

revisione
06 gennaio 2024

Struttura analitica della **Goniometria Iperbolica**

claudio magno

<https://www.cm-physmath.net/>

CM_Portable MATH Notebook Series™





Hipparco di Nicea (~190 a. C. - ~120 a. C.)

INTRODUZIONE

Lo scopo di queste note sintetiche e informali (e, per questo, forse, non particolarmente coerenti) è il tentativo di un confronto tra la *Goniometria Circolare* – generalmente nota dalla formazione scolastica medio-superiore – e quella cosiddetta *Iperbolica*, legata in modo più esplicito all'Analisi, cercando di fissare analogie strutturali e rappresentazioni 'parallele' basate su un approccio geometrico unificato (benché specifico per ciascuna) di *angolo normalizzato* e di *grado radiante*. L'obiettivo di una costruzione autonoma di *Goniometria Iperbolica* costituisce il filo conduttore.

Siano ξ e ρ semirette *uscenti* da uno stesso punto ordinario, il *polo*, nel piano euclideo $\mathcal{E} (\equiv X \times Y)$: ξ è presa come asse di *referimento* mentre ρ è il *raggio vettore*, di direzione *variabile* rispetto alla direzione *fissa* di ξ .

Si assuma, come definizione primitiva di *angolo (piano) orientato*, il sotto-insieme piano *illimitato* di \mathcal{E} compreso tra ξ e ρ (i lati dell'angolo) e generato con una rotazione di ρ anti-oraria (+) od oraria (-) dalla configurazione di sovrapposizione con ξ (angolo di *ampiezza*, o *misura*, nulla).

Si definisce *settore angolare* il sotto-insieme di angolo piano che *contiene il polo* e che sottende un arco γ di *sezione conica* centrata nel polo. L'arco γ è detto *supporto (finito)* dell'angolo. Poiché il polo è un punto euclideo ordinario, un tale supporto *non può* essere un ramo di parabola – avendo, questa, il centro all'*infinito* – ma *solo* un ramo di *ellisse* o di *iperbole* (coniche *a-centro*).

Per ragioni complessive di consistenza, semplicità ed estetica, γ è scelto *normomorfo* [*], i.e.,

- è rappresentato dall'equazione cartesiana *ristretta* di una conica a-centro in forma *canonica*,
- ha il semi-asse *focale*, X^+ , coincidente con la semiretta ξ di riferimento angolare e i segmenti coniugati di simmetria – indicati comunemente con a e b – *congruenti* (geometricamente) tra loro,
- γ è percorribile con *continuità*, simmetricamente rispetto a X^+ , ed è *generalmente regolare*.

Ne segue che un supporto *ellittico normomorfo* è un arco di **circonferenza**, $\gamma \equiv \mathcal{C}$, mentre un supporto *iperbolico normomorfo* è un arco di **ramo destro di iperbole equilatera**, $\gamma \equiv \mathfrak{H}^+$.

Tali supporti angolari corrispondono alle *sole due* possibili goniometrie in \mathcal{E} , quella (*ellittico*-) *circolare*, in breve, *circolare*, e quella *iperbolico* (-*equilatera*), in breve, *iperbolica*.

Tutti gli angoli in \mathcal{E} sono associabili a una Goniometria Circolare ma *non tutti* a una Goniometria Iperbolica. La ragione di ciò è geometricamente evidente: il supporto *circolare* \mathcal{C} può includere qualsiasi direzione del raggio vettore mentre il supporto *iperbolico* \mathfrak{H}^+ può includere, al più, un angolo η *asintoticamente retto* ($\eta \in (-45^\circ, 45^\circ)$) vs. la semiretta $\xi \equiv X^+$ di riferimento.

In coerenza con la definizione primitiva di *angolo* come *sotto-insieme (illimitato) di punti del piano* \mathcal{E} , l'*ampiezza operativa* di un angolo si definisce *normalizzando* – i.e., *riducendo al finito* – l'area del settore angolare – sia *circolare* che *iperbolico* – vs. l'area triangolare generalizzata $(1/2)a \cdot a \equiv a^2/2$, essendo $a \in \mathbb{R}^+$ la distanza tra il polo e il punto di intersezione $\gamma \cap X^+$ (i.e., o la misura del *raggio* di $\gamma \equiv \mathcal{C}$ o l'*ascissa* del vertice di $\gamma \equiv \mathfrak{H}^+$).

Pertanto, si assegna *formalmente* l'area generalizzata (e *normalizzata*) $a^2/2$, associandola all'ampiezza di **1 grado radiante**, sia esso **circolare** (1 rad) che, rispettivamente, **iperbolico** (1 radh).

Il fondamento teorico poggia sull'identità analitica $e^{i\varphi} \equiv \cos \varphi + i \sin \varphi$, attribuita al sommo EULER (LEONHARD, 1707-1783) ma maturata, presumibilmente, in indagini precorritrici di BERNOULLI (JACOB, 1654-1705), di TAYLOR (BROOK, 1685-1731) e di MACLAURIN (COLIN, 1698-1746) e al chiarimento del significato dell'unità immaginaria i e, quindi, delle proprietà costitutive del campo \mathbb{C} .

C M

[*] Neologismo introdotto (e proposto) da chi scrive.

GONIOMETRIA CIRCOLARE (non-normalizzata)

Dall'equazione del supporto circolare *massimale* \mathcal{C} di raggio a , v. Fig. 1,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

si individuano i punti $A \equiv (a; 0)$ e $P \equiv (\bar{x}; \bar{y}) := (a \cos \varphi; a \sin \varphi) \equiv (\overline{OH}; \overline{PH})$.

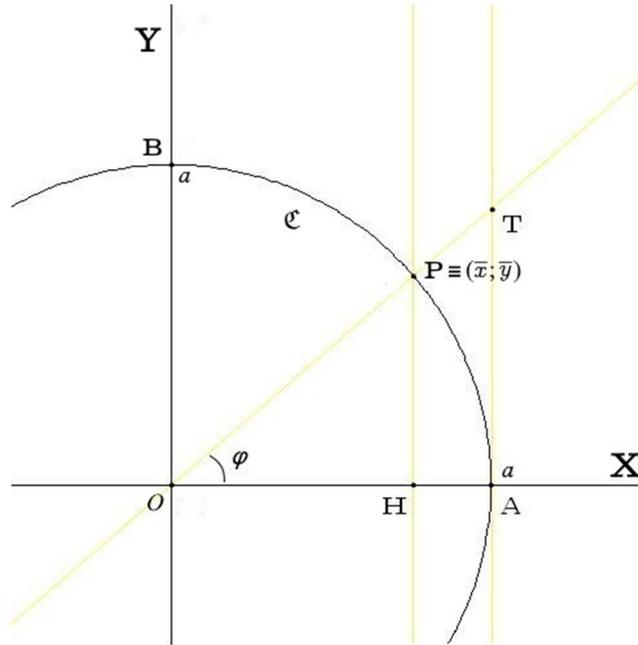


Fig. 1

La similitudine $OAT \approx OHP$ implica la proporzione $AT : PH = OA : OH$; da questa, passando alle misure dei lati, si scrive $\frac{\overline{AT}}{a \sin \varphi} = \frac{a}{a \cos \varphi}$, i.e., $\overline{AT} = a \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} := a \tan \varphi \equiv a(\bar{y}/\bar{x})$.

Quindi, poiché $T \equiv (a; a \tan \varphi)$ e $\varphi = \tan^{-1}(\bar{y}/\bar{x})$, si deducono tutte le identità della Goniometria Circolare sia *diretta* che *inversa*. □

Ampiezza φ del settore circolare $O\widehat{AP}$ di area A_c

In generale, si *definisca*, dalla funzione formale \tan^{-1} dell'Analisi, il parametro variabile

$$\varphi := \frac{A_c}{a^2/2} \equiv \tan^{-1}(y(x)/x). \quad (1)$$

Mediante l'Eq. (1), risulta che,

il **grado radiante circolare, rad**, è l'unità di misura dell'ampiezza (operativa) φ di un angolo al centro di \mathcal{C} . 1 rad corrisponde a un settore circolare di area $A_c = a^2/2$.

Pertanto, l'unità **rad** è riferita, direttamente/inversamente alle funzioni goniometriche circolari sia inverse che dirette (\tan , \cos^{-1} , etc.). Ad esempio, con la scrittura $\varphi = \cos^{-1} u$, si intende che il valore corrispondente a φ è espresso in *gradi radianti circolari*.

Allora, consistentemente con l'Eq. (1), si giustifica il calcolo classico vs. $P \equiv (x; y)$ generico

$A_c =$ area del triangolo OHP + area del semi-segmento circolare \widehat{HAP}

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}|xy| + \int_x^a |y(t)| dt \\
 &= \frac{1}{2}|xy| + \int_x^a (a^2 - t^2)^{1/2} dt \\
 &= \frac{1}{2}|xy| + \frac{1}{2} \left(t(a^2 - t^2)^{1/2} + a^2 \sin^{-1} \frac{t}{a} \right) \Big|_x^a \\
 &= \frac{1}{2} \cancel{|xy|} - \frac{1}{2} \cancel{|xy|} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) \\
 &\equiv \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{\cancel{\rho} \cos \varphi}{\cancel{\rho}} \right) \\
 &= \frac{a^2}{2} \varphi \equiv \frac{a^2}{2} \tan^{-1} \frac{y}{x} .
 \end{aligned} \tag{2}$$

■

GONIOMETRIA IPERBOLICA (non-normalizzata)

Dall'equazione algebrica di 2° grado

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

con $a \in \mathbb{R}^+$, si esplicita la *restrizione* $x = (y^2 + a^2)^{1/2}$, rappresentativa del supporto iperbolico *massimale* \mathfrak{H}^+ (v. Fig. 2) e soggetta, in \mathbb{R} , alla condizione $|y| < x$. Su \mathfrak{H}^+ , si individuano i punti $A \equiv (a; 0)$ e $P \equiv (\bar{x}; \bar{y}) := (a \cosh \eta; a \sinh \eta) \equiv (\overline{OH}; \overline{PH})$, con $\eta \equiv P\hat{O}H$.

L'introduzione dei simboli *cosh*, *sinh* e di quelli dedotti successivamente (*tanh*, \cosh^{-1} , etc.) va intesa, per ora, in senso puramente *formale*, motivata unicamente dalla ricerca di un'analogia con le funzioni goniometriche circolari ma *ignorando* le connessioni fondamentali esistenti, come si vedrà, con la coppia di funzioni esponenziali $\eta \mapsto e^{\pm \eta}$.

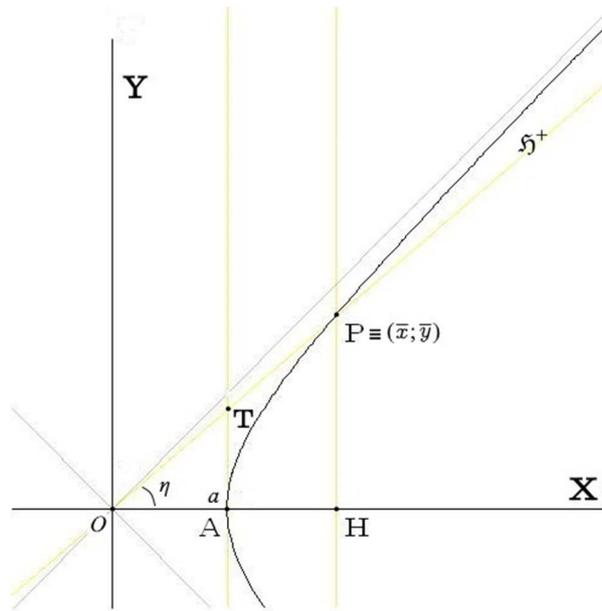


Fig. 2

Poiché $T \in r_{OP}$, la similitudine $OAT \simeq OHP$ implica la proporzione $AT:PH = OA:OH$. Da questa, si scrive $\frac{\overline{AT}}{a \sinh \eta} = \frac{a}{a \cosh \eta}$, i.e., $\overline{AT} = a \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} := a \tanh \eta \equiv a(\bar{y}/\bar{x})$, in termini delle misure dei lati. Segue che $T \equiv (a; a \tanh \eta)$ e $\eta = \tanh^{-1}(\bar{y}/\bar{x})$. □

Ampiezza η del settore iperbolico \widehat{OAP} di area $A_{\mathfrak{H}}$

In generale, si *definisca*, dalla funzione *formale* \tanh^{-1} dell'Analisi, il parametro variabile

$$\eta := \frac{A_{\mathfrak{H}}}{a^2/2} \equiv \tanh^{-1}(y(x)/x). \quad (3)$$

Mediante l'Eq. (3), risulta che

il **grado radiante iperbolico**, **radh**, è l'unità di misura dell'ampiezza (operativa) η di un angolo al centro \hat{OAP} di \mathfrak{H}^+ . 1 radh corrisponde a un settore iperbolico di area $A_{\mathfrak{H}^+} = a^2/2$.

