revisione
05 aprile 2024

Determinazione di serie di potenze in $\mathbb{R}$ dalle

Funzioni Generatrici
di Bernoulli e di Euler

e applicazioni in $\mathbb{R}$ delle Funzioni

ζ di Riemann,

β_D di Dirichlet,

ζ_H di Hurwitz

claudio magno

https://www.cm-physmath.net/

CM_Portable MATH Notebook Series™

Jakob Bernoulli (1655-1705)

Leonhard Euler (1707-1783)

INDICE

INTRODUZIONE

È forse opportuno che l'argomento di questo math-notebook sia preceduto, e giustificato, da un percorso logico minimo, ordinando alcune proprietà delle serie di potenze in $\mathbb{R}$, peraltro, facilmente estendibili a $\mathbb{C}$ (v., e.g., [1]).

Sia f una funzione espandibile in serie di potenze in un intervallo *compatto* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Allora, segue che $f \in \mathcal{C}^{\infty}$ $\forall\, x \in [a, b]$. La specificazione '$\forall\, x \in [a, b]$' è importante perché consente di ridurre il termine-funzione generale $f_n(x)$ al termine generale $f_{n;x}$ di una serie *numerica equivalente*, nella quale, x va considerato come un *parametro* (continuo) del tutto *ininfluente* nel processo di sommazione. Ciò è fondamentale nella discussione.
Ora, $(f(x) \equiv)\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n;x}$ converge *totalmente* (i.e., sia *uniformemente* che *assolutamente*) $\forall\, x \in [a, b]$ e, quindi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \max_{x \in (a,b)} |f_n(x)| < +\infty$ (*Teorema di Abel*, v., e.g., [3], P. 45). A sua volta, la convergenza assoluta della serie *numerica* equivalente $\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n;x}$ è condizione *necessaria* e *sufficiente* di convergenza *incondizionata* per questa serie (*Teorema di Dirichlet*, v., e.g., [1], VOL. **2**, P. 153, o [2], P. 186). In particolare,

in regime di convergenza *assoluta*, i termini della serie numerica possono essere scomposti *arbitrariamente* con le operazioni di somma, sottrazione e moltiplicazione e, quindi, riordinati *arbitrariamente*, mentre l'elemento limite f, $\forall\, x \in [a, b]$, resta *invariato*.

Ne seguono la *rappresentabilità* di $f(x)$ in $[a, b]$, e.g., come Serie di Fourier o di Fourier-Bessel o di Legendre o serie dedotte da funzioni particolari, etc., secondo convenienza, e la *ricostruibilità*, con manovre algebriche elementari (più o meno pesanti …), dei coefficienti di Taylor-Maclaurin. Questi, in molti casi, non risultano particolarmente efficienti nelle stime e nell'approssimazione numerica rapida.

Il percorso argomentativo tracciato qui mostra il ruolo cruciale della convergenza *assoluta* in quello che può essere considerato come il *Teorema di Unicità della funzione-limite* $f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, la quale – ancóra – resta *invariata* vs. la serie rappresentativa scelta. Pertanto, $\nexists$ una funzione *diversa* $g\colon x \mapsto g(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ in $[a, b]$, salvo che, banalmente, si abbia $g \equiv f$ in $[a, b]$.

C M

Operazioni algebriche formali con le serie di potenze

Sia $z \neq 0$ un punto *ordinario* per la funzione $f: z \mapsto f(z)$, con $z \in \mathbb{C}$. Generalmente, nel caso di un'espansione in serie di potenze intorno a $z = z_0$, i calcoli si semplificano se si esegue la traslazione $z := w + z_0$. Il centro di espansione diventa, allora, il punto *ordinario* $w = 0$ per la funzione *trasformata* $\tilde{f}: w \mapsto \tilde{f}(w)$. Infine, si arriva al risultato del problema originario con la traslazione inversa $w := z - z_0$.

1. *L'algoritmo formale* $\mathfrak{M}$, **prodotto** (*à-la Cauchy*) *di due serie di potenze*

Il prodotto di due serie di potenze, distinte da indici indipendenti $k \wedge m \in \mathbb{Z}_0^+$, convergenti, *una*, *almeno*, anche *assolutamente* (*Teorema di Mertens*), nello *stesso* cerchio centrato in $z = 0$,

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m\right), \tag{1}$$

corrisponde a una serie *doppia* ottenuta moltiplicando ciascun termine di una serie-fattore per ciascun termine dell'altra. In tal senso, il prodotto (1) è *commutativo*. Esso può essere riordinato in una serie *semplice* legando tra loro gli indici muti n e k opportunamente, in pratica, mantenendo sempre $k \leq n$. Il prodotto (1) risulta, allora, rappresentato nella *forma di Cauchy*:

$$\mathfrak{M}: \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m\right) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n : \hookleftarrow \\ \quad \hookrightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \equiv \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m \,. \end{cases} \tag{2}$$

2. *L'algoritmo formale* $\mathfrak{D}$, **divisione** *di due serie di potenze*

L'espansione in serie di potenze del rapporto

$$\frac{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k}{\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \tag{3}$$

rimanda all'algoritmo $\mathfrak{M}$. Infatti, dalla forma *convolutiva* equivalente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{k} b_m c_{k-m}\right)}_{a_k} z^k, \tag{3.1}$$

si ottengono le uguaglianze termine-a-termine, con la condizione $b_0 \neq 0$,

$a_0 = b_0 c_0$, i.e., $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$,

$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$, i.e., $c_1 = \dfrac{1}{b_0}(a_1 - b_1 c_0)$,

$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$, i.e., $c_2 = \dfrac{1}{b_0}(a_2 - (b_2 c_0 + b_1 c_1))$,

$a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0$, i.e., $c_3 = \dfrac{1}{b_0}(a_3 - (b_3 c_0 - b_2 c_1 - b_1 c_2))$,

$a_4 = b_0 c_4 + b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1 + b_4 c_0$, i.e., $c_4 = \dfrac{1}{b_0}(a_4 - (b_4 c_0 + b_3 c_1 + b_2 c_2 + b_1 c_3))$, etc. .

