponda a una *parabola* con la sua retta direttrice, allora, dalla definizione standard, devono valere le *congruenze* $OM \doteqdot MK$, $OV \doteqdot VD$, etc. . Detto con altre parole, deve aversi $OP \doteqdot PH$, $\forall\,\phi$. Da ciò, segue che $\varepsilon = 1$, così che l'equazione generale di una parabola nel suo sistema polare $\Sigma_N$ si scrive

$$\rho = \frac{\lambda/2}{1+\cos\varphi} . \tag{76}$$

Poiché è $F \equiv O$, l'equazione *cartesiana* della parabola *concava* mostrata è *sempre* del tipo

$$x = -\eta y^2 + \frac{1}{4\eta} , \tag{76.1}$$

con $\eta \in \mathbb{R}^+$. Ponendo $\phi \equiv 0$ nell'Eq. (75), i.e., $y \equiv 0$ nell'Eq. (76.1), è immediato ricavare, dalla Fig. (10), che

$$\overline{OM} \equiv \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4\eta}, \qquad \overline{OV} \equiv \overline{VD} = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{8\eta} . \tag{76.2}$$

$\lambda$ e $\eta$ sono entrambi *invarianti isometrici*, legati dalla proporzionalità reciproca

$$\lambda \equiv \frac{1}{2\eta} . \tag{76.3}$$

Il confronto tra le Eq.i (72) e (74) si presta a considerazioni interessanti, di natura analitica: sebbene $OF$ sia un parametro *continuo* – precisamente, $m = b/a \equiv \tan\alpha$ – i limiti unilaterali ellittico\iperbolico,

$$\lim_{\varepsilon\to 1^\pm} \rho(\phi),$$

sono palesemente *nulli*, $\forall\,\phi$, in modo *inconsistente* con l'Eq. (76)! Si può risolvere questa criticità singolare imponendo, nell'*invariante isometrico* $\lambda$, che $a = a(\varepsilon)$ sia tale che

$$\lim_{\varepsilon\to 1^\pm} a(\varepsilon) = +\infty .$$

La divergenza delle misure dei semi-assi focali è causa della *confluenza degenere* di entrambi i grafici delle coniche '*a centro*' nel grafico parabolico. Pertanto, se tale confluenza grafica si manifesta analiticamente, vs. la variabile indipendente $\varepsilon$, nella forma indeterminata $[\infty \cdot 0]$ dei prodotti 'unilaterali', rispettivamente, *iperbolico* $a(\varepsilon)(\varepsilon^2-1)$ ed *ellittico* $a(\varepsilon)(1-\varepsilon^2)$, questa è *eliminabile* assegnandole il valore-limite *finito* previsto geometricamente:

$$\lim_{\varepsilon\to 1^+} a(\varepsilon)(\varepsilon^2-1) = \lim_{\varepsilon\to 1^-} a(\varepsilon)(1-\varepsilon^2) = \frac{\lambda}{2} . \tag{76.4}$$

■

**Applicazione 1 – Area di un settore di una $\mathcal{N}$-sezione conica**

Nella *Teoria Newtoniana della Gravitazione*, la 2ª Legge di Kepler ('*La distanza* $\rho$ *tra il centro di forza di attrazione* **centrale** *e un corpo celeste in moto* (*su un'orbita ellittica*) *copre aree uguali in tempi uguali*') rimanda prontamente all'Eq. (72).
L'Analisi fornisce il risultato generale seguente: l'area della regione (piana) racchiusa tra le due direzioni $\rho_1 = \rho(\phi_1)$, $\rho_2 = \rho(\phi_2)$, e la linea di equazione *piano-polare* $\rho = \rho(\phi)$, essendo $\rho$ una funzione continua e non-negativa nell'intervallo $(\phi_1, \phi_2)$, con $0 < \phi_2 - \phi_1 \le 2\pi$, è data da

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} (\rho(\phi))^2 d\phi . \tag{77}$$

- Mediante l'Eq. (72) e il risultato parametrico generale **IG-11**, nel math-notebook **Esercizi di Calcolo Integrale in** $\mathbb{R}$, si ha, per un settore $\mathcal{N}$-*ellittico* (Fig. 11), con $\varepsilon \in [0,1)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_e &= \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{8}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1+\varepsilon\cos\phi)^2} \\
&= \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{8}\left( \left.\frac{\varepsilon\sin\phi}{(\varepsilon^2-1)(1+\varepsilon\cos\phi)}\right|_{\phi_1}^{\phi_2} - \frac{1}{\varepsilon^2-1}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{d\phi}{1+\varepsilon\cos\phi}\right) \\
&= \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{8}\left( -\left.\frac{\varepsilon\sin\phi}{1+\varepsilon\cos\phi}\right|_{\phi_1}^{\phi_2} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}\left.\tan^{-1}\left(\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1/2}\tan(\phi/2)\right)\right|_{\phi_1}^{\phi_2}\right) = \ldots \\
&= \left.\left( ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a+c}\tan(\phi/2)\right) - \frac{b^2c}{2a}\,\frac{\sin\phi}{a+c\cos\phi}\right)\right|_{\phi_1}^{\phi_2},
\end{aligned} \tag{78}$$

dove, al solito, è $c^2 = a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$ e, quindi, $\lambda = 2b^2/a$.

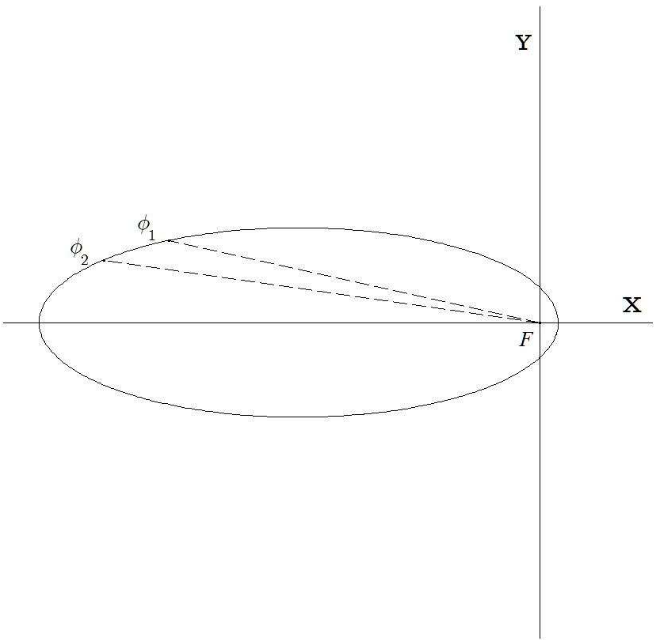



Fig. 11

Il caso dell'orbita *circolare* di raggio $r$ corrisponde ad $a \equiv b = r$ e a $c = 0$ nell'Eq. (78).