Pertanto, l'unità radh è riferita a tutte le funzioni goniometriche iperboliche, sia dirette che inverse, (\cosh , csch^{-1} , etc.). Detto altrimenti, con la scrittura $\eta = \operatorname{csch}^{-1}u$, si intende che il valore η è espresso in *gradi radianti iperboliche*.

Allora, consistentemente con l'Eq. (3), nel semipiano $[a, +\infty) \times Y$, si giustifica il calcolo classico vs. $P \equiv (x; y)$ generico

$$\begin{aligned}
 A_{\mathfrak{H}^+} &= \text{area del triangolo } OHP - \text{area del semi-segmento iperbolico } \widehat{PAH} \\
 &= \frac{1}{2}x|y| - \int_a^x |y(t)| dt = \frac{1}{2}x|y| - \int_x^a (t^2 - a^2)^{1/2} dt \\
 &= \frac{1}{2}x|y| - \frac{1}{2}(t(t^2 - a^2)^{1/2} - a^2 \ln(t + (t^2 - a^2)^{1/2})) \Big|_x^a = \frac{1}{2}x|y| - \frac{1}{2}x|y| + \frac{a^2}{2} \ln \frac{x+y}{a} \\
 &= \frac{a^2}{2} \ln \frac{x+y}{(x^2 - y^2)^{1/2}} \equiv \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{(x+y)^2}{x^2 - y^2} \right)^{1/2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x+y}{x-y} \right) \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+y/x}{1-y/x} \right) \equiv \frac{a^2}{2} \tanh^{-1} \frac{y}{x} \equiv \frac{a^2}{2} \eta, \tag{4}
 \end{aligned}$$

in analogia *formale* completa con l'Eq. (2).

Dunque, appare suggestiva (e plausibile) l'ipotesi della definibilità di una *Goniometria Iperbolica* in \mathbb{R} , analoga strutturalmente e operativamente a quella *Circolare*.

Una linea meditata di procedimento suggerisce l'individuazione di rappresentazioni per le funzioni \cosh e \sinh tali che i valori delle coordinate cartesiane $(x; y) \equiv (a \cosh \eta; a \sinh \eta)$ del generico punto $P \in \mathfrak{H}^+$ risultino composte appropriatamente attraverso una funzione elementare **univoca** $\eta \mapsto w(\eta)$ dell'*ampiezza iperbolica* η . Inoltre, è auspicabile che la richiesta di *consistenza* tra il modello ipotizzato di Goniometria Iperbolica e il grafico di \mathfrak{H}^+ possa essere soddisfatta mediante espressioni *le più semplici possibile* per le funzioni composte $\eta \mapsto x(w(\eta))$ e $\eta \mapsto y(w(\eta))$.

La rappresentazione *canonica* $x^2 - y^2 = a^2$ di \mathfrak{H}^+ è separabile nella forma equivalente

$$x/a + y/a = \frac{1}{x/a - y/a}. \tag{5}$$

L'uguaglianza (5) evidenzia il *vincolo di uguaglianza* della somma dei valori di funzioni composte attraverso la funzione (sperabilmente) elementare w – ancora ignota – con il *reciproco* della loro differenza. Poiché tale vincolo deve valere $\forall \eta \in (-\pi/4 \text{ rad}, \pi/4 \text{ rad}) \equiv (-\infty \text{ radh}, +\infty \text{ radh})$, i.e., $\forall \eta$ (in radh) $\in \mathbb{R}$, si fissano le definizioni

$$\begin{cases} x/a + y/a := w(\eta), \\ x/a - y/a := 1/w(\eta), \end{cases} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Sul grafico di \mathfrak{H}^+ , $x \equiv x(\eta)$, è invariante nella riflessione assiale $\eta \mapsto -\eta$ mentre $y \equiv y(\eta)$ si trasforma in $-y(\eta)$. Così, da $1/w(\eta) \equiv x/a + (-y)/a$, si *inferisce* il carattere *esponenziale* di $w(\eta)$ al variare del suo argomento η : $1/w(\eta) \equiv w(-\eta)$. Risolto vs. a x e y , il sistema (6) dà

$$\begin{cases} x = a \frac{w(\eta) + 1/w(\eta)}{2} \equiv a \frac{w(\eta) + w(-\eta)}{2} \equiv x(\eta), \\ y = a \frac{w(\eta) - 1/w(\eta)}{2} \equiv a \frac{w(\eta) - w(-\eta)}{2} \equiv y(\eta). \end{cases} \tag{7}$$

Le rappresentazioni (7) delle coordinate cartesiane dei punti del grafico di \mathfrak{H}^+ mostrano che, vs. il parametro η , $\eta \mapsto x(\eta)$, è una funzione *pari* mentre $\eta \mapsto y(\eta)$ è una funzione *dispari*; in altre parole, esse costituiscono, rispettivamente, la componente *pari* e la componente *dispari* di w .

Riepilogando le caratteristiche risultanti di w , si ha che

$$\begin{cases} w(\eta) \in \mathbb{R}^+, \\ 1/w(\eta) \equiv w(-\eta), \\ w(\eta) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad (\text{almeno}), \\ w \in \mathcal{M}^\uparrow \quad (\text{crescente}). \end{cases} \quad (8)$$

Infatti,

- la condizione $w \in \mathbb{R}^+$ segue dall'essere $x \equiv a(w + 1/w)/2 \geq a$, i.e., $(w + 1/w)/2 \geq 1$;
- della seconda, si è già detto circa il suo carattere *esponenziale* vs. $\eta \in \mathbb{R}$;
- la continuità e la crescita monotona ($\therefore \mathcal{M}^\uparrow$) di x in $[a, +\infty)$ implicano la *continuità* e la *crescita monotona* di w vs. $\eta \in \mathbb{R}$.

Ovviamente, anche la variabile reciproca $1/w(\eta) \in \mathbb{R}^+$ risulta definita e continua in \mathbb{R} benché decrescente ($\in \mathcal{M}^\downarrow$). Inoltre, $\sup_{\eta \in \mathbb{R}} w = \sup_{\eta \in \mathbb{R}} (1/w) = +\infty$, mentre $\inf_{\eta \in \mathbb{R}} w = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} (1/w) = 0^+$.

Ora, la richiesta che le variazioni *continue* di $x \in [a, +\infty)$ e di $y \in \mathbb{R}$ siano rappresentabili dalle composizioni (7) di un'unica funzione *elementare* $\eta \mapsto w(\eta)$ che soddisfi le proprietà (8) rende sostanzialmente *obbligata* la scelta di una *funzione esponenziale con base > 1*.

La definizione *convenzionale* $\eta \mapsto w(\eta) := e^\eta$ nelle Eq.i (7) *soddisfa identicamente* l'Eq. (4).

Pertanto, $\forall (x; y) \in \mathfrak{H}^+$, si definiscono

$$\begin{cases} x \equiv a \cosh \eta := a \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2} \\ y \equiv a \sinh \eta := a \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} \end{cases}. \quad (9)$$

Insieme con le rappresentazioni dei valori delle funzioni *sinh* e *cosh*, le Eq.i (9) forniscono immediatamente la definizione della funzione *tanh* e la sua limitazione principale,

$$-1 < \frac{y}{x} \equiv \tanh \eta = \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}} \left(\equiv \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1} \equiv \frac{1 - e^{-2\eta}}{1 + e^{-2\eta}} \right) < 1. \quad (10)$$

Dunque, le definizioni (9) e il calcolo integrale di $\Omega_{\mathfrak{H}}$ precedente risultano *chiusi* rispetto alla definizione geometrica fondamentale (2), giustificando l'esistenza di una **Goniometria Iperbolica** formalmente strutturata – sotto *vincoli specifici* – in modo *del tutto analogo* a quella Circolare. ■

La Funzione di Gudermann

La *Funzione di Gudermann* ([†]) (o *Gudermanniana* o *ampiezza iperbolica*), gd , è un'applicazione trascendente che connette, direttamente in \mathbb{R} , mediante composizione, le funzioni *circolari* con quelle *iperboliche*. In tal modo, essa costituisce un'alternativa interessante – benché meno nota e meno agevole – alle *Formule di Euler*. Essa, però, evita il ricorso a rappresentazioni in \mathcal{C} .

La definizione,

$$x \mapsto gd\ x := 2 \tan^{-1}(e^x) - \pi/2, \tag{11}$$

indica che $gd \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, è una funzione con codominio *principale* $(-\pi/2, \pi/2)$, limitata, dispari, monotona $\in \mathcal{M}^\uparrow$ e, quindi, *invertibile*. La simmetria centrale di $graf(gd)$, v. Fig. 3, è verificata facilmente notando, dall'identità

$$\tan^{-1}(e^{-x}) \equiv \cot^{-1}(e^x) \equiv \pi/2 - \tan^{-1}(e^x),$$

La funzione $x \mapsto gd\ x \equiv y$ (ramo principale)

che gd è una funzione *dispari* vs. il suo argomento.

Infatti,

$$\begin{aligned} gd(-x) &= 2(\pi/2 - \tan^{-1}(e^x)) - \pi/2 \\ &= -(2 \tan^{-1}(e^x) - \pi/2) \equiv -gd\ x. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Il valore $y \equiv gd\ x$ è chiamato il *gudermanniano* di x o l'*ampiezza iperbolica* di x .

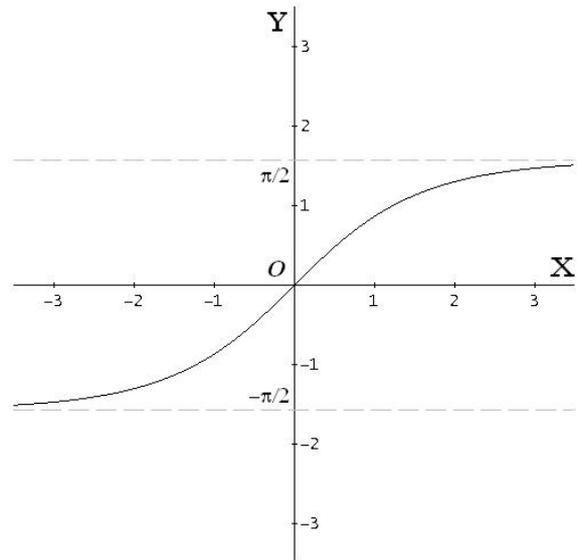


Fig. 3

La funzione *inversa*, $x \mapsto gd^{-1}x$, è esprimibile, in forma simmetrica vs. la bisettrice del 1° e del 3° quadrante cartesiano, come l'applicazione, *periodica*, dispari e $\in \mathcal{M}^\uparrow$

$$x \mapsto gd^{-1}x \equiv \ln(\tan(x/2 + \pi/4)) \equiv \ln\left(\frac{\tan(x/2) + 1}{1 - \tan(x/2)}\right) \equiv \ln(\sec x + \tan x), \tag{12}$$

avente l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ come dominio *principale*, a frontiera asintotica (v. Fig. 4, p. 9).

Invertendo l'Eq. (11) vs. la funzione \tan^{-1} , si trova che

$$e^x = \tan((1/2)gd\ x + \pi/4) \tag{13}$$

e, mediante le Eq.i (13) e (11), che

$$e^{-x} = \tan((1/2)gd(-x) + \pi/4) = -\tan((1/2)gd\ x - \pi/4). \tag{14}$$

Ora, tenendo presente l'identità goniometrica

$$\tan(\alpha - \pi/4) \equiv \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}, \tag{15}$$

si scrive, dall'Eq. (13),

$$\begin{aligned} \tanh \frac{x}{2} &\equiv \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} \equiv \frac{\cancel{e^{-x/2}} (e^x - 1)}{\cancel{e^{-x/2}} (e^x + 1)} \equiv \frac{\tan((1/2)gd x + \pi/4) - 1}{\tan((1/2)gd x + \pi/4) + 1}, \\ &= \tan((1/2)gd x), \end{aligned}$$

quest'ultima, dall'identità (15), nella quale, sia $\alpha \equiv (1/2)gd x + \pi/4$.