Pertanto, vale l'algoritmo generale di divisione *formale*

$$\mathfrak{D}: \begin{cases} \dfrac{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k}{\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n : \\ \quad c_0 = \dfrac{a_0}{b_0} \;\wedge\; c_n = \dfrac{1}{b_0}\left(a_n - \sum_{m=1}^{n} b_m c_{n-m}\right) \end{cases}, \tag{4}$$

per il quale, il calcolo dei coefficienti c_n risulta *auto-generativo* cumulativamente (auto-iterativo).

3. *L'algoritmo formale* $\mathfrak{P}$, **potenza intera positiva** *di una serie di potenze*

In linea di principio, noti i coefficienti a_k, il calcolo dei coefficienti c_n per l'uguaglianza

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n , \tag{5}$$

$\forall\, p \in \mathbb{Z}^+$, corrisponde a p applicazioni sequenziali dell'algoritmo $\mathfrak{M}$. L'estensione al caso

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m\right)^{-p} \equiv \frac{1}{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m\right)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \tag{5.1}$$

fa seguire, alla p-iterazione di $\mathfrak{M}$, l'applicazione dell'algoritmo $\mathfrak{D}$, con $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \equiv 1$, i.e., con $a_0 = 1 \;\wedge\; a_k \equiv 0 \;\; \forall\, k \ge 1$.

L'onerosità evidente di questo procedimento elementare è evitabile mediante la *Formula di* MILLER (J. C. P., v. [1]). Una sua giustificazione rigorosa si fonda sulla teoria delle *serie formali* di potenze definite nel campo $\mathbb{C}$ e sulle operazioni di *composizione di gruppo* pertinenti. Probabilmente, la formula era già nota a Euler in una qualche versione primitiva non giustificata formalmente.
L'algoritmo *auto-generativo* formale $\mathfrak{P}$ di Miller è definito, con la condizione $a_0 \ne 0$,

$$\mathfrak{P}: \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)^p \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n : \\ \quad c_0 = a_0^p \;\wedge\; c_n = \dfrac{1}{n\, a_0} \sum_{k=1}^{n} ((p+1)k - n)\, a_k c_{n-k} . \end{cases} \tag{6}$$

Non c'è bisogno di ricordare che, nelle applicazioni analitiche, la legittimità dei risultati dipendenti dagli algoritmi $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{P}$ va verificata accuratamente circa le condizioni di *convergenza* delle serie *formali* di potenze risultanti.

■

I Polinomi di Bernoulli

Si consideri la famiglia di *Funzioni Generatrici di Bernoulli*

$$x \mapsto \frac{xe^{\alpha x}}{e^x - 1} := G_{\mathrm{B}}(x;\alpha), \tag{7}$$

parametrica vs. $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia il numeratore che il denominatore sono $\mathcal{M}$-espandibili. Inoltre, benché $G_{\mathrm{B}}(x;\alpha)$ possegga una discontinuità *eliminabile* in $x = 0$ *a ogni ordine* di derivazione, è sempre possibile assegnare, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_0^+$, il valore numerico $G_{\mathrm{B}}^{(n)}(0;\alpha) \equiv \lim_{x \to 0} G_{\mathrm{B}}^{(n)}(x;\alpha)$.

Dunque, l'espansione di $G_{\mathrm{B}}(x;\alpha)$ in $\mathcal{U}_\delta(0)$ in serie di potenze è lecita, *unica* (per il *Teorema di Unicità*) e determinabile dall'applicazione dell'algoritmo di divisione $\mathfrak{D}$ tra le $\mathcal{M}$-espansioni delle funzioni $x \mapsto xe^{\alpha x}$ e $x \mapsto e^x - 1$. Tale procedimento si rivela operativamente *più efficiente* del calcolo *derivazionale* diretto degli $\mathcal{M}$-coefficienti $G_{\mathrm{B}}^{(n)}(0;\alpha)$ dell'espansione cercata.

Con l'algoritmo $\mathfrak{D}$, che si presta bene alla programmazione simbolica, si scrive

$$\frac{x\,e^{\alpha x}}{e^x - 1} \equiv \frac{x\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha x)^n/n!}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!\right) - 1} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha^n/n!)\,x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty}(1/(n+1)!)\,x^n} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\alpha)\,x^n .$$

Poi, con le Eq.i (4), si determina la forma dei coefficienti parametrici $c_n(\alpha)$:

$$c_0(\alpha) \equiv 1, \qquad c_n(\alpha) \equiv \frac{\alpha^n}{n!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{n-k}(\alpha)}{(k+1)!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{7.1}$$

Il calcolo auto-iterativo dei coefficienti iniziali dà

$$c_0(\alpha) := 1 := \frac{\mathcal{B}_0(\alpha)}{0!},$$

$$c_1(\alpha) = \frac{\alpha^1}{1!} - \frac{c_0}{2!} = \alpha - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1!}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) := \frac{\mathcal{B}_1(\alpha)}{1!},$$

$$c_2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2!} - \left(\frac{c_1}{2!} + \frac{c_0}{3!}\right) = \frac{1}{2!}\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6}\right) := \frac{\mathcal{B}_2(\alpha)}{2!},$$

$$c_3(\alpha) = \frac{\alpha^3}{3!} - \left(\frac{c_2}{2!} + \frac{c_1}{3!} + \frac{c_0}{4!}\right) = \frac{1}{3!}\left(\alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha\right) := \frac{\mathcal{B}_3(\alpha)}{3!},$$

$$c_4(\alpha) = \frac{\alpha^4}{4!} - \left(\frac{c_3}{2!} + \frac{c_2}{3!} + \frac{c_1}{4!} + \frac{c_0}{5!}\right) = \frac{1}{4!}\left(\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 - \frac{1}{30}\right) := \frac{\mathcal{B}_4(\alpha)}{4!},$$