- Il procedimento precedente è applicabile anche al calcolo dell'area di un settore $\mathcal{N}$-*iperbolico* (Fig. 12), con $\varepsilon \in (1, +\infty)$ e $tan^{-1}(b/a) < \phi_1 < \phi_2 < 2\pi - tan^{-1}(b/a)$.
  Dall'Eq. (74) e, ancora, dall'integrale **IG-11** in **Esercizi di Calcolo Integrale in $\mathbb{R}$**, si trova

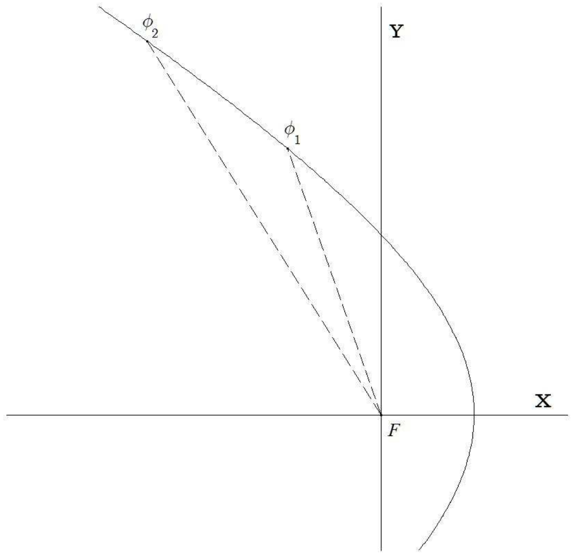



Fig. 12

$$\boxed{A_h} = \frac{a^2(\varepsilon^2-1)^2}{8}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{d\phi}{(1+\varepsilon\cos\phi)^2}$$
$$= \frac{a^2(\varepsilon^2-1)^2}{8}\left(\left.\frac{\varepsilon\sin\phi}{(\varepsilon^2-1)(1+\varepsilon\cos\phi)}\right|_{\phi_1}^{\phi_2} - \frac{1}{\varepsilon^2-1}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{d\phi}{1+\varepsilon\cos\phi}\right)$$
$$= \frac{a^2(\varepsilon^2-1)}{8}\left(\left.\frac{\varepsilon\sin\phi}{1+\varepsilon\cos\phi}\right|_{\phi_1}^{\phi_2} - \frac{1}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}}\ln\left.\left(\frac{(\varepsilon^2-1)^{1/2}\tan(\phi/2)+\varepsilon+1}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}\tan(\phi/2)-\varepsilon-1}\right)\right|_{\phi_1}^{\phi_2}\right) = \ldots$$
$$\boxed{= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{b^2c}{a}\,\frac{\sin\phi}{a+c\cos\phi} - ab\ln\left(\frac{b\tan(\phi/2)+a+c}{b\tan(\phi/2)-a-c}\right)\right)\right|_{\phi_1}^{\phi_2}}, \tag{79}$$

essendo, al solito, $c^2 = a^2 + b^2 = a^2\varepsilon^2$ e, ancora, formalmente, $\lambda = 2b^2/a$.

- Infine, il calcolo dell'area di un settore $\mathcal{N}$-*parabolico* (Fig. 13), per il quale $\varepsilon = 1$, discende in modo diretto dalle Eq.i (76), (76.3), qui, e dall'integrale **IG-4** nel math-notebook **Esercizi di Calcolo Integrale in $\mathbb{R}$**:

$$\boxed{A_p} = \frac{\lambda_p^2}{8}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{d\phi}{(1+\cos\phi)^2} \tag{80}$$
$$= \frac{\lambda_p^2}{16}\left.\left(\tan(\phi/2)+\frac{1}{3}(\tan(\phi/2))^3\right)\right|_{\phi_1}^{\phi_2} \equiv \frac{1}{64\eta^2}\left.\left(\left(1+\frac{1}{3}(\tan(\phi/2))^2\right)\tan(\phi/2)\right)\right|_{\phi_1}^{\phi_2}$$

$$\equiv \frac{1}{64\eta^2}\left(\left(1+\frac{1}{3}(tan(\phi/2))^2\right)tan(\phi/2)\right)\Bigg|_{\phi_1}^{\phi_2}$$

$$= \frac{1}{64\eta^2}\left(\left(1+\frac{1}{3}(tan(\phi_2/2))^2\right)tan(\phi_2/2)-\left(1+\frac{1}{3}(tan(\phi_1/2))^2\right)tan(\phi_1/2)\right) . \qquad (80.1)$$

□

________________

Circa l'espressione (80.1), si ricordino, all'occorrenza, le identità

$$tan\frac{\phi}{2} \equiv \frac{1-cos\phi}{sin\phi} \equiv \frac{sin\phi}{1+cos\phi} .$$

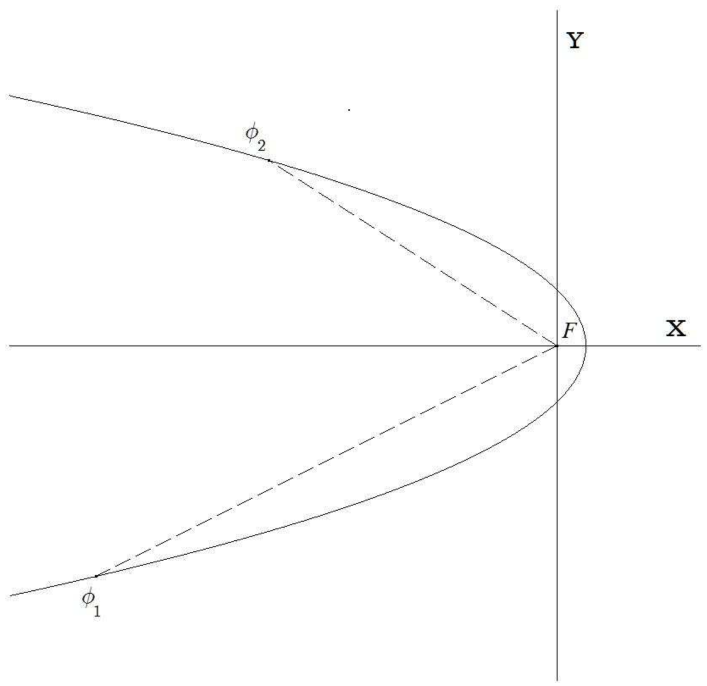



Fig. 13

■

**Applicazione 2 – Lunghezza di un arco di una $\mathcal{N}$-sezione conica**

Anche la lunghezza $\mathcal{L}_\gamma$ di un arco $\gamma$ di linea piana *generalmente regolare* (i.e., $\gamma \in \mathcal{C}^1$ a tratti) è di interesse fondamentale in vari modelli della Fisica Classica, e.g., nella *Dinamica Newtoniana* delle orbite soggette a *forze centrali* di intensità dipendente dal *reciproco del quadrato* della distanza dal centro di forza, $\propto R^{-2} \equiv \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|^{-2}$, e in problemi svariati di Elettromagnetismo.

La rettificazione di un arco $\widehat{AB} \equiv \gamma$ (Fig. 14), sotteso da un $\mathcal{N}$-*settore convesso* (i.e., $\varphi \in [0, \pi]$) di una sezione conica qualsiasi, richiede un calcolo un po' più impegnativo di quello areale per le due sezioni coniche *a-centro*, l'ellisse e l'iperbole, con il ricorso alle *Funzioni integrali Ellittiche di Legendre* di 1° e di 2° tipo.