Quindi, eseguendo la dilatazione $x \mapsto 2x$, si arriva all'uguaglianza fondamentale

$$\tanh x = \tan((1/2)gd(2x)). \quad (16)$$

Con la posizione $y := (1/2)gd(2x)$ nell'Eq. (16), insieme con quella inversa $x \equiv (1/2)gd^{-1}(2y)$, e, infine, eseguendo lo scambio $x \Leftrightarrow y$, si ottiene la relazione simmetrica

$$\tan x = \tanh((1/2)gd^{-1}(2x)). \quad (17)$$

A loro volta, le Eq.i (13) e (14) sono le generatrici delle *relazioni di trasformazione in \mathbb{R}* tra le Funzioni Iperboliche e quelle Circolari.

Ad esempio, posto $\eta := gd x$, risulta

$$\begin{aligned} \sinh x &\equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(\tan(\eta/2 + \pi/4) + \tan(\eta/2 - \pi/4)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tan(\eta/2) + 1}{1 - \tan(\eta/2)} + \frac{\tan(\eta/2) - 1}{1 + \tan(\eta/2)} \right) = \frac{2 \tan(\eta/2)}{1 - (\tan(\eta/2))^2} \\ &\equiv \tan \eta \equiv \tan(gd x) \equiv (\tan \circ gd)(x). \end{aligned}$$

Con le altre cinque identità, determinate facilmente in modo analogo dalle forme esponenziali rispettive, si completa la tabella seguente:

$$\begin{array}{ll} \cosh x \equiv \sec(gd x) & \operatorname{sech} x \equiv \cos(gd x) \\ \sinh x \equiv \tan(gd x) & \operatorname{csch} x \equiv \cot(gd x) \\ \tanh x \equiv \sin(gd x) & \operatorname{coth} x \equiv \csc(gd x) \end{array}. \quad (18)$$

La posizione $y := gd x$, a destra nelle Eq. (18), e dell'inversa (biunivoca) $x \equiv gd^{-1}y$, a sinistra, seguita dallo scambio $x \Leftrightarrow y$, generano la tabella delle relazioni simmetriche di connessione:

$$\begin{array}{ll} \cos x \equiv \operatorname{sech}(gd^{-1}x) & \sec x \equiv \cosh(gd^{-1}x) \\ \sin x \equiv \tanh(gd^{-1}x) & \csc x \equiv \operatorname{coth}(gd^{-1}x) \\ \tan x \equiv \sinh(gd^{-1}x) & \cot x \equiv \operatorname{csch}(gd^{-1}x) \end{array}. \quad (19)$$

Le tabelle (18) e (19) consentono la riscrittura di tutte le identità goniometriche, sia *circolari* che (*equilatero*-)*iperboliche*, prendendo i valori delle funzioni reali gd e gd^{-1} come argomenti.

Le varie identità *quadratiche* – immediatamente riconoscibili – assumono, e.g., le forme seguenti:

$$\bullet \quad (\operatorname{sech}(gd^{-1}x))^2 + (\tanh(gd^{-1}x))^2 = 1, \quad (20.1)$$

$$\bullet \quad (\cosh(gd^{-1}x))^2 - (\sinh(gd^{-1}x))^2 = 1, \quad (20.2)$$

$$\bullet \quad (\operatorname{coth}(gd^{-1}x))^2 - (\operatorname{csch}(gd^{-1}x))^2 = 1, \quad (20.3)$$

$$\bullet \quad (\cosh(gd^{-1}x))^2 + (\operatorname{coth}(gd^{-1}x))^2 = (\cosh(gd^{-1}x))^2 (\operatorname{coth}(gd^{-1}x))^2, \quad (20.4)$$

$$\bullet \quad (\sec(gd x))^2 - (\tan(gd x))^2 = 1, \quad (20.5)$$

$$\bullet \quad (\sin(gd x))^2 + (\cos(gd x))^2 = 1, \quad (20.6)$$

$$\bullet \quad (\csc(gd x))^2 - (\cot(gd x))^2 = 1, \quad (20.7)$$

$$\bullet \quad (\cot(gd x))^2 - (\cos(gd x))^2 = (\cot(gd x))^2 (\cos(gd x))^2. \quad (20.8)$$

■

Funzioni Derivate

Operando direttamente sulle definizioni, Eq.i (11) e (12), si calcolano

$$x \mapsto \frac{d}{dx} gd x \equiv \frac{d}{dx} (2 \tan^{-1}(e^x) - \pi/2) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \equiv \operatorname{sech} x, \quad (21)$$

$$x \mapsto \frac{d}{dx} gd^{-1} x \equiv \frac{d}{dx} \ln(\tan(x/2 + \pi/4)) = \dots = \frac{1}{\sin(x + \pi/2)} \equiv \frac{1}{\cos x} \equiv \sec x. \quad (22)$$

Quindi, incominciando dalle Eq.i (21) e (22) e sfruttando il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, si deducono prontamente le seguenti

■

Rappresentazioni Integrali à-la Picard-Peano

$$gd x (= 2 \tan^{-1}(e^x) - \pi/2) \equiv \int_0^x \operatorname{sech} u \, du, \quad (23)$$

$$gd^{-1} x (= \ln(\tan(x/2 + \pi/4))) \equiv \int_0^x \sec u \, du. \quad (24)$$

In intervalli *compatti* appropriati, dove è *garantita* la convergenza *uniforme*, esistono le seguenti

Espansioni in Serie di Funzioni-tangente

Invertendo l'Eq. (16) ed eseguendo, quindi, la compressione $x \mapsto x/2$, risulta

$$gd x = 2 \tan^{-1}(\tanh(x/2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\tanh(x/2))^{2n+1}, \quad (25)$$

dove, $\tanh(x/2) \in (-1, 1)$. In particolare, quando $x \in [x_1, x_2] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, l'espansione (25) è equivalente alla rappresentazione in *serie di potenze* (lo si verifichi)

$$gd x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \equiv x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^5 - \frac{61}{5040} x^7 + \frac{277}{72566} x^9 - \frac{50521}{39916800} x^{11} + \dots, \quad (25.1)$$

nella quale, E_{2n} indica il $2n$ -simo *numero di Euler* ([‡]).

Analogamente, invertendo l'Eq. (17) e facendo seguire la compressione $x \mapsto x/2$, si ha

$$gd^{-1} x = 2 \tanh^{-1}(\tan(x/2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} (\tan(x/2))^{2n+1}, \quad (26)$$

essendo $\tan(x/2) \in (-1, 1)$, i.e., $x \in ((2k - 1)\pi/2, (2k + 1)\pi/2)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. In particolare, nel caso in cui si ha $x \in [x_1, x_2] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, l'espansione (26) equivale alla rappresentazione in serie di potenze (lo si verifichi, confrontandola con l'espansione (25.1))

$$gd^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \equiv x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{61}{5040}x^7 + \frac{277}{72566}x^9 + \frac{50521}{39916800}x^{11} + \dots \quad (26.1)$$

Infine, dalle Tabelle (18) e (19), dovrebbe risultare del tutto evidente quali siano, per $x = o(1)$, le espansioni in serie di potenze di $x \mapsto \sec(gd x)$ o di $x \mapsto \coth(gd^{-1}x)$, etc. .

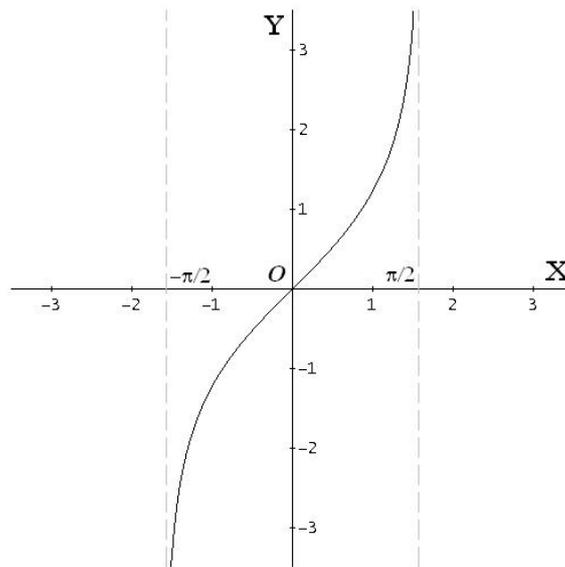


Fig. 4 - Grafico della funzione $x \mapsto gd^{-1}x \equiv y$ (ramo principale)

Osservazione

Il lavoro di Gudermann diede fondamento analitico definitivo alle intuizioni empiriche geniali del geografo, cartografo e agrimensore fiammingo Gerhard Kremer (1512-1594) (latinizz. in MERCATOR, come per il matematico e astronomo tedesco Nikolaus Kauffmann (1620-1687), figura preminente nel periodo introduttivo dei logaritmi). La *proiezione cilindrica modificata di Kremer* (Gerardus Mercator) poggia sulle funzioni gd , gd^{-1} e sulle loro varie rappresentazioni sia in serie sia differenziali sia integrali. Tale proiezione cilindrica è ancora utilizzata, e.g., nella navigazione in versioni più o meno aggiornate e adattate. Una presentazione dell'argomento si trova in:

https://it.wikipedia.org/wiki/Proiezione_cilindrica_centrografica_modificata_di_Mercatore .

■

(†) CHRISTOPH GUDERMANN (1798-1852), studioso delle Funzioni Iperboliche, delle Funzioni Sferiche Speciali e delle Funzioni Ellittiche, docente e guida influente dell'allievo K. W. T. Weierstrass all'Accademia di Münster.

(‡) Il procedimento classico (di Euler) per la determinazione delle espansioni (25.1) e (26.1) è approfondito, con dettagli e vari esempi svolti, e.g., nel math-notebook: *Determinazione di serie di potenze in \mathbb{R} dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler*, Eq.i (61) e (62), raggiungibile dalla home-page corrente.

Conversioni rad \Leftrightarrow radh

Dal grafico del ramo \mathfrak{H}^+ (Fig. 2), risultano *formalmente* evidenti le identità biunivoche

$$\tan \eta \equiv \overline{AT/a} \equiv \tanh \eta, \quad (27)$$

dove, è inteso – non sembra inutile ricordarlo – che la funzione \tan opera sull'argomento η come espresso in **rad** mentre la funzione \tanh opera sullo *stesso* argomento η come espresso in **radh**.

Invertendo l'Idn. (27) bilateralmente e ricorrendo alla *Funzione di Gudermann* e alla sua inversa si scrivono le formule di conversione, reciprocamente *inverse*,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \eta \text{ (in radh)} &= \tanh^{-1}(\tan \eta) \equiv \tanh^{-1}(\tanh((1/2)gd^{-1}(2\eta))) \equiv (1/2)gd^{-1}(2\eta) \\ &= (1/2)\ln(\tan(\eta \text{ (in rad)} + \pi/4)); \end{aligned} \quad (28.1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \eta \text{ (in rad)} &= \tan^{-1}(\tanh \eta) \equiv \tan^{-1}(\tan((1/2)gd(2\eta))) \equiv (1/2)gd(2\eta)gd(2\eta) \\ &= \tan^{-1}(e^{2\eta \text{ (in radh)}}) - \pi/4. \end{aligned} \quad (28.2)$$

Esempi:

- $\tan^{-1}(\tanh(1 \text{ radh})) \approx 0.65088 \text{ rad} \approx (26\pi/25) \text{ rad} \approx 37^\circ 17' 34''$;
- $\tan^{-1}(\tanh(-\pi \text{ radh})) \approx -0.78353 \text{ rad} \approx -(499\pi/2000) \text{ rad} \quad (> -\pi/4 \text{ rad}) \approx -44^\circ 53' 35''$;
- $\tanh^{-1}(\tan(-\pi/6 \text{ rad})) \approx -0.65848 \text{ radh}$;
- $\tanh^{-1}(\tan(44^\circ 59' 59'')) \approx 6.11846 \text{ radh}$;
- $\tanh^{-1}(\tan(-2\pi/5 \text{ rad})) \notin \mathbb{R}$
perché $\tan(-2\pi/5 \text{ rad}) \equiv -\tan 72^\circ = -(5 + 2 \cdot 5^{1/2})^{1/2} < -1 \equiv \tan(-\pi/4 \text{ rad})$;
- $\lim_{\eta \rightarrow \pm\pi/4 \text{ rad}} \tanh^{-1}(\tan \eta) = \pm\infty \text{ radh}$;
- $\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty \text{ radh}} \tan^{-1}(\tanh \eta) = \pm\pi/4 \text{ rad}$.