$$c_5(\alpha) = \frac{\alpha^5}{5!} - \left(\frac{c_4}{2!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_2}{4!} + \frac{c_1}{5!} + \frac{c_0}{6!}\right) = \frac{1}{5!}\left(\alpha^5 - \frac{5}{2}\alpha^4 + \frac{5}{3}\alpha^3 - \frac{1}{6}\alpha\right) := \frac{\mathcal{B}_5(\alpha)}{5!},$$

$$c_6(\alpha) = \frac{\alpha^6}{6!} - \left(\frac{c_5}{2!} + \frac{c_4}{3!} + \frac{c_3}{4!} + \frac{c_2}{5!} + \frac{c_1}{6!} + \frac{c_0}{7!}\right) = \frac{1}{6!}\left(\alpha^6 - 3\alpha^5 + \frac{5}{2}\alpha^4 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{42}\right) := \frac{\mathcal{B}_6(\alpha)}{6!}, \text{ etc.}.$$

I polinomi $\mathcal{B}_n(\alpha)$, ciascuno normalizzato vs. il valore fattoriale $n!$ del proprio ordine, sono noti come i *Polinomi di Bernoulli* (v. [2], [3]). Quindi, in $\mathcal{U}_\delta(0)$, la loro *funzione generatrice* si scrive

$$\mathcal{G}_{\mathrm{B}}(x;\alpha) \equiv \frac{x\,e^{\alpha x}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_n(\alpha)}{n!}\,x^n. \tag{8}$$

■

I Numeri di Bernoulli

L'assegnazione $\alpha \equiv 0$ nell'Eq. (8) seleziona la funzione particolare

$$x \mapsto \mathcal{G}_{\mathrm{B}}(x;0) := g_{\mathrm{B}}(x)$$
$$\equiv \frac{x}{e^x - 1} \equiv \frac{u}{2}\left(coth(u/2) - 1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(B_n/n!)x^n, \tag{9}$$

detta la *funzione generatrice* dei *Numeri di Bernoulli*. Pertanto, questi sono definiti da

$$B_n := \mathcal{B}_n(0). \tag{10}$$

Probabilmente, il metodo più agevole per determinare le costanti B_n è quello eseguito sulla forma equivalente dell'espansione (9),

$$1 \equiv \frac{e^x - 1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right),$$

mediante l'algoritmo formale $\mathfrak{M}$ di prodotto *à-la* Cauchy di due serie di potenze, Eq. (2), e il *Principio di Identità delle serie*. Le prime due applicazioni di $\mathfrak{M}$ danno

$$1 \equiv \frac{1}{1!}\frac{B_0}{0!}, \qquad \Rightarrow \quad B_0 = 1;$$
$$0 \equiv \frac{1}{1!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{2!}\frac{B_0}{0!}, \qquad \Rightarrow \quad B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Poi, ancora dall'Eq. (9), il fatto che la funzione

$$x \mapsto g_{\mathrm{B}}(x) - B_0 - B_1 x \equiv \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty}(B_n/n!)x^n$$
$$\equiv (x/2)(coth(x/2) - 1) - 1 + x/2 = (x/2)\,coth(x/2) - 1$$

è *pari* implica la nullità dei *Numeri Bernoulli* di indice *dispari* > 1, i.e., $B_{2n+1} \equiv 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, così da avere, necessariamente,

$$(x/2)\,coth(x/2) = 1 + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(B_{2n}/(2n)!)x^{2n}. \tag{11}$$

Per $n \in \mathbb{Z}^+$, i coefficienti B_{2n} si determinano cumulativamente rispetto ai coefficienti già calcolati mediante applicazioni ripetute di $\mathfrak{M}$. È facile (e un buon esercizio) verificare che i risultati

$$0 \equiv \frac{1}{1!}\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{3!}\frac{B_0}{0!}, \qquad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{6},$$
$$0 \equiv \frac{1}{1!}\frac{B_4}{4!} + \frac{1}{3!}\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{5!}\frac{B_0}{0!}, \qquad \Rightarrow \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$0 \equiv \frac{1}{1!}\frac{B_6}{6!} + \frac{1}{3!}\frac{B_4}{4!} + \frac{1}{5!}\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{6!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{7!}\frac{B_0}{0!}, \qquad \Rightarrow \quad B_6 = \frac{1}{42},$$
$$0 \equiv \frac{1}{1!}\frac{B_8}{8!} + \frac{1}{3!}\frac{B_6}{6!} + \frac{1}{5!}\frac{B_4}{4!} + \frac{1}{7!}\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{8!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{9!}\frac{B_0}{0!}, \qquad \Rightarrow \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \text{ etc.},$$

sono deducibili dalla formula auto-iterativa, dimostrabile *per induzione*,

$$B_{2n} := \frac{1}{2} - (2n)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!(2(n-k)+1)!}. \tag{12}$$

L'Eq. (11) è un punto di partenza per la determinazione in $\mathbb{R}$ di alcune espansioni importanti in serie di potenze *di Maclaurin* o *di Laurent* (questa, i.e., contenente anche potenze *negative* di x). La dilatazione $x \mapsto 2x$ nell'Eq. (11) genera la rappresentazione *di Laurent* (in $\mathbb{R}$)

$$\boxed{coth\, x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}}. \tag{13}$$

La trasformazione *euleriana* successiva $x \mapsto ix$ nell'Eq. (13) genera l'espansione goniometrica *circolare* corrispondente. Infatti, poiché

$$cot\, x \equiv i\, coth(ix) = i\left(\frac{1}{ix} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} (ix)^{2n-1} \right),$$

tenendo conto che $i^{2n} \equiv (-1)^n$, risulta

$$\boxed{cot\, x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}}. \tag{14}$$