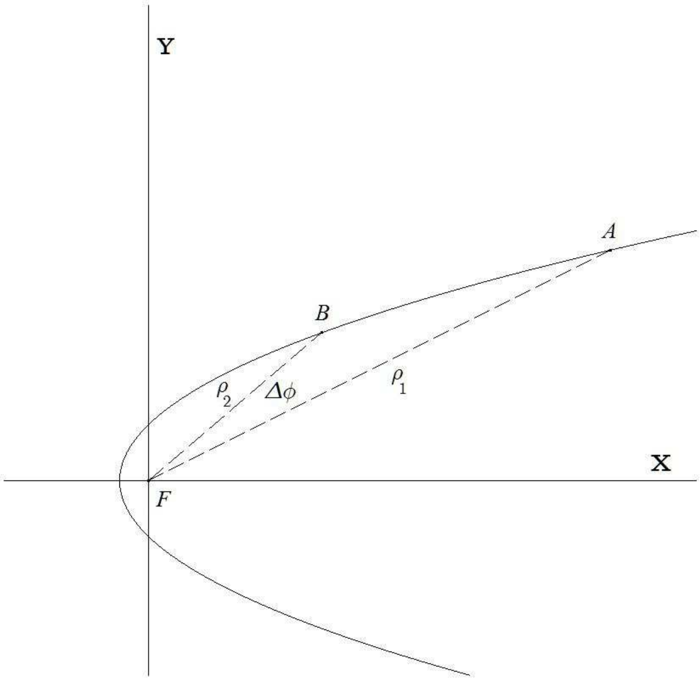



Fig. 14

L'espressione integrale *esatta* di $\mathcal{L}_\gamma$ ($\gamma \in \mathcal{C}^1$ a tratti) è, in coordinate *piano-polari* ($\rho = \rho(\phi)$),

$$\mathcal{L}_\gamma = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left( (\rho(\phi))^2 + (d\rho(\phi)/d\phi)^2 \right)^{1/2} d\phi . \tag{81}$$

- Nel caso *sia* di una $\mathcal{N}$-*ellisse che* di una $\mathcal{N}$-*iperbole*, si calcola, dall'Eq. (81),

$$\mathcal{L}_{e\backslash h}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} = \frac{\lambda_{e\backslash h}}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{(\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos\phi)^{1/2}}{(1+\varepsilon \cos\phi)^2}\, d\phi \equiv \frac{\lambda_{e\backslash h}}{2} I(\phi)\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} \tag{82}$$

  in modo formalmente identico per *entrambe* le coniche, dall'Eq. (70), con $\lambda_{e\backslash h} = a|1-\varepsilon^2|$.

  La determinazione di $I(\phi)\big|_0^\xi$ è sviluppata, e.g., in: **Esercizi di Calcolo Integrale in $\mathbb{R}$, IE-10**.

  Applicando quel risultato all'Eq. (82) *due volte*, si trova

$$\mathcal{L}_{e\backslash h}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} = \frac{\lambda_{e\backslash h}}{2} I(\phi)\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} \equiv \frac{\lambda_{e\backslash h}}{2} \left( I(\phi)\Big|_0^{\phi_2} - I(\phi)\Big|_0^{\phi_1} \right)$$

$$= \frac{\lambda_{e\backslash h}}{2}\left(R(\phi_2) - R(\phi_1) - \frac{1}{\varepsilon - 1}\int_{\phi_1/2}^{\phi_2/2} \Lambda^{1/2}(\psi)\,d\psi + \frac{1}{\varepsilon + 1}\int_{\phi_1/2}^{\phi_2/2} \Lambda^{-1/2}(\psi)\,d\psi\right)$$

$$= \frac{\varepsilon\lambda_{e\backslash h}}{2(\varepsilon^2 - 1)}\left(\frac{(\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos\phi_2)^{1/2}\sin\phi_2}{1 + \varepsilon\cos\phi_2} - \frac{(\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos\phi_1)^{1/2}\sin\phi_1}{1 + \varepsilon\cos\phi_1} - \right.\hookleftarrow$$

$$\left.\hookrightarrow - (1 - 1/\varepsilon)(E(\phi_2/2, k) - E(\phi_1/2, k)) + (1 - 1/\varepsilon)(F(\phi_2/2, k) - F(\phi_1/2, k))\right), \qquad (83)$$

essendo, qui, $k := 2\varepsilon^{1/2}/(\varepsilon + 1) \in [0, 1] \wedge \psi := \phi/2$, con $\phi \in [0, \pi]$ per $X$-simmetria assiale. $F$ ed $E$ rappresentano le *Funzioni Integrali Ellittiche Legendriane* in forma *goniometrica*, rispettivamente, di 1° e di 2° tipo. Espresse sinteticamente, mediante il *Simbolo* $\Lambda \equiv \Lambda(\phi)$ *di Gudermann* (†), si scrivono:

$$F(\xi, k) := \int_0^{\xi} \Lambda^{-1/2}(\phi)\,d\phi \equiv \int_0^{\xi} (1 - k^2(\sin\phi)^2)^{-1/2}\,d\phi\,, \qquad (84.1)$$

$$E(\xi, k) := \int_0^{\xi} \Lambda^{1/2}(\phi)\,d\phi \equiv \int_0^{\xi} (1 - k^2(\sin\phi)^2)^{1/2}\,d\phi\,. \qquad (84.2)$$

Le funzioni integrali $F$ ed $E$ dipendono entrambe dall'*estremo superiore di integrazione*, l'*amplitudine* $\xi$, e sono caratterizzate dal parametro $k \in \mathbb{C}$ ($|k| < 1$), il *modulo ellittico*.
Sia $F(\xi, k)$ che $E(\xi, k)$ risultano rappresentabili in serie in un intervallo *compatto* opportuno $[0, \xi]$ espandendo le potenze binomiali integrande rispettive vs. la variabile $|k|^2(\sin\varphi)^2 \leq 1$ e, quindi, integrando termine-a-termine. La condizione $|k| < 1$, richiesta dalla Teoria, è verificata, qui, dalla disuguaglianza evidente

$$\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon + 1)^2} \equiv \frac{4\varepsilon}{(\varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon} < 1\,.$$

Le espansioni in serie *reali* (convergenti *uniformemente* in $[0, \xi] \subseteq [0, \pi/2]$) sono (†)

$$F(\xi, k) = \xi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\mathcal{S}_{2n}(\xi)\,k^{2n}, \qquad (85.1)$$

$$E(\xi, k) = \xi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n - 1)(2^n n!)^2}\,\mathcal{S}_{2n}(\xi)\,k^{2n}. \qquad (85.2)$$

Il termine generale di entrambe le *serie* (85.1) e (85.2) contiene la *somma* $2n$-*sima di* WALLIS (JOHN, 1616-1703), $\mathcal{S}_{2n}(\xi)$, facilmente esplicitabile *per-parti* iterativamente:

$$\mathcal{S}_{2n}(\xi) := \int_0^{\xi} (\sin\eta)^{2n}\,d\eta = -\frac{1}{2n}(\cos\xi)(\sin\xi)^{2n-1} + \frac{2n - 1}{2n}\,\mathcal{S}_{2(n-1)}(\xi) = \ldots \qquad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\left(\xi - \frac{1}{2}(\sin 2\xi)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(2^r r!)^2}{(2r + 1)!}(\sin\xi)^{2r}\right) \qquad (86.1)$$

$$\equiv \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n}{n}\xi + (-1)^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{n - r}\binom{2n}{r}\sin(2(n - r)\xi)\right). \qquad (86.2)$$

■

---

(†) Si veda, e.g.,: Esercizi di Calcolo Integrale in $\mathbb{R}$, **IE**, **Introduzione**, Eq.i (4.1), (4.2) e **IE-14**, Eq.i (1), (2), (3), (4).