■

Completamento delle rappresentazioni geometriche

1. Con riferimento al caso *ellittico-circolare* (Fig. 5),

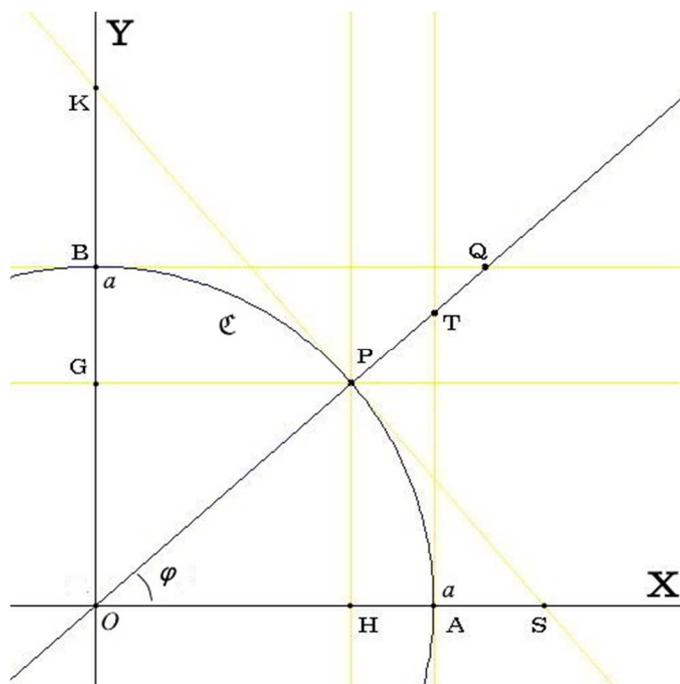


Fig. 5

la similitudine $OBQ \approx OGP$ implica la proporzione $BQ:OB = GP:OG$, i.e., in termini delle misure dei segmenti, si ha $\frac{\overline{BQ}}{a} = \frac{\overline{GP}}{\overline{OG}} \equiv \frac{\varphi \cos \varphi}{\varphi \sin \varphi} := \cot \varphi$. Segue che

$$\overline{BQ} = a \cot \varphi; \quad (29)$$

la similitudine $OPS \approx OHP$ implica la proporzione $OS:OP = OP:OH$, i.e., in termini delle misure dei segmenti, è determinato dal 1° Teorema di Euclide, $\overline{OP}^2 = \overline{OS} \cdot \overline{OH}$, i.e., $a^2 = \overline{OS} \cdot a \cos \varphi$. Segue che

$$\overline{OS} = \frac{a}{\cos \varphi} := a \sec \varphi; \quad (30)$$

la similitudine $OPK \approx OGP$ implica la proporzione $OK:OP = OP:OG$ che, in termini delle misure dei segmenti, è determinato dal 1° Teorema di Euclide, $\overline{OP}^2 = \overline{OK} \cdot \overline{OG}$, i.e., $a^2 = \overline{OK} \cdot a \sin \varphi$. Segue che

$$\overline{OK} = \frac{a}{\sin \varphi} := a \csc \varphi. \quad (31)$$

Si osservi l'allineamento dei punti P , T e Q sulla retta r_{OPQ} : il punto Q si sposta davanti, o dietro, al punto T , secondo come varia l'ampiezza circolare φ .

□

2. Con riferimento al caso *iperbolico-equilatero* (Fig. 6),

oltre ai punti $P \equiv (\bar{x}; \bar{y}) \equiv (a \cosh \eta; a \sinh \eta)$, con $\eta \equiv P\hat{O}M$ e $A \equiv (a; 0)$, si consideri il punto $B \equiv (0; a)$, allineato con i punti Q e F sulla retta $y = a$. Siano K e H , le proiezioni ortogonali di Q e di P , rispettivamente, sull'asse X .

La similitudine $OKQ \simeq OHP$ implica la proporzione $OK : OH = KQ : HP$, i.e., in termini di misure dei segmenti, risulta $\frac{\overline{OK}}{a \cosh \eta} = \frac{\overline{KQ}}{HP} \equiv \frac{\varrho}{\varrho \sinh \eta}$. Segue che

$$\overline{OK} = \frac{a \cosh \eta}{\sinh \eta} := a \coth \eta. \quad (32)$$

Inoltre, costruito il triangolo OFM , rettangolo in $F \equiv (a \cosh \eta; a)$, il 2° Teorema di Euclide determina il quadrato $\overline{FH}^2 = \overline{OH} \cdot \overline{HM}$, i.e., $a^2 = a \cosh \eta \cdot \overline{HM}$, da cui, si ha

$$\overline{HM} = \frac{a}{\cosh \eta} := a \operatorname{sech} \eta. \quad (33)$$

Analogamente, costruito il triangolo OGN , rettangolo in $G \equiv (a; a \sinh \eta)$, poiché vale il quadrato $\overline{SN}^2 = \overline{OS} \cdot \overline{SN}$, i.e., $a^2 = a \sinh \eta \cdot \overline{SN}$, allora, risulta

$$\overline{SN} = \frac{a}{\sinh \eta} := a \operatorname{csch} \eta. \quad (34)$$

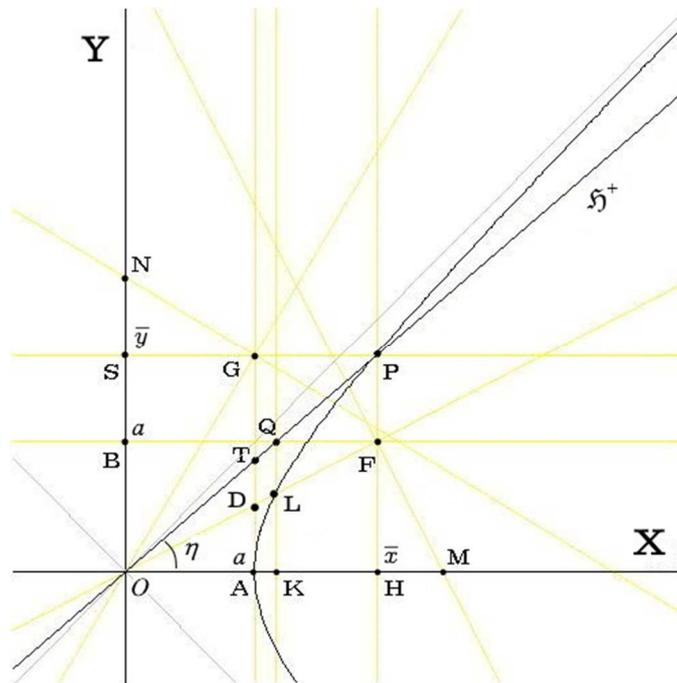


Fig. 6

Analogamente, i punti P , Q e T , inizialmente sovrapposti sulla retta r_{OP} in $A (x = a)$, si separano per poi tornare a sovrapporsi sull'asintoto $(\bar{y}/\bar{x} \rightarrow 1^-)$ a distanza crescente di P da A , seguendo la decrescita continua della *curvatura* di \mathfrak{H}^+ , da a/b^2 a 0, al crescere della *ampiezza iperbolica* η .

■

Qui di seguito, sono riportati gli elementi significativi, punti e rette, necessari nella costruzione geometrica mostrata nella Fig. 6:

assegnato il punto-base $P \equiv (\bar{x}; \bar{y}) \equiv (a \cosh \eta; a \sinh \eta) \in \mathfrak{H}^+$, si determinano agevolmente i punti

$$A \equiv (a; 0), \quad K \equiv (a\bar{x}/\bar{y}; 0), \quad H \equiv (\bar{x}; 0), \quad M \equiv (\bar{x} + a^2/\bar{x}; 0),$$

$$D \equiv (a; a^2/\bar{x}), \quad L \equiv (a\bar{x}/\bar{y}; a^2/\bar{y}), \quad F \equiv (\bar{x}; a),$$

$$T \equiv (a; a\bar{y}/\bar{x}), \quad Q \equiv (a\bar{x}/\bar{y}; a),$$

$$G \equiv (a; \bar{y}),$$

$$B \equiv (0; a), \quad S \equiv (0; \bar{y}), \quad N \equiv (0; \bar{y} + a^2/\bar{y}),$$

e le rette di sostegno

$$r_{OTQP} : y = (\bar{y}/\bar{x})x, \quad r_{ADTG} : x = a, \quad r_{BQF} : y = a, \quad r_{KLQ} : x = a\bar{x}/\bar{y},$$

$$r_{ODLF} : y = (a/\bar{x})x, \quad r_{FM} : y = -(\bar{x}/a)x + \bar{x}^2/a + a,$$

$$r_{OG} : y = (\bar{y}/a)x, \quad r_{NG} : y = -(a/\bar{y})x + a^2/\bar{y} + \bar{y}.$$

Osservazione

Dalla discussione precedente, appaiono evidenti le connessioni geometriche delle due Goniometrie, rispettivamente, dai due *Teoremi di Euclide* classici. A loro volta, questi discendono direttamente dal Teorema di Pitagora, il vero ‘Atlante’, sul quale, a ben vedere, poggia tutta la costruzione teorica presentata! ■

Funzioni su domini ristretti in \mathbb{R}

Sia $f : \mathcal{D}(\subseteq \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}(\subseteq \mathbb{R})$.

Quando esiste, si definisce **determinazione principale** di f la *restrizione* di f , *generalmente monotona*,

$$f|_{\mathcal{D}_0} : \mathcal{D}_0 \mapsto \mathcal{C},$$

a un sotto-dominio proprio convenzionale $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, detto l'**insieme principale di definizione** di f . Ciò implica, *generalmente*, che $\exists!$ (esiste un'unica) $(f|_{\mathcal{D}_0})^{-1} : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{D}_0$ (vs. \mathcal{D}_0 , *generalmente* significa: eccetto, al più, che per un numero *finito* di elementi $x \in \mathcal{D}_0$). (†)

Dunque, se la restrizione $f|_{\mathcal{D}_0}$ è definibile, essa conserva il co-dominio \mathcal{C} originario, risultando *generalmente bi-iettiva* tra \mathcal{D}_0 e \mathcal{C} .

Nella specificazione di \mathcal{D}_0 , si conviene di determinare $f|_{\mathcal{D}_0}$ così che l'insieme $\text{graf}(f|_{\mathcal{D}_0})$, detto il **ramo principale** di $\text{graf}(f)$, sia *simmetrico* o *anti-simmetrico* rispetto ad almeno uno degli assi del riferimento cartesiano e, possibilmente, che $0 \in \bar{\mathcal{D}}_0$ ($\equiv \mathcal{D}_0 \cup \partial \mathcal{D}_0$) ($\bar{\mathcal{D}}_0$ indica la *chiusura* di \mathcal{D}_0 , inclusiva della *frontiera* $\partial \mathcal{D}_0$). Da ciò, segue che la stessa specificazione della monotonia di f in \mathcal{D}_0 (crescita o decrescita in senso stretto *generalmente*) corrisponde a criteri di simmetria assiale o centrale evidenti.

Il valore $\bar{y} \equiv f(\bar{x})$, per $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$, costituisce un **valore principale** di f .

Salvo specificazione diversa, le operazioni analitiche formali su f , in primo luogo, le *derivazioni* e le *integrazioni*, sono riferite convenzionalmente a \mathcal{D}_0 .

Le tabelle alle P. 15-17 riportano gli insiemi *prodotto cartesiano* $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{C}$ delle funzioni-restrizione *trascendenti fondamentali*, nella rappresentazione esplicita consueta $x \mapsto f|_{\mathcal{D}_0}(x) \equiv y$.