La legittimità delle espansioni (13) e (14) dipende dall'eventualità che il valore del raggio di convergenza della loro *parte à-la Maclaurin*, evidentemente identico per entrambe, cada o meno in $(0, \pi)$. Per tale scopo, si consideri la $\mathcal{F}$-espansione in serie della restrizione 2π-periodica della funzione $u \mapsto cos\, \xi u$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, parametrica in $\xi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$,

$$cos(\xi u) = \frac{sin(\pi\xi)}{\pi} \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\xi^2 - n^2} cos(nu) \right). \tag{15}$$

Assegnando $u = \pi$ nell'Eq. (15), si ottiene l'uguaglianza

$$cot(\pi\xi) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\xi} - 2\xi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \xi^2} \right),$$

che, con la compressione $\xi := x/\pi$ $(\Rightarrow x \neq n\pi)$, diventa

$$cot\, x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - (x/\pi)^2} \equiv \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x/(n\pi)^2}{1 - (x/(n\pi))^2}. \tag{16}$$

Per la forma equivalente dell'Eq. (16)

$$x\, cot\, x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/(n\pi))^2}{1 - (x/(n\pi))^2},$$

sotto la condizione $|x| < \pi$, vale, $\forall\, n$, la rappresentazione in serie doppia

$$x\, cot\, x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n\pi} \right)^{2k}, \tag{17}$$

dedotta dal risultato classico per la somma della *Serie Geometrica* generale,

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q}.$$

Nell'Eq. (17), le corrispondenze sono $k_0 \equiv 1 \wedge |q| \equiv (x/(n\pi))^2 < 1 \;\; \forall\, n$.

Poiché la serie doppia nell'Eq. (17) è a termini di segno uniforme (positivo), le sue somme parziali possono essere scambiate, conservando il carattere e la somma della serie doppia. Inoltre, anche gli indici (muti) k e n possono essere scambiati indifferentemente tra loro poiché variano su insiemi numerabili identici (v. [4]). Pertanto, una rappresentazione equivalente dell'Eq. (17) è

$$\begin{aligned} x\cot x &= 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{k\pi}\right)^{2n} \equiv 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right)\frac{1}{\pi^{2n}}x^{2n} \\ &\equiv 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}x^{2n} \end{aligned} \tag{18}$$

in termini della *Funzione* ζ *di Riemann* di ordine positivo pari.
Confrontando l'Eq. (18) divisa per $x \neq 0$ con l'Eq. (14), il *Principio di Identità delle serie* lascia emergere la relazione tra i *Numeri di Bernoulli* e la *Funzione* ζ *di Riemann* $(n \in \mathbb{Z}^+)$:

$$B_{2n} \equiv \frac{(-1)^{n-1}2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n), \tag{19}$$

utilizzabile, con l'identità auto-generatrice (12), per determinare rapidamente le forme *chiuse* delle somme delle *Serie di Riemann* di ordine *pari*.
L'Eq. (19) consente di stimare asintoticamente (vs. n) il rapporto $|B_{2n}/B_{2(n+1)}|$, necessario per il calcolo del *raggio di convergenza*, nella variabile $\chi := x^2$ (si noti: $x^{2n+1} \equiv x\chi^n$), di qualsiasi espansione in serie di potenze nei cui coefficienti compaiano i *Numeri di Bernoulli* come fattori.
Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \zeta(2n)/\zeta(2(n+1)) = 1^+$, si trova che

$$\left|\frac{B_{2n}}{B_{2(n+1)}}\right| \sim \frac{2\pi^2}{(n+1)(2n+1)} \sim \frac{\pi^2}{n^2}\ . \tag{20}$$

Allora, è immediato verificare che le espansioni (13) e (14) risultano correttamente convergenti per $|x| \in (0,\pi)$ mentre l'espansione (9) di $g_B(x)$ converge per $|\chi|^{1/2} \equiv |x| \in [0,2\pi)$.

■

Esercizio 1

Si dimostri, *per induzione* vs. $n \in \mathbb{Z}^+$, che vale la formula auto-iterativa *generale* (cf/c Eq. (12))

$$B_n := -(n!)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!(n-k+1)!}\ .$$

■

Applicazioni ulteriori dei Numeri di Bernoulli

1. Se si sostituisce l'espressione (14) nell'identità $tan\,x \equiv cot\,x - 2cot(2x)$, per $|x| \in (0, \pi/2)$, si ottiene

$$tan\,x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n}-1)\,B_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n-1}. \tag{21}$$

Confrontando l'Eq. (21) con l'identità *euleriana* $tanh\,x \equiv -i\,tan(ix)$, si scrive formalmente

$$tanh\,x = -i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n-1}-1)\,B_{2n}}{(2n)!}\,(ix)^{2n-1}$$

e, dunque, poiché $i^{2n} \equiv (-1)^n$, risulta

$$tanh\,x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\,B_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n-1}. \tag{22}$$

La validità delle Eq.i (21) e (22) è prolungabile all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

2. Se si sostituisce l'espressione (14) nell'identità $csc\,x \equiv cot(x/2) - cot\,x$, per $|x| \in (0, \pi)$, si ottiene

$$csc\,x = \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)\,B_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n-1}. \tag{23}$$

Confrontando l'Eq. (23) con l'identità *euleriana* $csch\,x \equiv i\,csc\,ix$, si scrive formalmente

$$csch\,x = i\left(\frac{1}{ix} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)\,B_{2n}}{(2n)!}\,(ix)^{2n-1}\right),$$

che, ricordando ancora l'uguaglianza $i^{2n} \equiv (-1)^n$, si semplifica nella rappresentazione

$$csch\,x = \frac{1}{x} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^{2n-1}-1)\,B_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n-1}, \tag{24}$$

anch'essa valida per $|x| \in (0, \pi)$.

3. I *Numeri di Bernoulli* compaiono nelle espansioni in serie di potenze, queste *uniformemente* convergenti su intervalli compatti appropriati, di varie funzioni composte trascendenti.