- Il calcolo della lunghezza di un arco $\mathcal{N}$-*parabolico* in coordinate polari si rivela notevolmente più semplice di quello ellittico\iperbolico.
  Eseguendo la trasformazione

$$1+\cos\phi \equiv 2(1+\cos\phi)/2 = 2(\cos\phi/2)^2 := 2(\cos u)^2,$$

  i.e., con $u := \phi/2$, si ottengono $d\phi = 2du$ e $(1+\cos\phi)^{3/2} = 2^{3/2}(\cos u)^3$.
  Quindi, iniziando dalla forma specifica dell'Eq. (81), dedotta dall'Eq. (76), si scrive

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{p}}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} &= \frac{\lambda_{\mathrm{p}}2^{1/2}}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{d\phi}{(1+\cos\phi)^{3/2}}\\ &= \frac{\lambda_{\mathrm{p}}}{2}\int_{2u_1}^{2u_2}\frac{du}{(\cos u)^3} \equiv \frac{\lambda_{\mathrm{par}}}{2}\int_{2u_1}^{2u_2}\frac{(\cos u)^2+(\sin u)^2}{(\cos u)^3}\,du\\ &= \frac{\lambda_{\mathrm{p}}}{2}\left(\int_{2u_1}^{2u_2}\sec u\,du + \int_{2u_1}^{2u_2}(\sin u)\,d\left(\frac{1}{2(\cos u)^2}\right)\right).\end{aligned}$$

  Infine, mediante l'integrale **IG-2** in **Esercizi di Calcolo Integrale in** $\mathbb{R}$ e un'integrazione *per-parti* evidente, risulta, ancora con $\phi \in [0,\pi]$ per $X$-simmetria assiale,

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{p}}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} = \frac{\lambda_{\mathrm{p}}}{4}\big(\ln(\tan(\phi/4+\pi/4))+\tan(\phi/2)\sec(\phi/2)\big)\Big|_{\phi_1}^{\phi_2}}. \tag{87}$$

■■■

# APPENDICE

Com'è ovvio, le trasformazioni *isometriche piane* elementari, la *traslazione*, la *rotazione* e la *riflessione assiale*, possono riguardare grafici qualsiasi, non solo quelli delle sezioni coniche, per la loro riduzione a forme più maneggevoli o per operazioni di simmetria specifiche. D'altra parte, l'esigenza di ripristino di rappresentazioni geometriche originarie porta a operazioni di *inversione* di trasformazioni isometriche.

Qui di seguito, sono dettagliati alcuni *metodi matriciali* elementari per la manipolazione delle trasformazioni isometriche *affini* più frequenti e per la loro inversione. Esse, trovano sviluppi e impieghi avanzati nella Cristallografia e nei modelli a struttura *reticolare* variamente ricorrenti nella Fisica: di Stato Solido, Molecolare, Nucleare, a quarks, di statistica microscopica nella Meccanica del *quasi-continuo* (elasticità, plasticità, dislocazioni, etc.) e di Scienza dei Materiali.

□

## I. INVERSIONE di una matrice reale (quadrata non-singolare)

Sia $\mathbf{A}$ una $(n \times n)$-matrice (quadrata) con elementi tutti $\in \mathbb{R}$ e *non-singolare* (i.e., $det\,\mathbf{A} \neq 0$).

I.1 - Il *minore complementare* $M_{jk}$ dell'elemento $a_{jk}$ di $\mathbf{A}$, con $\{j, k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, è il *determinante* della matrice di ordine $n-1$ estratta da $\mathbf{A}$ sopprimendone la $j$-esima riga e la $k$-esima colonna. Il numero di tali determinanti ottenibili variando i valori degli indici $j$ e $k$ in modo indipendente è $n^2$.

I.2 - Il *co-fattore* (o *complemento algebrico*) $A_{jk}$ dell'elemento $a_{jk}$ di $\mathbf{A}$ è il numero

$$A_{jk} := (-1)^{j+k} M_{jk}, \tag{A.1}$$

*coincidente con-* od *opposto a-* $M_{jk}$, secondo che $j+k$ è *pari* o *dispari*.

I.3 - La matrice *inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ della matrice (reale) $\mathbf{A}$ è data da

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det\,\mathbf{A}} \mathbf{A}^{\dagger}, \tag{A.2}$$

dove $\mathbf{A}^{\dagger}$, detta matrice *aggiunta* della matrice $\mathbf{A}$, è la $(n \times n)$-matrice *trasposta* della matrice degli $n^2$ co-fattori (complementi algebrici) di $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{\dagger} := \left(A_{jk}\right)^T \equiv \left(A_{kj}\right) \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & \dots & & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.2.1}$$

■

## II. L'AFFINITÀ INVERSA generale in $\mathbb{R}^2$

Data l'affinità piana generale

$$\Omega: \begin{cases} u = ax + by + p \equiv u(x,y) \\ v = cx + dy + q \equiv v(x,y) \end{cases}, \tag{A.3}$$

qui indicata convenzionalmente come *diretta*, avente rappresentazione matriciale

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{I}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \tag{A.3.1}$$

per la quale, sia $\Delta := \det \mathbf{A} \neq 0$ (i.e., $\mathbf{A}$ sia *non-singolare*), la matrice dei coefficienti dell'affinità *inversa* $\Omega^{-1}$ si scrive (v. Eq. (A.2)):

$$\mathbf{A}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Quindi, dal sistema (A.3), ponendo

$$\begin{cases} ax + by = u - p := s \\ cx + dy = v - q := t \end{cases},$$

segue l'uguaglianza matriciale

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{o, in forma equivalente,} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix},$$

che corrisponde al *sistema inverso* di equazioni lineari

$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{\Delta}s - \dfrac{b}{\Delta}t \equiv \dfrac{d}{\Delta}(u-p) - \dfrac{b}{\Delta}(v-q) \\[2ex] y = -\dfrac{c}{\Delta}s + \dfrac{a}{\Delta}t \equiv -\dfrac{c}{\Delta}(u-p) + \dfrac{a}{\Delta}(v-q) \end{cases}.$$

Pertanto, quest'ultimo definisce l'**affinità inversa** cercata,

$$\Omega^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{d}{\Delta}u - \dfrac{b}{\Delta}v - \dfrac{dp - bq}{\Delta} \equiv x(u,v) \\[2ex] y = -\dfrac{c}{\Delta}u + \dfrac{a}{\Delta}v - \dfrac{aq - cp}{\Delta} \equiv y(u,v) \end{cases}, \tag{A.5}$$

rappresentabile con la trasformazione matriciale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta_x/\Delta \\ \Delta_y/\Delta \end{pmatrix}. \tag{A.5.1}$$

I numeri $\Delta_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$ e $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$ provengono da $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, sostituendovi la colonna $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dei termini *traslazionali* in $\Omega$ alle colonne dei coefficienti delle incognite $x$ e $y$, rispettivamente.

■

## III. TRASLAZIONE rigida piana, diretta e inversa, tra sistemi di riferimento rettangolare

Il sistema di riferimento *cartesiano ortogonale* $xOy$ sia considerato come *primitivo* (o *assoluto*). Secondo la terminologia convenzionale, si intende come *traslazione diretta* lo spostamento finito e rettilineo, di vettore rappresentativo assegnato $\overrightarrow{OO'} \equiv O'-O = \boldsymbol{r}_0 \equiv (x_0-0; y_0-0) \equiv (x_0; y_0)$, che porta il **sistema di riferimento** rettangolare ortogonale $xOy$, a sovrapporsi rigidamente a un certo sistema di riferimento rettangolare ortogonale trasformato $uO'v$, i.e., $xOy \mapsto uO'v$.