I grafici rispettivi di tali funzioni – salvo quelli delle *Funzioni Esponenziale, Logaritmica e di Gudermann* diretta e inversa (v. P. 6 e 9) – si trovano alle pagine successive 18-21. ■

(†) Riguardo all'impostazione generale dell'argomento e alla terminologia, l'autore si ispira, regolarmente, al lavoro *eccellente*:

C. D. PAGANI - S. SALSA, *ANALISI MATEMATICA*, VOL. 1 & 2, ZANICHELLI (-MASSON) (1998).

**Domini e Codomini in \mathbb{R} delle
Funzioni(-restrizione) trascendenti elementari**

A. Le Funzioni-restrizione Circolari dirette e inverse

| | |
|--|------------------------------------|
| $x \mapsto f _{\mathcal{D}_0}(x) \equiv y$ | $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{C}$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $[0, \pi] \times [-1, 1]$ |
| $x \mapsto \cos^{-1} x$ | $[-1, 1] \times [0, \pi]$ |

| | |
|---|---|
| $x \mapsto \sin x$ | $[-\pi/2, \pi/2] \times [-1, 1]$ |
| $x \mapsto \sin^{-1} x$ | $[-1, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$ |
| $x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ | $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\infty, +\infty)$ |
| $x \mapsto \tan^{-1} x$ | $(-\infty, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ |

| | |
|---|--------------------------------------|
| $x \mapsto \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$ | $(0, \pi) \times (-\infty, +\infty)$ |
| $x \mapsto \cot^{-1} x$ | $(-\infty, +\infty) \times (0, \pi)$ |

| | |
|--|---|
| $x \mapsto \sec x := \frac{1}{\cos x}$ | $\{[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]\} \times \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ |
| $x \mapsto \sec^{-1} x$ | $\{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \times \{[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]\}$ |

| | |
|--|--|
| $x \mapsto \csc x := \frac{1}{\sin x}$ | $\{[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]\} \times \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ |
| $x \mapsto \csc^{-1} x$ | $\{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \times \{[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]\}$ |

B. Le Funzioni Esponenziale, Logaritmica e le Funzioni(-restrizione) Gudermanniane diretta e inversa

| | |
|---|---|
| $x \mapsto e^x$ | $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ |
| $x \mapsto \ln x$ | $(0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ |
| $x \mapsto gd x := 2 \tan^{-1}(e^x) - \pi/2$ | $(-\infty, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ |
| $x \mapsto gd^{-1} x \equiv \ln(\tan(x/2 + \pi/4))$ | $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\infty, +\infty)$ |

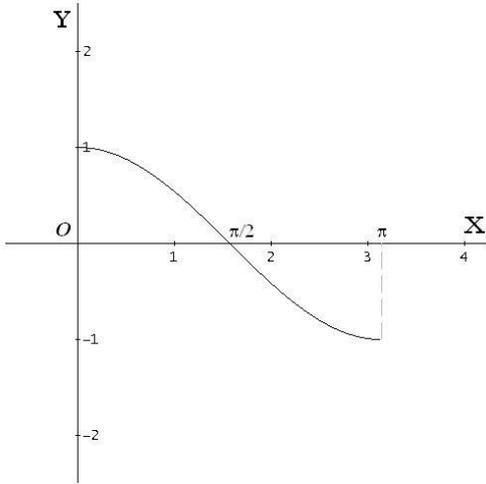
C. Le Funzioni Iperboliche dirette e inverse (v. P. 24-25)

| | |
|--|---|
| $x \mapsto \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ | $[0, +\infty) \times [1, +\infty)$ |
| $x \mapsto \cosh^{-1} x := \ln(x + (x^2 - 1)^{1/2})$ | $[1, +\infty) \times [0, +\infty)$ |
| $x \mapsto \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ | $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ |
| $x \mapsto \sinh^{-1} x := \ln(x + (x^2 + 1)^{1/2})$ | $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ |
| $x \mapsto \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | $(-\infty, +\infty) \times (-1, 1)$ |
| $x \mapsto \tanh^{-1} x := \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ | $(-1, 1) \times (-\infty, +\infty)$ |
| $x \mapsto \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \equiv \frac{1}{\tanh x}$ | $\{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\} \times \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\}$ |
| $x \mapsto \coth^{-1} x := \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ | $\{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \times \{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$ |

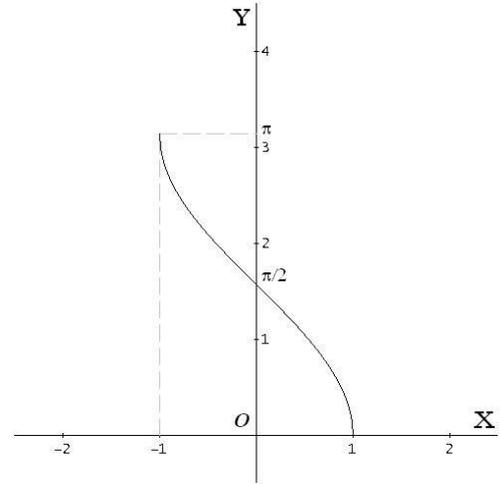
| | |
|--|--|
| $x \mapsto \operatorname{sech} x := \frac{1}{\cosh x} \equiv \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ | $(-\infty, +\infty) \times (0, 1]$ |
| $x \mapsto \operatorname{sech}^{-1} x := \ln \frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}}{x}$ | $(0, 1] \times [0, +\infty)$ |
| $x \mapsto \operatorname{csch} x := \frac{1}{\sinh x} \equiv \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ | $\{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\} \times \{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$ |
| $x \mapsto \operatorname{csch}^{-1} x := \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{ x } \right)$ | $\{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\} \times \{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$ |

■

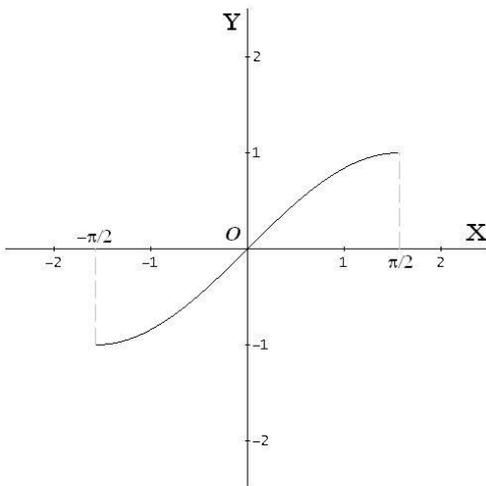
I grafici delle Funzioni Circolari dirette e inverse



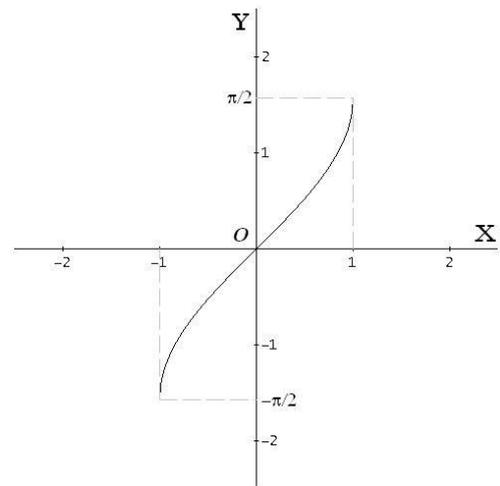
$x \mapsto \cos x$



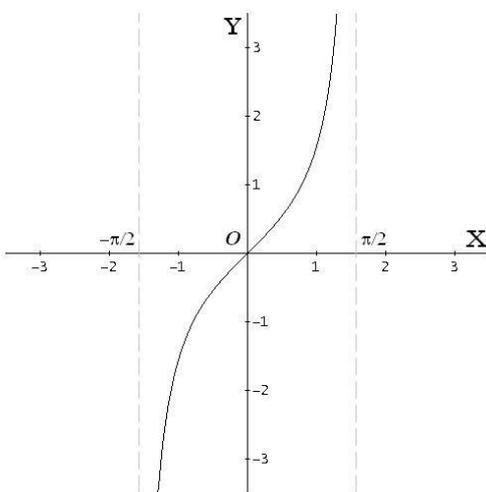
$x \mapsto \cos^{-1} x$



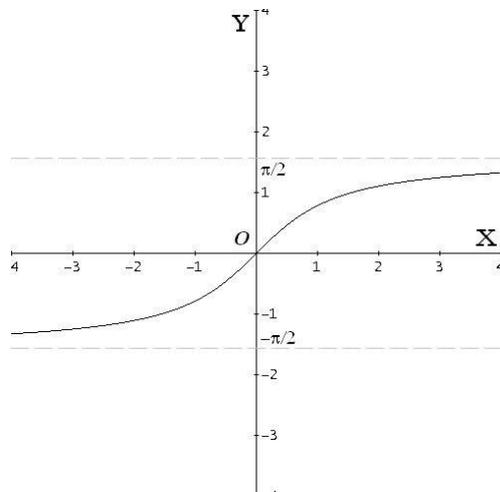
$x \mapsto \sin x$



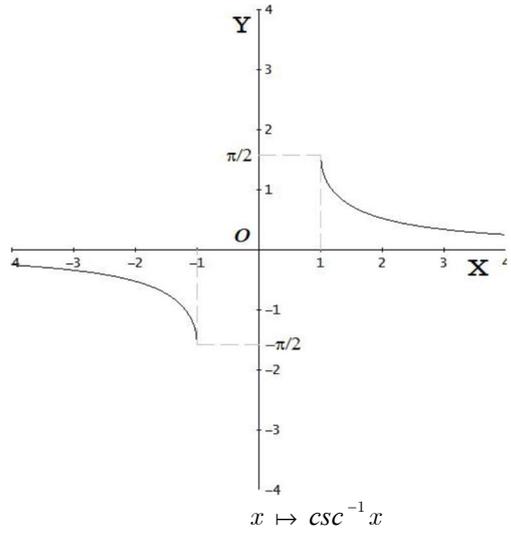
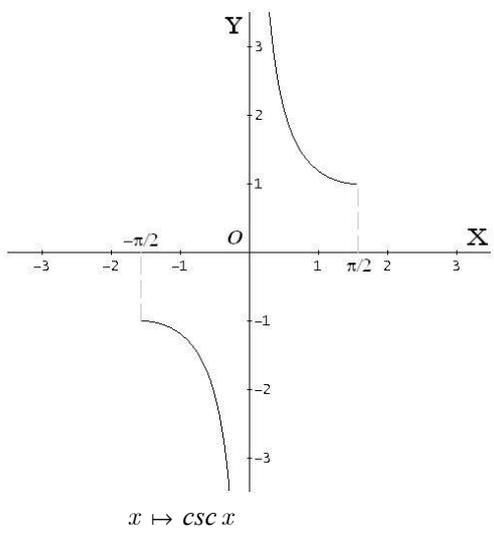
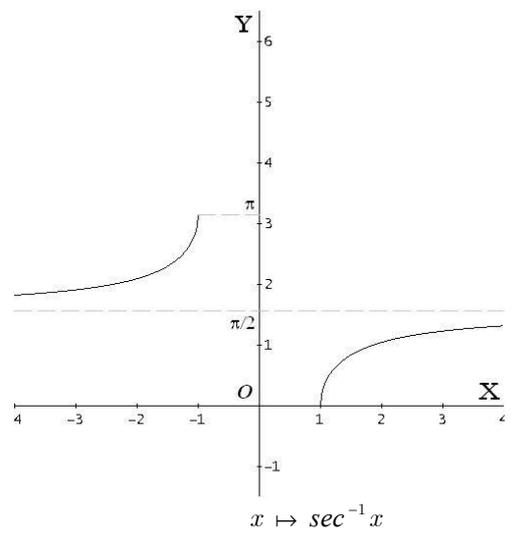
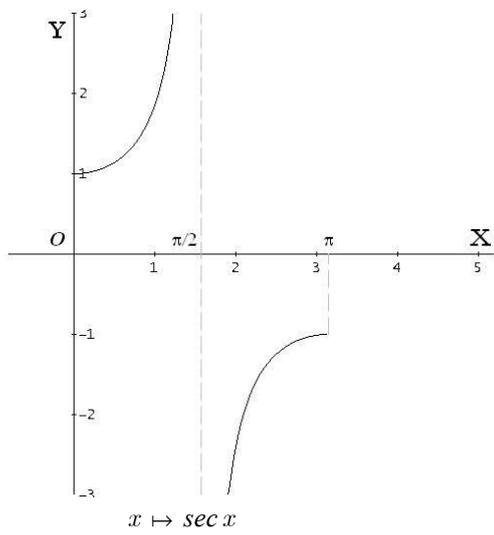
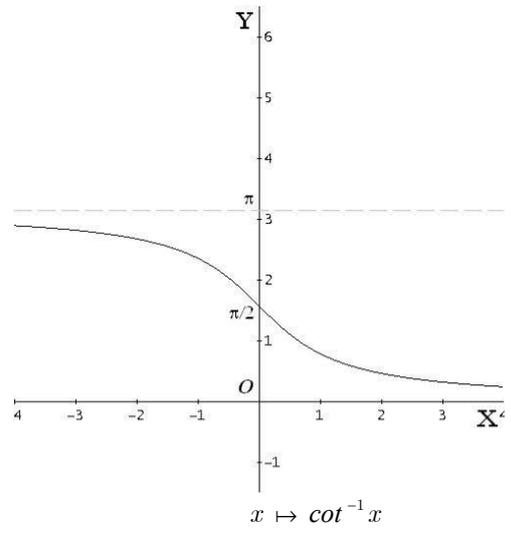
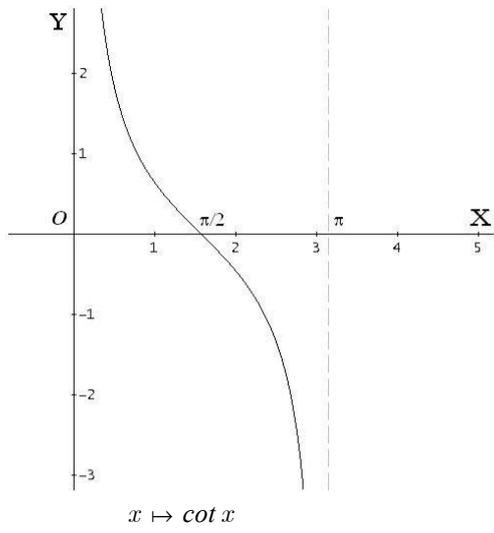
$x \mapsto \sin^{-1} x$