3.1 Poiché $d\,ln|cos\,x|/dx = -tan\,x$, allora, per $|x| \in [0, \pi/2)$, dall'Eq. (21), si scrive

$$ln\,cos\,x \equiv -ln\,sec\,x = -\int_0^x tan\,u\,du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(2^{2n}-1)\,B_{2n}}{(2n)!}\int_0^x u^{2n-1}du,$$

portando alla conclusione che

$$ln\,cos\,x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1)\,B_{2n}}{n(2n)!}\,x^{2n}. \tag{25}$$

3.2 Iniziando, analogamente, dall'identità $d\,ln|sin\,x|/dx = cot\,x$, tenendo conto dell'Eq. (14), allora, per $|x| \in (0, \pi)$, si ottiene l'identità

$$ln|sin\,x| \equiv ln|sin\,x| - \cancel{ln|sin(\pi/2)|} = \int_{\pi/2}^{x} cot\,u\,du \equiv \int_{\pi/2}^{|x|} cot\,u\,du$$

$$= \int_{\pi/2}^{|x|}\left(\frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty}((-1)^n 2^{2n} B_{2n}/(2n)!)\,u^{2n-1}\right)du$$

$$= ln|x| - ln(\pi/2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!}(x^{2n} - (\pi/2)^{2n})$$

$$\equiv ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n} - ln(\pi/2) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \pi^{2n} B_{2n}}{2n(2n)!}\,. \qquad (\ddagger)$$

Non essendo l'uguaglianza ($\ddagger$) un'equazione ma un'*identità*, come tale, essa deve valere $\forall\, x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ e, poiché il suo membro *sinistro* non contiene costanti *additive*, l'identità ($\ddagger$) sussiste sse risulta

$$-ln(\pi/2) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \pi^{2n} B_{2n}}{2n(2n)!} \equiv 0\,.$$

Quindi, insieme con la rappresentazione cercata,

$$ln|sin\,x| \equiv ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n}, \qquad (26)$$

valida per $|x| \in (0, \pi)$, si determina la somma interessante, per $x = \pi/2$:

$$ln(\pi/2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1} \pi^{2n} B_{2n}}{2n(2n)!}\,, \qquad (27)$$

Da questa, segue che, essendo $B_{2n} < 0$ per n pari, allora, $(-1)^n B_{2n} < 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

3.3 Combinando le Eq.i (26) e (25), si scrive prontamente, $\forall |x| \in [0, \pi/2)$,

$$ln|tan\,x| \equiv -ln|cot\,x| = ln|sin\,x| - ln|cos\,x|$$

$$= ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1) B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n}\,.$$

Dalla semplificazione conclusiva, risulta, in termini dei *Numeri di Bernoulli*,

$$ln|tan\,x| = ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n-1}-1) B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n}. \qquad (28)$$

3.4 Le Eq.i (26) e (28) possono essere lette, alternativamente, come le espansioni correlate, per $|x| \in [0, \pi)$ e $\forall |x| \in [0, \pi/2)$, delle due applicazioni rispettive seguenti:

$$ln\left(\frac{sin\,x}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n}, \qquad (29)$$

$$ln\left(\frac{tan\,x}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n-1}-1) B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n}. \qquad (30)$$

A questo punto, applicando le *identità euleriane* pertinenti alle Eq.i (25), (26), (28), (29) e (30), è immediato scrivere le espansioni in serie di potenze, in forme *definitive* in un intorno di $x = 0$, delle funzioni composte

$$x \mapsto ln(cosh\, x) \equiv ln(cos(ix)) \equiv -ln(sech\, x), \tag{31}$$

$$x \mapsto ln|sinh\, x| \equiv ln|-i\, sin(ix)| \equiv -ln(csch\, x), \tag{32}$$

$$x \mapsto ln((sinh\, x)/x) \equiv ln|-i(sin(ix))/x| \equiv -ln((csch\, x)/|x|), \tag{33}$$

$$x \mapsto ln|tanh\, x| \equiv ln|-i\, tan(ix)| \equiv -ln|coth\, x|, \tag{34}$$

$$x \mapsto ln((tanh\, x)/x) \equiv ln|-i(tan(ix))/x| \equiv -ln((coth\, x)/x). \tag{35}$$

ricordando ancora, all'occorrenza, che $(ix)^{2n} \equiv (-1)^n x^{2n}$.

Inoltre, tutte le espansioni relative alle funzioni specificate dalle Eq.i (13), (14), (21), …, (35) sono rappresentabili, in modo equivalente, mediante la *Funzione* ζ *di Riemann* di argomento positivo pari, dall'identità (19).

Ad esempio, per $x \in (0, \pi)$, si trova, con l'Eq. (26), che

$$\begin{aligned}
\frac{ln(csch\, x)}{x} &= -\frac{ln(-i\, sin(ix))}{x} \equiv -\frac{ln|sin(ix)|}{x} \\
&= -\frac{1}{x}\left(ln|ix| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!}(ix)^{2n} \right) = -\frac{ln\, x}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!} x^{2n-1} \\
&\equiv -\frac{ln\, x}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{2^{2n-1}}}{n\cancel{(2n)}!} \frac{(-1)^{n-1}\cancel{2}\,\cancel{(2n)!}}{(\cancel{2}\pi)^{2n}} \zeta(2n)\, x^{2n-1} \\
&= -\frac{ln\, x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi^{2n}} \zeta(2n)\, x^{2n-1};
\end{aligned} \tag{36}$$

come pure, la somma (27), ha la rappresentazione alternativa

$$ln(\pi/2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n} n}. \tag{37}$$

■

I Polinomi di Euler

Analoga a $x \mapsto \mathcal{G}_{\mathrm{B}}(x;\alpha)$, Eq. (7), si consideri la famiglia di *Funzioni Generatrici di Euler*

$$x \mapsto \frac{2e^{\eta x}}{e^x+1} := \mathcal{G}_{\mathrm{E}}(x;\eta), \tag{38}$$

parametrica in $\eta \in \mathbb{R}$. Entrambe le quantità che, rispettivamente, ne costituiscono il numeratore e il denominatore sono $\mathcal{M}$-espandibili in $\mathbb{R}$.
Procedendo come con i *Polinomi di Bernoulli*, si dividono tra loro le espansioni delle funzioni $x \mapsto 2e^{\eta x}$ e $x \mapsto e^x+1$, con l'obiettivo della costruzione dell'espansione formale della famiglia $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}(x;\eta)$, coincidente con l'espansione effettiva di questa, per il *Teorema di Unicità*:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\eta)x^n := \frac{2e^{\eta x}}{e^x+1} \equiv \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}(2\eta^n/n!)x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty}(1/n!)x^n+1} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}(2\eta^n/n!)x^n}{2+\sum_{n=0}^{+\infty}(1/n!)x^n} \equiv \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\eta)x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(\eta)x^n},$$