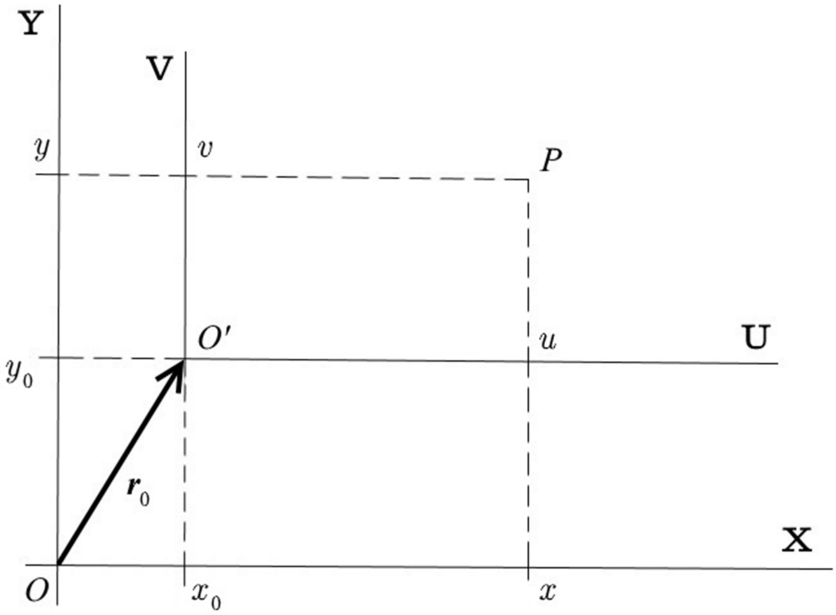



Fig. 15

Le equazioni di traslazione *diretta* (di sistema di riferimento) sono espresse dall'affinità

$$\begin{cases} u = x - x_0 \equiv u(x,y) \\ v = y - y_0 \equiv v(x,y) \end{cases}, \qquad \text{(A.6)}$$

e sono equivalenti alla *trasformazione-identità ortonormale* (cf/c la forma dell'Eq. (A.3.1)),

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{r_0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathbf{I}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \boldsymbol{r}_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(A.6.1)}$$

□

In modo analogo, la traslazione rigida *inversa* del sistema di riferimento, $uO'v \mapsto xOy$ di vettore $-\boldsymbol{r}_0$, corrisponde all'affinità, *inversa* della (A.6), i.e., al sistema generale (A.5),

$$\begin{cases} x = u + x_0 \equiv x(u,v) \\ y = v + y_0 \equiv y(u,v) \end{cases}. \qquad \text{(A.7)}$$

L'affinità (A.7) equivale alla rappresentazione matriciale *ortonormale*, inversa della (A.6.1),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{T}_{r_0})^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv \mathbf{T}_{-r_0}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \mathbf{I}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \boldsymbol{r}_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(A.7.1)}$$

Entrambe le traslazioni *di sistema di riferimento* (A.6.1) e (A.7.1) sono rappresentabili come trasformazioni **puntuali**, i.e., delle coordinate *cartesiane*: la prima, di vettore $\boldsymbol{r}_0 \equiv (x_0 \;\; y_0)$, del punto *primitivo* $(x; y)$ nel punto *trasformato* $(u; v)$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} ; \tag{A.8}$$

la seconda, di vettore $-\boldsymbol{r}_0 \equiv (-x_0 \;\; -y_0)$, del punto *trasformato* $(u; v)$ nel punto *primitivo* $(x; y)$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} . \tag{A.9}$$

### Osservazione

Il punto generico $P \equiv (x; y) \equiv (u; v)$ rimane *fisso* al *piano primitivo* $X \times Y$ (piano originario *assoluto*) mentre, *successivamente*, questo si trasforma in modo *indipendente* per traslazione. In altre parole, $P$ è *trasparente* vs. la traslazione del piano $X \times Y$, come se il piano gli 'scorra sopra' lasciandolo inerte (vs. l'osservatore). Tale caratteristica vale per *qualsiasi altra* trasformazione *isometrica* affine (rotazione, riflessione assiale, etc.).

■

## IV. **ROTAZIONE rigida piana, diretta e inversa, tra sistemi di riferimento rettangolare**

Il sistema di riferimento cartesiano ortogonale $xOy$ sia considerato come *primitivo* (o *assoluto*). Nella Fig. 16, osservato che $|\varphi| = Q\hat{O}N \equiv Q\hat{P}R$, la posizione dell'estremo $P$ del vettore generico $\boldsymbol{r} \equiv \overrightarrow{OP} \equiv P - O = (x - 0; y - 0) \equiv (x; y)$ determina, vs. il sistema $xOy$, la coppia di segmenti *orientati* (quindi, $\varphi \lesseqgtr 0$)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{MN} \equiv \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{RQ} = \overline{OQ}\cos\varphi - \overline{PQ}\sin\varphi \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RP} \equiv \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RP} = \overline{OQ}\sin\varphi + \overline{PQ}\cos\varphi \end{cases} . \tag{A.10}$$

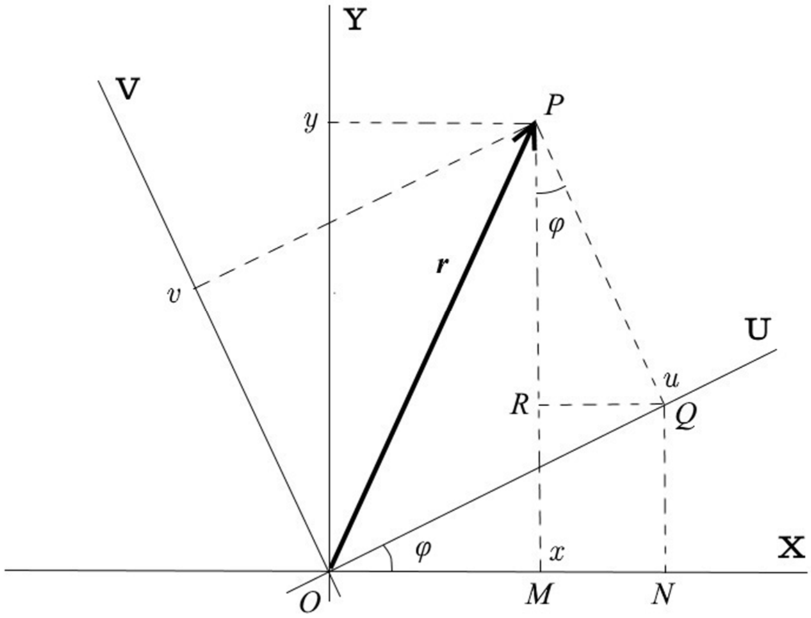



Fig. 16

In forma standard, considerando $P$ vs. $xOy$, le Eq.i (A.10) corrispondono all'affinità

$$\begin{cases} x = u\cos\varphi - v\sin\varphi \equiv x(u, v) \\ y = u\sin\varphi + v\cos\varphi \equiv y(u, v) \end{cases} . \tag{A.11}$$

Secondo la *convenzione destrorsa*, qui adottata, esse esprimono la *rotazione rigida* di centro $O$ e di ampiezza $-\varphi \gtreqless 0$ che *riporta* un certo **sistema di riferimento** cartesiano ortogonale *trasformato* $uOv$ a sovrapporsi al sistema di riferimento cartesiano ortogonale *primitivo* $xOy$, i.e., in breve, $uOv \mapsto xOy$.
L'affinità (A.11) equivale alla trasformazione espressa dall'equazione matriciale *ortonormale*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{-\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} . \tag{A.12}$$

□

In modo analogo, la rotazione $\mathbf{R}_{\varphi}$ intorno a $O$, *inversa* della precedente e di ampiezza $\varphi$, è intesa, nella *convenzione destrorsa*, quella *di sistema di riferimento* $xOy \mapsto uOv$. Ad essa, corrisponde l'affinità *inversa* della (A.11) (cf/c il sistema generale (A.5)),

$$\left\{\begin{array}{l} u = x\cos\varphi + y\sin\varphi \equiv u(x,y) \\ v = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \equiv v(x,y) \end{array}\right. . \tag{A.13}$$

L'affinità (A.13) equivale alla trasformazione espressa dall'equazione matriciale *ortonormale*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{R}_{-\varphi})^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{A.14}$$

inversa, appunto, dell'Eq. (A.12) (lo si verifichi).