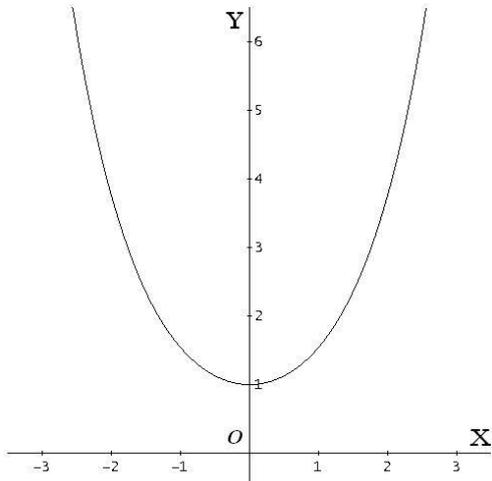
$x \mapsto \tan x$



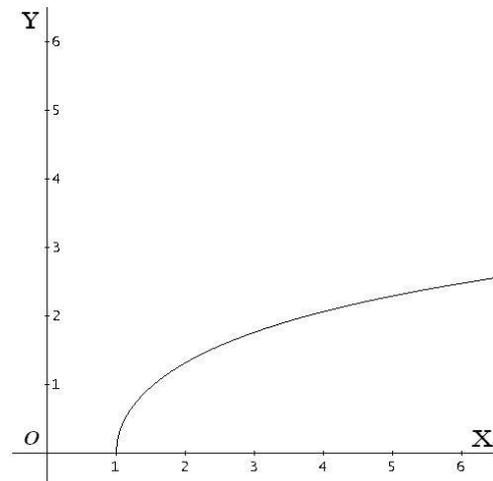
$x \mapsto \tan^{-1} x$



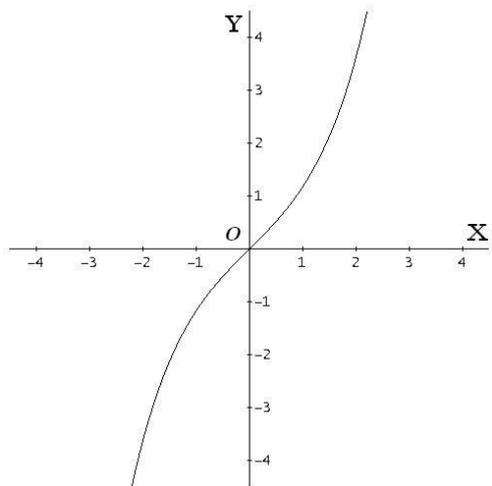
I grafici delle Funzioni Iperboliche dirette e inverse



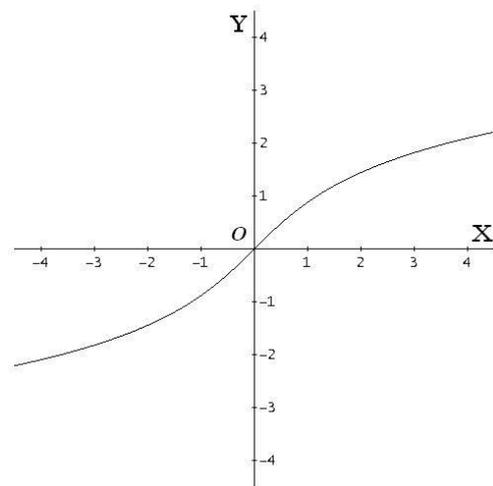
$x \mapsto \cosh x$



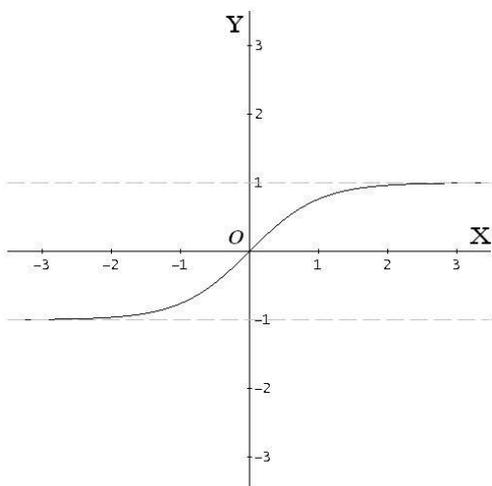
$x \mapsto \cosh^{-1} x$



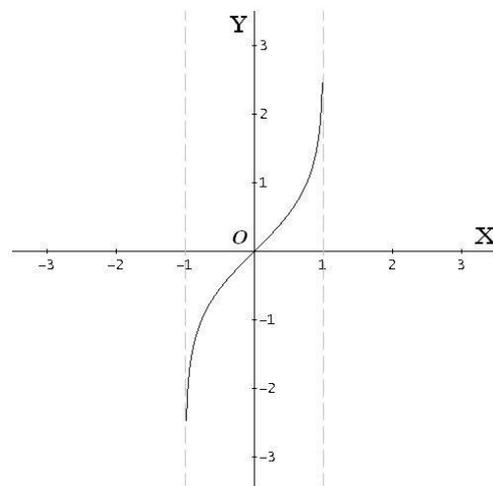
$x \mapsto \sinh x$



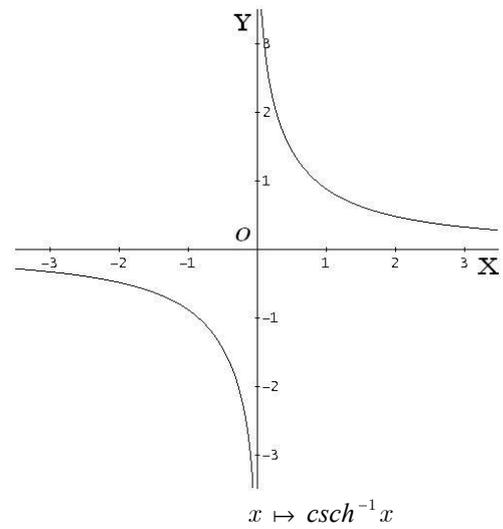
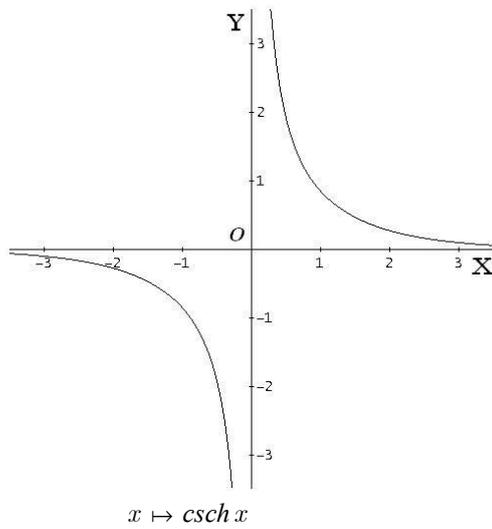
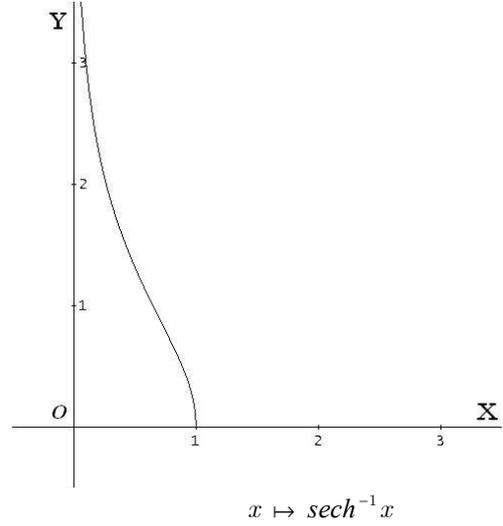
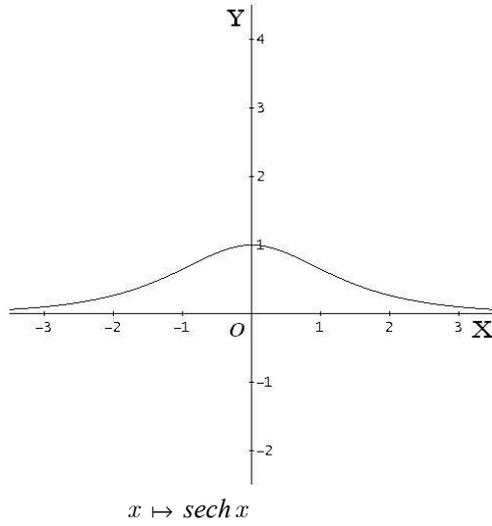
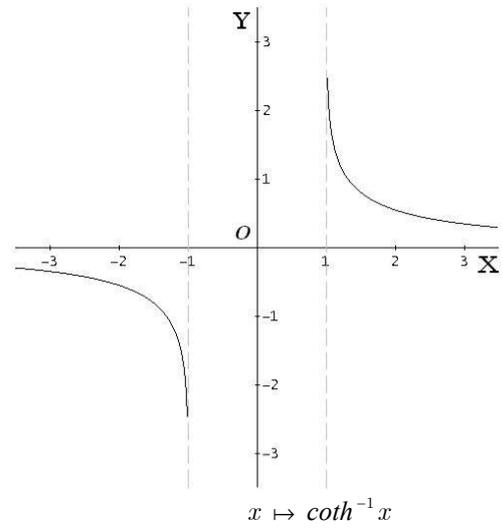
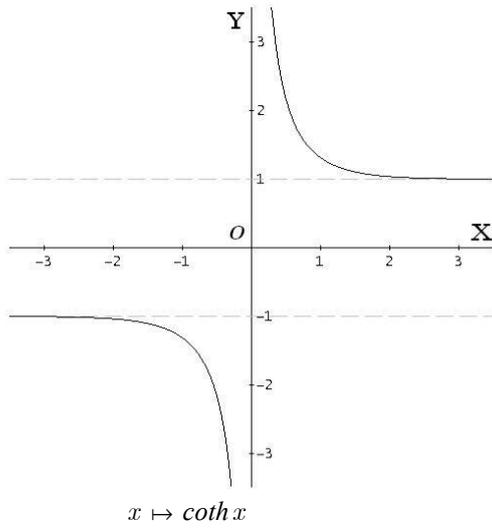
$x \mapsto \sinh^{-1} x$



$x \mapsto \tanh x$



$x \mapsto \tanh^{-1} x$



■

L'inversione dei valori iperbolici in \mathbb{R}

1. Dalla definizione in \mathbb{R} del valore parametrico

$$k := \cosh \eta \equiv \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2},$$

si ottiene l'equazione $e^{2\eta} - 2ke^\eta + 1 = 0$. Risolvendola vs. e^η , si determinano le radici *reciproche* $e^\eta = k \pm (k^2 - 1)^{1/2}$. Ovviamente, $e^\eta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow k \in [1, +\infty)$. Quindi, per inversione, risultano

$$\eta_{\pm} = \ln(k \pm (k^2 - 1)^{1/2}).$$

Quale delle due η -rappresentazioni scegliere? Poiché i valori

$$\eta_- \equiv \ln(k - (k^2 - 1)^{1/2}) \equiv -\ln \frac{1}{k - (k^2 - 1)^{1/2}} \equiv -\ln(k + (k^2 - 1)^{1/2}) \equiv -\eta_+$$

sono *opposti*, si assume η_+ , *convenzionalmente*, come la *rappresentazione principale* di η .
Quindi,

$$\cosh^{-1} k := \ln(k + (k^2 - 1)^{1/2}) \equiv \eta; \quad (35)$$

2. la definizione in \mathbb{R} del valore parametrico

$$s := \sinh \eta \equiv \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2};$$

genera l'equazione $e^{2\eta} - 2se^\eta - 1 = 0$, che, risolta vs. e^η , fornisce le radici

$$e^\eta = \begin{cases} s + (s^2 + 1)^{1/2}, & \forall s \in \mathbb{R} \\ s - (s^2 + 1)^{1/2} < 0 \Rightarrow \eta \notin \mathbb{R} \end{cases}.$$