Specificati i coefficienti $a_n(\eta) \equiv 2\eta^n/n!, \forall\, n \in \mathbb{Z}_0^+$ mentre $b_0 \equiv 2 \wedge b_n \equiv 1/n!, \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, dalle Eq. (4) di definizione dell'algoritmo $\mathfrak{D}$, si trova la forma dei coefficienti parametrici $c_n(\eta)$:

$$c_0(\eta) \equiv 1, \qquad c_n(\eta) \equiv \frac{\eta^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{c_{n-k}(\eta)}{k!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{38.1}$$

Per i primi sette coefficienti, con un calcolo auto-iterativo, risultano le definizioni polinomiali

$$c_0(\eta) = 1 := \frac{\mathcal{E}_0(\eta)}{0!};$$

$$c_1(\eta) = \frac{\eta^1}{1!} - \frac{1}{2}\frac{c_0}{1!} = \eta - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1!}\left(\eta - \frac{1}{2}\right) := \frac{\mathcal{E}_1(\eta)}{1!};$$

$$c_2(\eta) = \frac{\eta^2}{2!} - \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{1!} + \frac{c_0}{2!}\right) = \frac{1}{2!}(\eta^2 - \eta) := \frac{\mathcal{E}_2(\eta)}{2!};$$

$$c_3(\eta) = \frac{\eta^3}{3!} - \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{1!} + \frac{c_1}{2!} + \frac{c_0}{3!}\right) = \frac{1}{3!}\left(\eta^3 - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{1}{4}\right) := \frac{\mathcal{E}_3(\eta)}{3!};$$

$$c_4(\eta) = \frac{\eta^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{c_3}{1!} + \frac{c_2}{2!} + \frac{c_1}{3!} + \frac{c_0}{4!}\right) = \frac{1}{4!}(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta) := \frac{\mathcal{E}_4(\eta)}{4!};$$

$$c_5(\eta) = \frac{\eta^5}{5!} - \frac{1}{2}\left(\frac{c_4}{1!} + \frac{c_3}{2!} + \frac{c_2}{3!} + \frac{c_1}{4!} + \frac{c_0}{5!}\right) = \frac{1}{5!}\left(\eta^5 - \frac{5}{2}\eta^4 + \frac{5}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\right) := \frac{\mathcal{E}_5(\eta)}{5!};$$

$$c_6(\eta) = \frac{\eta^6}{6!} - \frac{1}{2}\left(\frac{c_5}{1!} + \frac{c_4}{2!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_2}{4!} + \frac{c_1}{5!} + \frac{c_0}{6!}\right) = \frac{1}{6!}(\eta^6 - 3\eta^5 + 5\eta^3 - 3\eta) := \frac{\mathcal{E}_6(\eta)}{6!}, \text{ etc.}$$

I polinomi $\mathcal{E}_n(\eta)$, ciascuno normalizzato vs. il valore fattoriale $n!$ del proprio ordine, sono noti come i *Polinomi di Euler* (v. [3], P. 14-16). Quindi, in $\mathcal{U}_\delta(0)$, la loro *funzione generatrice* si scrive

$$\mathcal{G}_{\mathrm{E}}(x;\eta) = \frac{2e^{\eta x}}{e^x+1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{E}_n(\eta)}{n!}x^n. \tag{39}$$

■

I Numeri di Euler

L'assegnazione $\eta \equiv 1/2$ nell'Eq. (39) seleziona la funzione particolare

$$x \mapsto \mathcal{G}_{\mathrm{E}}(x;1/2) := g_{\mathrm{E}}(x),$$
$$\equiv \frac{2e^{x/2}}{e^{x}-1} \equiv sech\frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{E}_n(1/2)}{n!}x^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E_n}{2^n n!}x^n, \tag{40}$$

detta la *funzione generatrice* dei *Numeri di Euler* (cf/c Eq. (10)), la definizione dei quali è

$$E_n := 2^n\mathcal{E}_n(1/2). \tag{41}$$

Poiché $x \mapsto g_E(x)$ è una funzione *pari*, questo implica necessariamente che, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_0^+$, risulta $\mathcal{E}_{2n+1}(1/2) \equiv E_{2n+1} = 0$. Quindi, la rappresentazione (40) si riduce a

$$g_{\mathrm{E}}(x) \equiv sech(x/2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{E}_{2n}(1/2)}{(2n)!}x^{2n} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E_{2n}}{2^{2n}(2n)!}x^{2n}, \tag{42}$$

caratterizzata dai soli *Numeri di Euler* di indice pari, $E_{2n} \equiv 2^{2n}\mathcal{E}_{2n}(1/2)$.