### Osservazioni

a. Qualsiasi trasformazione geometrica *reale*, rappresentabile mediante una matrice *ortonormale*, $\mathbf{A}$, i.e., tale che $det\,\mathbf{A} = \pm 1$ (e.g., la traslazione, la rotazione, la riflessione assiale, etc.), ha la caratteristica seguente: $\mathbf{A}$ coincide con la *trasposta*, $\mathbf{A}^T$, della sua (unica) *inversa* $\mathbf{A}^{-1}$, i.e., *le righe dell'una vengono scambiate ordinatamente con le colonne dell'altra*. In rappresentazione matriciale formale, da $\mathbf{A}^T \equiv \mathbf{A}^{-1}$, segue che $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

b. Inoltre, vale un'altra proprietà evidente: a ogni trasformazione isometrica *di sistema di riferimento ortogonale*, corrisponde la trasformazione isometrica *puntuale* (o *vettoriale*) **opposta** (inversa) dell'insieme (luogo di punti) trasformato, e viceversa, secondo il Principio di Relatività Galileiana.

■

## V. RIFLESSIONE vs. una retta in forma esplicita nel piano $X \times Y$

### Proposizione

La *riflessione*, $\mathbf{S}_m$, di un insieme piano qualsiasi $\Im \subseteq X \times Y$ vs. una retta *passante per l'origine* $O$, $r_{OH}$: $y = mx$, è rappresentabile mediante una *riflessione rigida* $\mathbf{S}_X$ di $\Im$ (i.e., di *ogni* punto suo punto) vs. l'asse $X$ *seguita* da una *rotazione rigida* di $\Im$ intorno a $O$, di ampiezza $2\theta \equiv 2tan^{-1}m$ ($\lesseqgtr 0$), dell'immagine *riflessa* vs. $X$. ▲

### Verifica

Dalla Fig. 17, si può procedere costruttivamente, ricordando che $m \equiv tan\theta$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Fissato il punto $P''$, simmetrico vs. la retta $r_{OH}$ di $P \equiv (x; y)$ *generico*, la *riflessione assiale* $\mathbf{S}_m$ equivale all'*opposto* della somma vettoriale $P'' - P \equiv (\cancel{P'} - P) + (P'' - \cancel{P'})$. Invece, nel sistema di riferimento $xOy$, $\mathbf{S}_m$ è espressa dalla *composizione* ordinata della *riflessione* $\mathbf{S}_X$ di $P$ vs. l'asse $X$ $(P \equiv (x; y) \mapsto P' \equiv (x; -y))$ seguita dalla *rotazione* $\mathbf{R}_{-2\theta}$ di $xOy$ intorno a $O$ $(P' \mapsto P'')$, di ampiezza $-2\theta \equiv -2tan^{-1}m$. Formalmente, si scrive: $\mathbf{S}_m \equiv \mathbf{R}_{-2\theta} \circ \mathbf{S}_X$.
Infatti, poiché $H$ e $M$ sono, rispettivamente, i punti medî dei segmenti $PP''$ e $PP'$, si trova che

- $P\hat{O}M \equiv M\hat{O}P' = \alpha$,
- $P\hat{O}H \equiv H\hat{O}P'' = \alpha - \theta$,
- $P''\hat{O}M \equiv P\hat{O}M - POP'' = \alpha - 2(\alpha - \theta) = 2\theta - \alpha \quad (\Rightarrow |\alpha| < \pi)$

e, quindi, la rotazione puntuale $P' \equiv (x; -y) \equiv (u; v) \mapsto P'' \equiv (\overline{u}; \overline{v})$ è di ampiezza $P''\hat{O}P' = \alpha + (2\theta - \alpha) = 2\theta$.

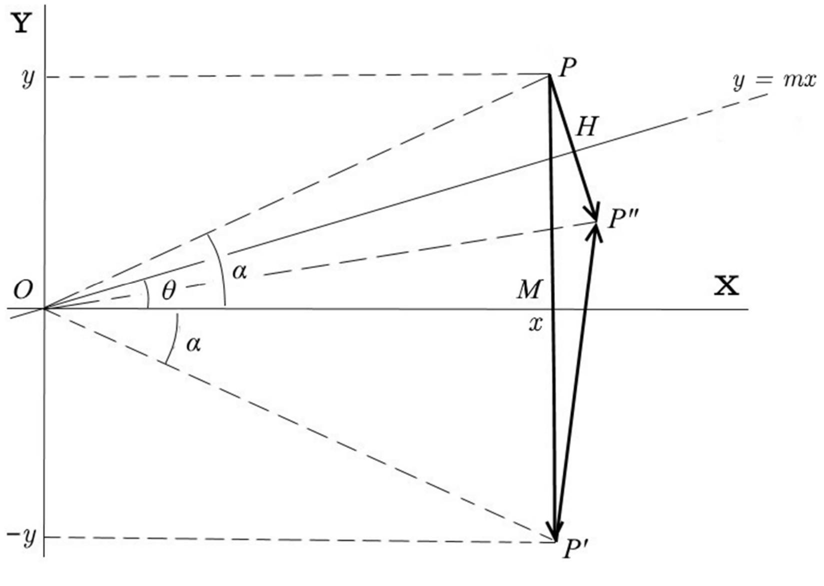



Fig. 17

Poiché la riflessione assiale $\mathbf{S}_X$ $(P \mapsto P')$ corrisponde all'*identità* $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e la rotazione degli assi di riferimento *primitivo* è *opposta* a quella *puntuale* $P' \mapsto P''$, la sua ampiezza $\varphi \equiv -2\theta$ entra nell'Eq. generale (A.14):

$$P \mapsto P'' \equiv \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(-2\theta) & sin(-2\theta) \\ -sin(-2\theta) & cos(-2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & cos2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos2\theta & sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (cos2\theta)x + (sin2\theta)y \\ (sin2\theta)x - (cos2\theta)y \end{pmatrix}, \qquad \text{(A.15)}$$

nel sistema di riferimento trasformato *roto-riflesso* $\overline{u}O\overline{v} \equiv \{P''\}$.

Inoltre, dalle formule di duplicazione goniometrica e dal coefficiente angolare $m = tan\,\theta$ della retta $r_{OH}$ di simmetria, segue la definizione importante, in varie rappresentazioni utili,

$$\mathbf{S}_m := \begin{pmatrix} cos\,2\theta & sin\,2\theta \\ sin\,2\theta & -cos\,2\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1-(tan\,\theta)^2}{1+(tan\,\theta)^2} & \dfrac{2\,tan\,\theta}{1+(tan\,\theta)^2} \\ \dfrac{2\,tan\,\theta}{1+(tan\,\theta)^2} & -\dfrac{1-(tan\,\theta)^2}{1+(tan\,\theta)^2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

Infine, poiché $det\,\mathbf{S}_m = -1$, è amche evidente che $\mathbf{S}_m$ costituisca un'isometria *inversa*.

□

La riflessione *inversa* $P'' \mapsto P$ si può determinare con le Eq. (A.4) e (A.16), osservando che, ora, il cammino vettoriale di trasformazione è *opposto* a quello rappresentato dall'Eq. (A.16) e, quindi, che il sistema di riferimento $\bar{u}O\bar{v} \equiv \{P''\}$ esegue una roto-riflessione assiale vs. $r_0 : \bar{v} = -m\bar{u} \equiv tan(-\theta)\,\bar{u}$ di ampiezza $2(-\theta)$ per sovrapporsi al sistema $xOy$ primitivo. Quindi,

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(-2\theta) & sin(-2\theta) \\ sin(-2\theta) & -cos(-2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{S}_{-m} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,2\theta & -sin\,2\theta \\ -sin\,2\theta & -cos\,2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}, \quad \text{così che}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{S}_m)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{S}_{-m} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (cos\,2\theta)\,\bar{u} - (sin\,2\theta)\,\bar{v} \\ -(sin\,2\theta)\,\bar{u} - (cos\,2\theta)\,\bar{v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2}\bar{u} - \dfrac{2m}{1+m^2}\bar{v} \\ -\dfrac{2m}{1+m^2}\bar{u} - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}\bar{v} \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Il confronto tra le l'Eq.i (A.17) e (A.15) mostra il carattere *involutivo* di $\mathbf{S}_m$, i.e., che $(\mathbf{S}_m)^{-1} \equiv \mathbf{S}_{-m}$.