Pertanto, dall'*unica* radice invertibile in \mathbb{R} , la *prima*, si ottiene

$$\sinh^{-1} s := \ln(s + (s^2 + 1)^{1/2}) \equiv \eta; \quad (36)$$

3. dalla definizione in \mathbb{R} del valore parametrico

$$\tau := \tanh \eta \equiv \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}} \equiv \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1} \quad (\equiv s/k),$$

risulta $e^{2\eta} = (1 + \tau)/(1 - \tau)$, $\forall \tau \in (-1, 1)$. Quindi, invertendo $e^{2\eta}$ vs. η , si trova

$$\tanh^{-1} \tau := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right) \equiv \eta; \quad (37)$$

4. dalla definizione in \mathbb{R} del valore parametrico

$$q := \coth \eta \equiv \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} \equiv \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \quad (\equiv 1/\tau \equiv k/s),$$

risulta, $e^{2\eta} = (q+1)/(q-1)$, $\forall q \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Pertanto, invertendo $e^{2\eta}$ vs. η , si trova

$$\coth^{-1} q := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q+1}{q-1} \right) \equiv \eta; \quad (38)$$

5. assegnato il valore parametrico in \mathbb{R}

$$\sigma := \operatorname{sech} \eta \equiv \frac{2}{e^\eta + e^{-\eta}} \equiv \frac{2e^\eta}{e^{2\eta} + 1} \quad (\equiv 1/k),$$

risulta l'equazione $\sigma e^{2\eta} - 2e^\eta + \sigma = 0$. Risolvendola vs. e^η , si determinano le radici *reciproche* $e^\eta = (1 \pm (1 - \sigma^2)^{1/2})/\sigma$, con il vincolo $\sigma \in (0, 1]$. Quindi, per inversione, risultano

$$\eta_{\pm} = \ln((1 \pm (1 - \sigma^2)^{1/2})/\sigma).$$

Quale delle due η -rappresentazioni scegliere? Poiché le due radici,

$$\eta_- \equiv \ln((1 - (1 - \sigma^2)^{1/2})/\sigma) \equiv -\ln(\sigma/(1 - (1 - \sigma^2)^{1/2})) \equiv -\ln((1 + (1 - \sigma^2)^{1/2})/\sigma) \equiv -\eta_+$$

sono *opposte*, si assume η_+ , *convenzionalmente*, come la *rappresentazione principale* di η .

Quindi,

$$\operatorname{sech}^{-1} \sigma := \ln((1 + (1 - \sigma^2)^{1/2})/\sigma) \equiv \eta; \quad (39)$$

6. assegnato il valore parametrico in $\chi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\chi := \operatorname{csch} \eta \equiv \frac{2}{e^\eta - e^{-\eta}} \equiv \frac{2e^\eta}{e^{2\eta} - 1}, \quad (\equiv 1/s),$$

se ne deduce l'equazione $\chi e^{2\eta} - 2e^\eta - \chi = 0$. Questa, risolta vs. e^η , fornisce le radici

$$e^\eta = \begin{cases} \frac{1 + (1 + \chi^2)^{1/2}}{\chi}, & \text{se } \chi \in (0, +\infty), \\ \frac{1 - (1 + \chi^2)^{1/2}}{\chi}, & \text{se } \chi \in (-\infty, 0), \end{cases} \equiv \frac{1}{\chi} + \frac{(1 + \chi^2)^{1/2}}{|\chi|}.$$

Pertanto, invertendo e^η vs. η , segue che

$$\operatorname{csch}^{-1} \chi := \ln \left(\frac{1}{\chi} + \frac{(1 + \chi^2)^{1/2}}{|\chi|} \right) \equiv \eta. \quad (40)$$

■

Identità Goniometriche Iperboliche in \mathbb{R}

A. Funzioni Dirette

Riepilogo delle rappresentazioni esponenziali:

$$\begin{aligned} \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \tanh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}, \\ \operatorname{sech} x &:= \frac{2}{e^x + e^{-x}} \equiv \frac{1}{\cosh x}, & \operatorname{csch} x &:= \frac{2}{e^x - e^{-x}} \equiv \frac{1}{\sinh x}, & \operatorname{coth} x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \equiv \frac{1}{\tanh x}; \end{aligned} \quad (41)$$

Dalle Rappresentazioni (41), seguono tutte le identità seguenti (se ne consiglia la verifica!):

identità moltiplicative:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \operatorname{coth} x \cdot \sinh x, & \sinh x &= \tanh x \cdot \cosh x, \\ \tanh x &= \sinh x \cdot \operatorname{sech} x, & \operatorname{coth} x &= \cosh x \cdot \operatorname{csch} x, \\ \operatorname{sech} x &= \tanh x \cdot \operatorname{csch} x, & \operatorname{csch} x &= \operatorname{coth} x \cdot \operatorname{sech} x; \end{aligned} \quad (42)$$

identità-quotiente:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{\operatorname{coth} x}{\operatorname{csch} x}, & \sinh x &= \frac{\tanh x}{\operatorname{sech} x}, & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \\ \operatorname{coth} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, & \operatorname{sech} x &= \frac{\operatorname{csch} x}{\operatorname{coth} x}, & \operatorname{csch} x &= \frac{\operatorname{sech} x}{\tanh x}; \end{aligned} \quad (43)$$

identità iperboliche quadratiche fondamentali:

$$\begin{aligned} (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= 1, & (\tanh x)^2 + (\operatorname{sech} x)^2 &= 1, \\ (\operatorname{coth} x)^2 - (\operatorname{csch} x)^2 &= 1, & (\operatorname{csch} x)^2 - (\operatorname{sech} x)^2 &= (\operatorname{csch} x)^2 (\operatorname{sech} x)^2; \end{aligned} \quad (44)$$

identità di somma\ differenza angolare (in radh) iperbolica:

$$\begin{aligned} \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y, \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y, \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y} = \frac{\sinh(2x) \pm \sinh(2y)}{\cosh(2x) \pm \cosh(2y)}, \\ \operatorname{coth}(x \pm y) &= \frac{1 \pm \cosh x \cdot \operatorname{coth} y}{\operatorname{coth} x \pm \cosh y} = \frac{\sinh(2x) \mp \sinh(2y)}{\cosh(2x) - \cosh(2y)}; \end{aligned} \quad (45)$$

identità di duplicazione iperbolica:

$$\begin{aligned} \cosh(2x) &\equiv \frac{1}{\operatorname{sech}(2x)} = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = 2(\cosh x)^2 - 1 = 1 + 2(\sinh x)^2 = \frac{1 + (\tanh x)^2}{1 - (\tanh x)^2}, \\ \sinh(2x) &\equiv \frac{1}{\operatorname{csch}(2x)} = 2 \cosh x \cdot \sinh x = \frac{2 \tanh x}{1 - (\tanh x)^2}, \\ \tanh(2x) &= \frac{2 \tanh x}{1 + (\tanh x)^2}, & \operatorname{coth} 2x &= \frac{1 + (\operatorname{coth} x)^2}{2 \operatorname{coth} x}; \end{aligned} \quad (46)$$

identità di triplicazione iperbolica:

$$\begin{aligned} \cosh(3x) &= 4(\cosh x)^3 - 3 \cosh x = (1 + 4(\sinh x)^2) \cosh x, \\ \sinh(3x) &= 4(\sinh x)^3 + 3 \sinh x = (4(\cosh x)^2 - 1) \sinh x, \\ \tanh(3x) &= \frac{(3 + (\tanh x)^2) \tanh x}{1 + 3(\tanh x)^2}, & \operatorname{coth} 3x &= \frac{(3 + (\operatorname{coth} x)^2) \operatorname{coth} x}{1 + 3(\operatorname{coth} x)^2}; \end{aligned} \quad (47)$$

identità di *bi-sezione* iperbolica:

$$\begin{aligned}
 \cosh(x/2) &= \left(\frac{\cosh x + 1}{2} \right)^{1/2}, \\
 \sinh(x/2) &= \pm \left(\frac{\cosh x - 1}{2} \right)^{1/2}, \\
 \tanh(x/2) &= \pm \left(\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} \right)^{1/2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}, \\
 \coth(x/2) &= \pm \left(\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1} \right)^{1/2} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1};
 \end{aligned} \tag{48}$$

identità *parametriche* iperboliche:

posto $\tau := \tanh(x/2)$ o, altrimenti, $\kappa := \coth(x/2)$, seguono (condizionate!), rispettivamente

$$\begin{aligned}
 \cosh x &\equiv \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2}, & \cosh x &\equiv \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa^2 - 1}, \\
 \sinh x &\equiv \frac{1}{\operatorname{csch} x} = \frac{2\tau}{1 - \tau^2}, & \sinh x &\equiv \frac{1}{\operatorname{csch} x} = \frac{2\kappa}{\kappa^2 - 1}, \\
 \tanh x &\equiv \frac{1}{\coth x} = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}; & \tanh x &\equiv \frac{1}{\coth x} = \frac{2\kappa}{\kappa^2 + 1};
 \end{aligned} \tag{49}$$

identità di *prostaferesi* iperbolica:

$$\begin{aligned}
 \cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}, \\
 \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}, \\
 \sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}, \\
 \sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}, \\
 \tanh x \pm \tanh y &= (1 \pm \tanh x \tanh y) \tanh(x \pm y) = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cdot \cosh y}, \\
 \coth x \pm \coth y &= \frac{1 \pm \coth x \cdot \coth y}{\coth(x \pm y)} = \frac{\sinh(x \pm y)}{\sinh x \cdot \sinh y}; \\
 \hline
 \cosh x \pm \sinh x &= \frac{1 \pm \tanh(x/2)}{1 \mp \tanh(x/2)} = e^{\pm x};
 \end{aligned} \tag{50}$$

Identità analoghe di *Werner* iperboliche:

$$\begin{aligned}
 \cosh x \cdot \cosh y &= (1/2)(\cosh(x+y) + \cosh(x-y)), \\
 \sinh x \cdot \sinh y &= (1/2)(\cosh(x+y) - \cosh(x-y)), \\
 \cosh x \cdot \sinh y &= (1/2)(\sinh(x+y) - \sinh(x-y)); \\
 \hline
 \cosh(x+y) \cdot \cosh(x-y) &= (\cosh x)^2 + (\sinh y)^2 = (\cosh y)^2 + (\sinh x)^2, \\
 \sinh(x+y) \cdot \sinh(x-y) &= (\cosh x)^2 - (\cosh y)^2 = (\sinh x)^2 - (\sinh y)^2;
 \end{aligned} \tag{51}$$

le *Identità Euleriane* di connessione con le Funzioni Goniometriche Circolari *Dirette* seguono dall'*Identità Euleriana fondamentale*

$$e^{\pm ix} \equiv \cos x \pm i \sin x : \tag{52}$$

$$\begin{array}{ll} \cosh(ix) = \cos x , & \cosh x = \cos(ix) , \\ \sinh(ix) = i \sin x , & \sinh x = -i \sin(ix) , \\ \tanh(ix) = i \tan x , & \tanh x = -i \tan(ix) , \\ \coth(ix) = -i \cot x , & \coth x = i \cot(ix) , \\ \operatorname{sech}(ix) = \sec x , & \operatorname{sech} x = \sec(ix) , \\ \operatorname{csch}(ix) = -i \csc x , & \operatorname{csch} x = i \csc(ix) . \end{array} \tag{53}$$

A sua volta, l'*Identità Euleriana fondamentale* (52) è verificabile con le \mathcal{M} -espansioni (\therefore Maclaurin) specifiche, tutte convergenti *uniformemente* in \mathcal{C} :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pm ix)^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} . \tag{53.1}$$

La convergenza uniforme delle serie di potenze nella rappresentazione (53.1) è condizione *sufficiente* per la verifica *termine-a-termine* dell'uguaglianza. L'algebra è un po' laboriosa ma diretta; per tale scopo, va ricordata la regola ciclica quaternaria, valida $\forall n \in \mathbb{Z} \ (n \bmod 4)$,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i. \tag{53.2}$$