□

Le espansioni di *sech x* e di *sec x* **in serie di potenze**

Con l'omotetìa $x \mapsto 2x$, l'Eq. (42) genera l'espansione formale

$$sech\,x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}. \tag{43}$$

Come per i *Numeri di Bernoulli* (v. P. 5-6), il metodo più agevole per la determinazione delle costanti E_{2n} resta il ricorso alla rappresentazione equivalente dell'Eq. (43),

$$1 \equiv cosh\,x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\right),$$

alla quale, si applica l'algoritmo $\mathfrak{M}$ del prodotto formale tra due serie di potenze, Eq. (2), rispetto alla variabile $\chi := x^2$, insieme con il *Principio di Identità delle serie*. Il calcolo esplicito,

$$1 \equiv \frac{1}{0!}\frac{E_0}{0!}, \qquad \Rightarrow\ E_0 = 1,$$
$$0 \equiv \frac{1}{0!}\frac{E_2}{2!}+\frac{1}{2!}\frac{E_0}{0!}, \qquad \Rightarrow\ E_2 = -1,$$
$$0 \equiv \frac{1}{0!}\frac{E_4}{4!}+\frac{1}{2!}\frac{E_2}{2!}+\frac{1}{4!}\frac{E_0}{0!}, \qquad \Rightarrow\ E_4 = 5,$$
$$0 \equiv \frac{1}{0!}\frac{E_6}{6!}+\frac{1}{2!}\frac{E_4}{4!}+\frac{1}{4!}\frac{E_2}{2!}+\frac{1}{6!}\frac{E_0}{0!}, \qquad \Rightarrow\ E_6 = -61,$$
$$0 \equiv \frac{1}{0!}\frac{E_8}{8!}+\frac{1}{2!}\frac{E_6}{6!}+\frac{1}{4!}\frac{E_4}{4!}+\frac{1}{6!}\frac{E_2}{2!}+\frac{1}{8!}\frac{E_0}{0!}, \qquad \Rightarrow\ E_8 = 1385, \text{ etc.},$$

indica che i *Numeri di Euler* E_{2n}, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, sono alternatamente $\gtrless 0$ per n pari\dispari e che si auto-generano mediante la formula ricorsiva $(E_0 = 1)$

$$E_{2n} := -(2n)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{E_{2k}}{(2k)!(2(n-k))!} \,. \tag{44}$$

Ritornando all'Eq. (43), la sostituzione *euleriana* $x \mapsto ix$ fornisce l'espansione formale

$$sec\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \tag{45}$$

che, quando sia legittima, è convergente per $|x| \in [0, \pi/2 - \varepsilon]$, insieme con l'espansione associata (43). Nel caso dei *Numeri di Euler*, il controllo delle Eq.i (43) e (45) mostra che la determinazione del raggio di convergenza (eventuale) comune dipende dall'andamento asintotico del rapporto $|E_n / E_{2(n+1)}|$, analogamente alle conclusioni raggiunte per i *Numeri di Bernoulli* (cf/c Eq. (20)).
Tale questione può essere affrontata osservando che la funzione *meromorfa* (da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$)

$$f:\ z \mapsto sec\, z$$

ha *poli* tutti *semplici* in corrispondenza di $z \equiv (2\nu+1)\pi/2 := p_\nu$, con $\nu \in \mathbb{Z}$. I valori dei *residui* ai poli sono dati da

$$\begin{aligned} b_\nu &= \lim_{z \to p_\nu} \left(\frac{1}{0!} \frac{d^0}{dz^0} ((z - p_\nu) sec\, z) \right) \equiv \lim_{z \to p_\nu} \frac{z - p_\nu}{cos\, z} \equiv \lim_{w \to 0} \frac{w}{cos(w + (2\nu+1)\pi/2)} \\ &= \lim_{w \to 0} \frac{w}{\pm sin\, w} \equiv (-1)^{\nu+1}, \end{aligned}$$

avendo posto $w := z - (2\nu+1)\pi/2 \equiv z - p_\nu$ e controllando la parità\disparità di ν.
Allora, per il *Teorema di espansione di Mittag-Leffler* (v. [5], [6]), si scrive

$$sec\, z = sec\, 0 + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu \left(\frac{1}{z - p_\nu} + \frac{1}{p_\nu} \right) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{-n} \left(\frac{1}{z - p_{-n}} + \frac{1}{p_{-n}} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{z - p_n} + \frac{1}{p_n} \right) .$$

Poi, osservato che $p_n \equiv p_{-(n+1)}$, lo sviluppo esplicito prosegue con

$$\begin{aligned} sec\, z &= 1 + \left(-\left(\frac{1}{z - \pi/2} + \cancel{\frac{1}{\pi/2}} \right) + \left(\frac{1}{z + \pi/2} + \cancel{\frac{1}{-\pi/2}} \right) + \left(\frac{1}{z - 3\pi/2} + \cancel{\frac{1}{3\pi/2}} \right) - \right. \hookleftarrow \\ &\quad \left. \hookrightarrow - \left(\frac{1}{z + 3\pi/2} + \cancel{\frac{1}{-3\pi/2}} \right) - \left(\frac{1}{z - 5\pi/2} + \cancel{\frac{1}{5\pi/2}} \right) + \left(\frac{1}{z + 5\pi/2} + \cancel{\frac{1}{-5\pi/2}} \right) + \ldots \right) \\ &= 1 + \left(\frac{-\pi}{z^2 - (\pi/2)^2} + \frac{3\pi}{z^2 - (3\pi/2)^2} + \frac{-5\pi}{z^2 - (5\pi/2)^2} + \ldots \right) - \left(\frac{4}{\pi} - \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{5\pi} - \ldots \right) \\ &= 1 + 4\pi \left(\frac{1}{\pi^2 - 4z^2} - \frac{3}{9\pi^2 - 4z^2} + \frac{5}{25\pi^2 - 4z^2} - \ldots \right) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &\equiv \cancel{1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4z^2} - \cancel{\frac{4}{\pi} tan^{-1} 1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4z^2} \,. \end{aligned} \tag{46}$$

Ora, la *restrizione* $\mathbb{C} \setminus \{(2\nu+1)\pi/2\}_{\nu \in \mathbb{Z}} \searrow \mathbb{R} \setminus \{(2\nu+1)\pi/2\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ del dominio di $f \equiv sec$ fornisce l'espansione $(x \equiv \mathfrak{Re}\, z)$,

$$sec\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4x^2} \equiv \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{(2n+1)^2 (\pi/2)^2}} \right) \tag{46.1}$$

che, sotto il vincolo sufficiente $|x| \in [0, \pi/2)$, è rappresentabile come *serie doppia*,

$$sec\, x \equiv \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{(2n+1)\pi/2} \right)^{2k} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2(k+1)}}{(2n+1)^{2k+1} \pi^{2k+1}} x^{2k}, \tag{46.2}$$

Infatti, in tale circostanza, nel termine generale della somma (46.1), è riconoscibile la somma della serie geometrica di ragione $\rho = \dfrac{x^2}{((2n+1)\pi/2)^2}$ (<1).