□

Lo schema rappresentativo della riflessione assiale di $\mathfrak{I}$ vs. una retta generica $r:\ y = mx + q$, con $q \neq 0$, si riporta facilmente a quello fondamentale precedente. Infatti, osservato che la riflessione vs. una retta è un'isometria, i.e., è geometricamente *invariante* vs. la rappresentazione *rettangolare* scelta, la trasformazione richiesta è esprimibile come riflessione assiale vs. il sistema di riferimento $xO'v$, nel quale, $O' \equiv (0;q) \wedge r$ ha equazione $v = mx$.

Le operazioni terminano, per l'una o l'altra delle trasformazioni, rispettivamente, diretta o inversa, con le sostituzioni $v \equiv y - q \,\veebar\, y \equiv v + q$.

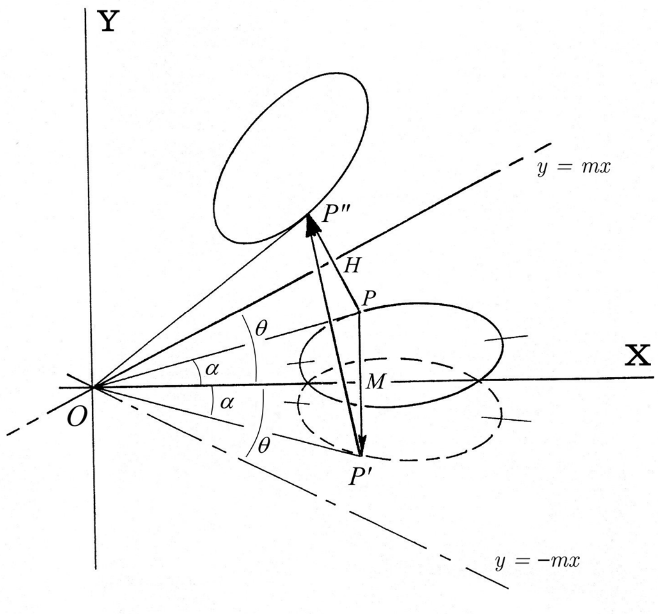



Fig. 17.1 – Riflessione assiale di un'ellisse vs. una retta $y = mx$.

■

## V.1 CONVOLUZIONE vs. una retta parallela all'asse $Y$

Un caso particolare di riflessione assiale, semplice ma molto importante in Analisi, soprattutto nella rappresentazione grafica della *funzione-nucleo* nelle trasformate integrali, è quello della *Convoluzione* (Ted.: *die Faltung*), operazione introdotta da Dirichlet (J. P. G. L., 1805-1959) e centrale nella Teoria delle Equazioni Integrali di Fredholm (E. I., 1866-1927) e di Volterra (V., 1860-1940), in Analisi Funzionale e in Teoria dei Segnali. (†)

□

Nel piano $X \times Y$ , si consideri la retta parametrica $r:\ x = t$ come asse di simmetria. La *convoluzione* $\mathbf{\Phi}_t$ di un punto generico $P \equiv (x;y)$ è determinata dalla composizione (commutativa) della traslazione $P \mapsto P' \equiv (-x;y)$ , di vettore $-2x\hat{\boldsymbol{x}}$ , e della traslazione $P' \mapsto P'' \equiv (-x+2t;y)$ , di vettore $2t\hat{\boldsymbol{x}}$ : $\mathbf{\Phi}_t := \mathbf{T}_{2t\hat{x}} \circ \mathbf{T}_{-2x\hat{x}}$ . Nella Fig. 18, i vettori, $P' - P$ e $P'' - P'$ , mostrati separati, di fatto, giacciono sulla *stessa* retta; in generale, $x$ e $t$ sono *indipendenti* tra loro.

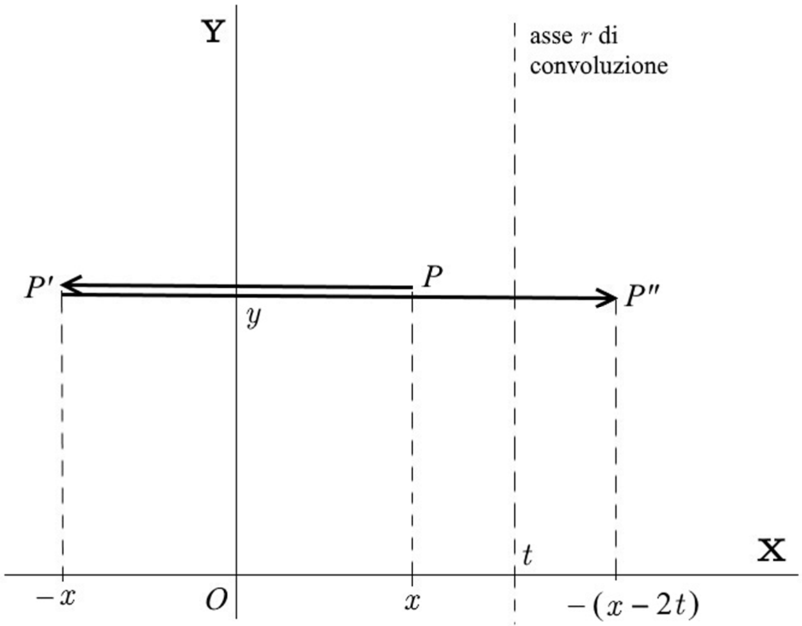



Fig. 18

Per la Convoluzione, vale la rappresentazione affine *diretta*

$$\begin{cases} u = -x+2t \\ v = y \end{cases}, \tag{A.18.1}$$

che, volendo mettere in evidenza l'azione riflessiva di $\mathbf{\Phi}_t$ , equivale all'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2t \\ y \end{pmatrix}. \tag{A.18.2}$$

□

Analogamente, la Convoluzione *inversa* $\mathbf{\Phi}_{-t}$ possiede, rispettivamente, le rappresentazioni equivalenti

$$\begin{cases} x = -u+2t \\ y = v \end{cases}, \tag{A.19.1}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}_{-x_0} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-2t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u+2t \\ v \end{pmatrix}. \tag{A.19.2}$$

■

(†) Elementi ed esempî introduttivi sulla Convoluzione, con attenzione verso questioni di Meccanica Statistica, sono presentati nel math-notebook: L'operazione di Convoluzione in $\mathbb{R}$ , con applicazioni a modelli integrali di Correlazione.

## VI. GLISSO-SIMMETRIA piana rettangolare

La *glisso-simmetria* (~ *glide-symmetry*) è la trasformazione piana *puntuale commutativa* ottenuta *sovrapponendo* una *riflessione assiale* $P \mapsto P''$ e una *traslazione* $\boldsymbol{\tau} \equiv P''' - P''$ *parallela all'asse di simmetria* $r_0 :\ y = mx$ , v. Fig. 19.
Entrambe le trasformazioni *di sistema di riferimento* hanno rappresentazioni equivalenti puntuali, i.e., vettoriali.
L'asse di simmetria costituisce una *direzione unita* (quindi, invariante) rispetto alla glisso-simmetria. Evidentemente, anche il fascio improprio di rette al quale appartiene l'asse di simmetria è *unito*, costituendo una classe di equivalenza. In tal senso, la retta $r_0$ di tale fascio passante per l'origine viene assegnata, di solito, come *riferimento* convenzionale per la riflessione vs. l'asse $X$ .