□

Introdotta il simbolo comodo $\hat{\sigma} := \operatorname{sgn}(x) \equiv \pm 1$, altre identità possono essere dedotte combinando opportunamente le relazioni generali nelle due Tabelle seguenti per le rappresentazioni di *ciascuna* Funzione Iperbolica Diretta mediante *qualsiasi altra* Funzione Iperbolica Diretta (cfr/c grafici a *sinistra*, p. 20-21):

| | $f \equiv \cosh$ | $f \equiv \sinh$ | $f \equiv \tanh$ |
|---------------------------|--|---|---|
| $\cosh x =$ | $\cosh x$ | $(1 + (\sinh x)^2)^{1/2}$ | $\frac{1}{(1 - (\tanh x)^2)^{1/2}}$ |
| $\sinh x =$ | $\hat{\sigma}((\cosh x)^2 - 1)^{1/2}$ | $\sinh x$ | $\frac{\tanh x}{(1 - (\tanh x)^2)^{1/2}}$ |
| $\tanh x =$ | $\hat{\sigma} \frac{((\cosh x)^2 - 1)^{1/2}}{\cosh x}$ | $\frac{\sinh x}{(1 + (\sinh x)^2)^{1/2}}$ | $\tanh x$ |
| $\operatorname{sech} x =$ | $\frac{1}{\cosh x}$ | $\frac{1}{(1 + (\sinh x)^2)^{1/2}}$ | $(1 - (\tanh x)^2)^{1/2}$ |
| $\operatorname{csch} x =$ | $\hat{\sigma} \frac{1}{((\cosh x)^2 - 1)^{1/2}}$ | $\frac{1}{\sinh x}$ | $\frac{(1 - (\tanh x)^2)^{1/2}}{\tanh x}$ |
| $\coth x =$ | $\hat{\sigma} \frac{\cosh x}{((\cosh x)^2 - 1)^{1/2}}$ | $\frac{(1 + (\sinh x)^2)^{1/2}}{\sinh x}$ | $\frac{1}{\tanh x}$ |

Tabella 1

| | $f \equiv \operatorname{sech}$ | $f \equiv \operatorname{csch}$ | $f \equiv \operatorname{coth}$ |
|---------------------------|--|--|--|
| $\cosh x =$ | $\frac{1}{\operatorname{sech} x}$ | $\hat{\sigma} \frac{((\operatorname{csch} x)^2 + 1)^{1/2}}{\operatorname{csch} x}$ | $\hat{\sigma} \frac{\operatorname{coth} x}{((\operatorname{coth} x)^2 - 1)^{1/2}}$ |
| $\sinh x =$ | $\hat{\sigma} \frac{(1 - (\operatorname{sech} x)^2)^{1/2}}{\operatorname{sech} x}$ | $\frac{1}{\operatorname{csch} x}$ | $\hat{\sigma} \frac{1}{((\operatorname{coth} x)^2 - 1)^{1/2}}$ |
| $\tanh x =$ | $\hat{\sigma} (1 - (\operatorname{sech} x)^2)^{1/2}$ | $\frac{1}{((\operatorname{csch} x)^2 + 1)^{1/2}}$ | $\frac{1}{\operatorname{coth} x}$ |
| $\operatorname{sech} x =$ | $\operatorname{sech} x$ | $\hat{\sigma} \frac{\operatorname{csch} x}{((\operatorname{csch} x)^2 + 1)^{1/2}}$ | $\hat{\sigma} \frac{((\operatorname{coth} x)^2 - 1)^{1/2}}{\operatorname{coth} x}$ |
| $\operatorname{csch} x =$ | $\hat{\sigma} \frac{\operatorname{sech} x}{(1 - (\operatorname{sech} x)^2)^{1/2}}$ | $\operatorname{csch} x$ | $\hat{\sigma} ((\operatorname{coth} x)^2 - 1)^{1/2}$ |
| $\operatorname{coth} x =$ | $\hat{\sigma} \frac{1}{(1 - (\operatorname{sech} x)^2)^{1/2}}$ | $((\operatorname{csch} x)^2 + 1)^{1/2}$ | $\operatorname{coth} x$ |

Tabella 2

■

B. Funzioni Inverse

Riepilogo delle rappresentazioni *logaritmiche* (nei domini principali rispettivi)

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} x &:= \ln(x + (x^2 - 1)^{1/2}), & \sinh^{-1} x &:= \ln(x + (x^2 + 1)^{1/2}), & \tanh^{-1} x &:= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \\ \operatorname{sech}^{-1} x &:= \ln\left(\frac{1 + (x^2 - 1)^{1/2}}{x}\right), & \operatorname{csch}^{-1} x &:= \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1 + (x^2 + 1)^{1/2}}{|x|}\right), & \operatorname{coth}^{-1} x &:= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Applicando le proprietà logaritmiche elementari alle Identità (46), si ricavano le

identità di *somma*\d *differenza* seguenti (se ne consiglia la verifica!):

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} x \pm \cosh^{-1} y &= \cosh^{-1}(xy \pm ((x^2 - 1)(y^2 - 1))^{1/2}), \\ \sinh^{-1} x \pm \sinh^{-1} y &= \sinh^{-1}(x(y^2 + 1)^{1/2} \pm y(x^2 + 1)^{1/2}), \\ \tanh^{-1} x \pm \tanh^{-1} y &= \tanh^{-1}\left(\frac{x \pm y}{1 \pm xy}\right); \\ \operatorname{coth}^{-1} x \pm \operatorname{coth}^{-1} y &= \operatorname{coth}^{-1}\left(\frac{xy \pm 1}{y \pm x}\right); \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} x + \sinh^{-1} y &= \sinh^{-1}(xy + ((x^2 - 1)(y^2 + 1))^{1/2}) = \cosh^{-1}(x(y^2 + 1)^{1/2} + y(x^2 - 1)^{1/2}), \\ \cosh^{-1} x - \sinh^{-1} y &= -\sinh^{-1}(xy - ((x^2 - 1)(y^2 + 1))^{1/2}) = -\cosh^{-1}(x(y^2 + 1)^{1/2} - y(x^2 - 1)^{1/2}), \\ \tanh^{-1} x \pm \operatorname{coth}^{-1} y &= \tanh^{-1}\left(\frac{xy \pm 1}{y \pm x}\right) = \operatorname{coth}^{-1}\left(\frac{y \pm x}{xy \pm 1}\right); \end{aligned}$$

Identità Euleriane di connessione con le Funzioni Goniometriche Circolari *Inverse*:

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} x &= \pm i \cos^{-1} x, & \cosh(ix) &= \pm i \cos^{-1}(ix), \\ \sinh x &= -i \sin^{-1}(ix), & \sinh(ix) &= i \sin^{-1} x, \\ \tanh x &= -i \tan^{-1}(ix), & \tanh(ix) &= i \tan^{-1} x, \\ \operatorname{coth} x &= i \cot^{-1}(ix), & \operatorname{coth}(ix) &= -i \cot^{-1} x, \\ \operatorname{sech} x &= \pm i \sec^{-1} x, & \operatorname{sech}(ix) &= \pm i \sec^{-1}(ix), \\ \operatorname{csch} x &= i \csc^{-1} ix, & \operatorname{csch}(ix) &= -i \csc^{-1} x. \end{aligned} \quad (56)$$

Rappresentazioni integrali:

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{(t^2 - 1)^{1/2}} dt, & \tanh^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt \quad (|x| < 1), \\ \sinh^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{(t^2 + 1)^{1/2}} dt, & \operatorname{coth}^{-1} x &= \int_{\operatorname{sgn}(x)}^x \frac{1-t}{1+t} dt \quad (|x| > 1). \end{aligned} \quad (57)$$

Altre identità possono essere dedotte combinando opportunamente le relazioni generali nelle Tabelle seguenti per le rappresentazioni di *ciascuna* Funzione Iperbolica Inversa mediante *qualsiasi altra* Funzione Iperbolica Inversa (cfr/c grafici a P. 20-21, a *destra*):

| | $f \equiv \cosh^{-1}$ | $f \equiv \sinh^{-1}$ | $f \equiv \tanh^{-1}$ |
|--------------------------------|---|---|---|
| $\cosh^{-1} x =$ | $\cosh^{-1} x$ | $\hat{\sigma} \sinh^{-1}(x^2 - 1)^{1/2}$ | $\hat{\sigma} \tanh^{-1} \frac{(x^2 - 1)^{1/2}}{x}$ |
| $\sinh^{-1} x =$ | $\hat{\sigma} \cosh^{-1}(x^2 + 1)^{1/2}$ | $\sinh^{-1} x$ | $\tanh^{-1} \frac{x}{(x^2 + 1)^{1/2}}$ |
| $\tanh^{-1} x =$ | $\hat{\sigma} \cosh^{-1} \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$ | $\sinh^{-1} \frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}}$ | $\tanh^{-1} x$ |
| $\operatorname{sech}^{-1} x =$ | $\cosh^{-1} \frac{1}{x}$ | $\hat{\sigma} \sinh^{-1} \frac{(1 - x^2)^{1/2}}{x}$ | $\hat{\sigma} \tanh^{-1}(1 - x^2)^{1/2}$ |
| $\operatorname{csch}^{-1} x =$ | $\hat{\sigma} \cosh^{-1} \frac{(x^2 + 1)^{1/2}}{x}$ | $\sinh^{-1} \frac{1}{x}$ | $\tanh^{-1} \frac{1}{(x^2 + 1)^{1/2}}$ |
| $\operatorname{coth}^{-1} x =$ | $\hat{\sigma} \cosh^{-1} \frac{x}{(x^2 - 1)^{1/2}}$ | $\sinh^{-1} \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/2}}$ | $\tanh^{-1} \frac{1}{x}$ |

Tabella 3

| | $f \equiv \operatorname{sech}^{-1}$ | $f \equiv \operatorname{csch}^{-1}$ | $f \equiv \operatorname{coth}^{-1}$ |
|--------------------------------|---|---|---|
| $\cosh^{-1} x =$ | $\operatorname{sech}^{-1} \frac{1}{x}$ | $\hat{\sigma} \operatorname{csch}^{-1} \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/2}}$ | $\hat{\sigma} \operatorname{coth}^{-1} \frac{x}{(x^2 - 1)^{1/2}}$ |
| $\sinh^{-1} x =$ | $\hat{\sigma} \operatorname{sech}^{-1} \frac{1}{(x^2 + 1)^{1/2}}$ | $\operatorname{csch}^{-1} \frac{1}{x}$ | $\operatorname{coth}^{-1} \frac{(x^2 + 1)^{1/2}}{x}$ |
| $\tanh^{-1} x =$ | $\hat{\sigma} \operatorname{sech}^{-1}(1 - x^2)^{1/2}$ | $\operatorname{csch}^{-1} \frac{(1 - x^2)^{1/2}}{x}$ | $\operatorname{coth}^{-1} \frac{1}{x}$ |
| $\operatorname{sech}^{-1} x =$ | $\operatorname{sech}^{-1} x$ | $\hat{\sigma} \operatorname{csch}^{-1} \frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}}$ | $\hat{\sigma} \operatorname{coth}^{-1} \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$ |
| $\operatorname{csch}^{-1} x =$ | $\hat{\sigma} \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{(x^2 + 1)^{1/2}}$ | $\operatorname{csch}^{-1} x$ | $\operatorname{coth}^{-1}(x^2 + 1)^{1/2}$ |
| $\operatorname{coth}^{-1} x =$ | $\operatorname{sech}^{-1} \frac{(x^2 - 1)^{1/2}}{x}$ | $\operatorname{csch}^{-1}(x^2 - 1)^{1/2}$ | $\operatorname{coth}^{-1} x$ |

Tabella 4



Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [2], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html.

- [1] MARKUSHEVICH, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2^A ED., VOL. **3**, CHELSEA PUBL. CO. (1977);
- [2] WREDE, R. C. - SPIEGEL, M. R., *Advanced Calculus*, SCHAUM OUTLINE SERIES, 3RD ED., MCGRAW-HILL (2010);
- [3] AUTORI VARI_12, *Testi e strumenti per il Calcolo analitico avanzato in \mathbb{R} e per il Calcolo in \mathbb{C}* ;
- [4] CARRIER, G. F. - KROOK, M. - PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable*, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1966);
- [5] CHURCHILL, R. V. - BROWN, J. W., *Complex Variables and Applications*, 4TH ED., MCGRAW-HILL BOOK CO. (1984);
- [6] LEVINSON, N. - REDHEFFER, R. M., *Complex Variables*, HOLDEN-DAY, INC. (1970);
- [7] SPIEGEL, M. R., ET AL., *Complex Variables*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 2ND ED., MCGRAW-HILL CO. (2009);
- [8] HAUSER, A. A., *Complex Variables with Physical Applications*, SIMON & SCHUSTER TECH OUTLINE (1971);
- [9] ZWILLINGER, D., ed., *Standard Mathematical Tables*, 33RD ED., CRC PRESS (2018);
- [10] GRADSHTEYN, I. S. - RYZHIK, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, 7TH ED., ACADEMIC PRESS (2007).