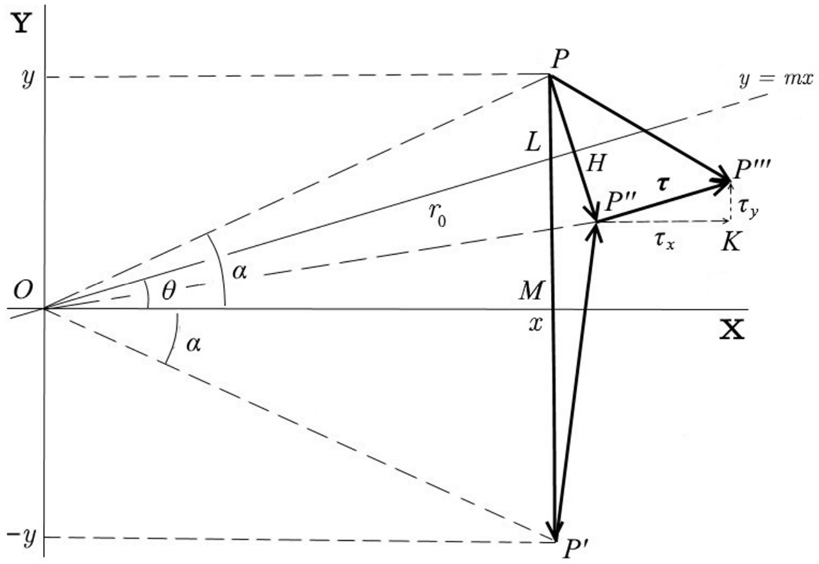



Fig. 19

La presenza di tale riflessione $X$- assiale e l'invarianza geometrica propria della traslazione ad essa associata portano alla conclusione che la glisso-simmetria, $\mathbf{G}_m$ , è una isometria *inversa*.
L'asse di simmetria ha coefficiente angolare $m \equiv \tan\theta$ e il vettore $\boldsymbol{\tau}$ di traslazione è, per la *similitudine* triangolare $P'''P''K \div LOM$ , dato da $\boldsymbol{\tau} := \tau_x \hat{\boldsymbol{x}} + \tau_y \hat{\boldsymbol{y}} \equiv \mathbf{T}_\tau \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau_x \\ m\tau_x \end{pmatrix}$, preso uscente dal punto roto-traslato $P'' \equiv \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$. Da ciò, segue che la glisso-simmetria corrisponde alla trasformazione composta del *sistema di riferimento* primitivo $xOy$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{T}_\tau \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{S}_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boldsymbol{\tau} \equiv P''' - P \\
&\equiv \begin{pmatrix} (\cos 2\theta)x + (\sin 2\theta)y \\ (\sin 2\theta)x - (\cos 2\theta)y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_x \\ m\tau_x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (\cos 2\theta)x + (\sin 2\theta)y + \tau_x \\ (\sin 2\theta)x - (\cos 2\theta)y + m\tau_x \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2}x + \dfrac{2m}{1+m^2}y + \tau_x \\[2ex] \dfrac{2m}{1+m^2}y - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}y + m\tau_x \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

mediante le Eq.i (A.15) e (A.16).

□

La glisso-simmetria *inversa* dell'Eq. (A.20) corrisponde alla somma vettoriale, scrivibile nella forma solita (e comoda) di CHASLES (MICHEL, 1793-1880) 'punta *meno* coda',

$$P - P''' \equiv (\cancel{P''} - P''') + (\cancel{P'} - \cancel{P''}) + (P - \cancel{P'}),$$

ed è, quindi, equivalente alla trasformazione composta del sistema $\tilde{u}O\tilde{v} \equiv \{P'''\}$ passando, *ordinatamente*, attraverso i sistemi di riferimento $\bar{u}O\bar{v} \equiv \{P''\}$ e $uOv \equiv xO(-y) \equiv \{P'\}$.

Come per la riflessione assiale pura, sfruttando il carattere *involutivo* di $\mathbf{S}_m$ e osservando che il cammino vettoriale di trasformazione è *opposto* a quello rappresentato dall'Eq. (A.20), il sistema di riferimento $\bar{u}O\bar{v} \equiv \{P''\}$ esegue una roto-riflessione assiale vs. $r_0 : \bar{v} = -m\bar{u} \equiv tan(-\theta)\bar{u}$ di ampiezza $2(-\theta)$ per sovrapporsi al sistema $xOy$ primitivo. Pertanto, si scrive:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{G}_m)^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &\equiv \mathbf{T}_{-\tau}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix} + (\mathbf{S}_m)^{-1}\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix} \equiv -\boldsymbol{\tau} + \mathbf{S}_{-m}\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix} \equiv P - P''' \\
&\equiv \begin{pmatrix}(cos 2\theta)\bar{u} - (sin 2\theta)\bar{v}\\ -(sin 2\theta)\bar{u} - (cos 2\theta)\bar{v}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tau_x\\ m\tau_x\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}(cos 2\theta)\bar{u} - (sin 2\theta)\bar{v} - \tau_x\\ -(sin 2\theta)\bar{u} - (cos 2\theta)\bar{v} - m\tau_x\end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix}\dfrac{1-m^2}{1+m^2}\bar{u} - \dfrac{2m}{1+m^2}\bar{v} - \tau_x\\[2ex] -\dfrac{2m}{1+m^2}\bar{u} - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}\bar{v} - m\tau_x\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

■■■

## Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [11], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

Ritengo poco probabile che si possa aggiungere qualcos'altro di veramente rivoluzionario e illuminante sui fondamenti di un tema così antico, classico e praticato come quello delle **Sezioni Coniche**. Invece, le applicazioni nei contesti più disparati si sprecano e si moltiplicano ogni giorno: basta fare un giro nel Web!
Mi limito, quindi, a segnalare alcune (secondo me) 'buone letture', sulle quali buttare un occhio in caso di revisioni necessarie (?), dubbî o perplessità, sempre sottintendendo l'esortazione paterna della massima ben nota e … talvolta scomoda: *la capacità di fare viene dal fare* …


[1] STOKA, M. - PIPITONE, V., *Esercizi e Problemi di Geometria*, CEDAM (1991);

[2] BOTTACIN, F., *Esercizi di Matematica II* (UNIBG, A. A. 2002/03);

[3] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, VOLL. **1** & **2**, ZANICHELLI(-MASSON) (1994; RIST. 1998);

[4] APOSTOL, T. M., *CALCULUS*, 2ND ED., VOL. **2**, JOHN WILEY & SONS, INC. (1969);

[5] LANG, S., *Linear Algebra*, 3RD ED., SPRINGER VERLAG NEW YORK, INC. (1987; CORR. PR., 2004);

[6] LIPSCHUTZ, S., *Linear Algebra*, 4TH ED., SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (2009);

[7] AYRES, F., JR., *Theory and Problems of MATRICES*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1962);

[8] BRONSON, R., *Theory and Problems of MATRIX OPERATIONS*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1989);

[9] AYRES, F., JR., - MENDELSON, E., *Theory and Problems of Differential and Integral CALCULUS*, CH. 25, 3RD ED., SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1990);

[10] THOMAS, G. B. - WEIR, M. D. - HASS, J., *Thomas' CALCULUS*: *Early Trascendentals*, § 11.6, 12TH ED., PEARSON (ADDISON-WESLEY PUBL. CO.) (2004).


■■■