Per le ragioni identiche a quelle che legittimano l'Eq. (17), si può porre l'espansione (46.2) nella forma in cui gli indici (muti) del termine generale sono scambiati tra loro, i.e.,

$$sec\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2(n+1)}}{\pi^{2n+1}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} \right) x^{2n} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2(n+1)}}{\pi^{2n+1}} \beta_{\mathrm{D}}(2n+1)\, x^{2n}, \tag{47}$$

dove, $\beta_{\mathrm{D}}(2n+1)$ è la *Serie di Dirichlet* di ordine positivo *dispari*.

Il confronto tra i termini generali delle espansioni (47) e (45), conduce all'identità analoga a quella espressa dall'Eq. (19),

$$E_{2n} \equiv \frac{(-1)^n 2^{2(n+1)} (2n)!}{\pi^{2n+1}} \beta_{\mathrm{D}}(2n+1), \tag{48}$$

utilizzabile, con l'identità auto-generatrice (44), per determinare rapidamente le forme *chiuse* delle somme delle *Serie di Dirichlet* di ordine *dispari* (v. Tabella, P. 18).

Poiché $\lim_{n \to +\infty} \beta_{\mathrm{D}}(2n+1)/\beta_{\mathrm{D}}(2(n+1)+1) = 1^-$, la stima asintotica (vs. n)

$$\left| \frac{E_{2n}}{E_{2(n+1)}} \right| \sim \frac{\pi^2}{8(n+1)(2n+1)} \sim \frac{\pi^2/16}{n^2} \tag{49}$$

implica la convergenza delle espansioni (43) e (45) in ogni cerchio di raggio $|\chi|^{1/2} \equiv |x| < \pi/2$.

Pertanto, dall'Eq. (47), si deduce l'espansione (prevedibile) equivalente alla (43),

$$sech\, x \equiv sec(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2(n+1)}}{\pi^{2n+1}} \beta_{\mathrm{D}}(2n+1)\, x^{2n}. \tag{50}$$

■

Un'acceleratrice di convergenza per le serie: la Funzione di Hurwitz

Per completezza di discussione, va ricordata una rappresentazione alternativa di β_{D}, riconducibile alla cosiddetta *Funzione* ζ_{H} *di Hurwitz* (†), una generalizzazione della *Funzione* ζ *di Riemann*. La *Funzione* ζ_{H}, implementata in molti programmi di calcolo, viene utile come algoritmo accelerativo efficace nella determinazione delle somme di certe classi di serie. Ne sono presentate, qui, alcune proprietà essenziali in $\mathbb{R}$, che di incontrano in certe applicazioni di Fisica Teorica.

La rappresentazione convenzionale in serie di ζ_{H}, ristretta a $\mathbb{R}^{+}$, i.e., $\{q, x\} \in (\mathbb{R}^{+})^2$, è

$$x \mapsto \zeta_{\mathrm{H}}(q, x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^q}, \tag{51}$$

con $x \notin \mathbb{Z}_0^-$. Se la definizione di ζ_{H} viene ristretta ai soli valori $q \in (1, +\infty)$, la rappresentazione (51) converge *uniformemente* in ogni intervallo compatto contenuto in $(1, +\infty)$.
Inoltre, se $x = 1$, è immediato osservare che ζ_{H} si riduce alla *Funzione* ζ *di Riemann* ordinaria.

Proposizione

La *Funzione* β_{D} *di Dirichlet*,

$$x \mapsto \beta_{\mathrm{D}}(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^x}, \tag{52}$$

definita per $x \in (1, +\infty)$, è fattorizzabile, in ogni intervallo compatto di $(1, +\infty)$, nel prodotto tra una funzione esponenziale decrescente e la differenza tra due *Funzioni di Hurwitz*. ▲

La verifica è semplice: separando gli addendi di indice *pari* da quelli di indice *dispari* nella serie (52), è *ammissibile* scrivere

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^x} &= \left(1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{13^x} + \frac{1}{17^x} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{3^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{19^x} + \ldots\right) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+3)^x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^{-x}}{(k+1/4)^x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^{-x}}{(k+3/4)^x} \\ &\equiv 2^{-2x}(\zeta_{\mathrm{H}}(x, 1/4) - \zeta_{\mathrm{H}}(x, 3/4)),\end{aligned} \tag{53}$$

avendo sostituito i valori $x = 1/4 \veebar 3/4$ nell'Eq. parametrica generale (51).

Come esempi pertinenti, dopo aver sostituito $x := 2n+1$, con $n \in \mathbb{Z}^{+}$, le espressioni (48) e (50) diventano, rispettivamente,

$$E_{2n} \equiv \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} \pi^{2n+1}} (\zeta_{\mathrm{H}}(2n+1, 1/4) - \zeta_{\mathrm{H}}(2n+1, 3/4)), \tag{54}$$

$$\mathit{sech}\, x \equiv \mathit{sec}(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} \pi^{2n+1}} (\zeta_{\mathrm{H}}(2n+1, 1/4) - \zeta_{\mathrm{H}}(2n+1, 3/4)) x^{2n}. \tag{55}$$

■

(†) HURWITZ (ADOLF, 1859-1919), allievo di KUMMER, di WEIERSTRASS, di KRONECKER e di KLEIN. Professore a Königsberg e a Zurigo, studiò le *superfici di Riemann* e le *equazioni modulari* nella Teoria dei Numeri Algebrici.

Esercizio 2

Si verifichi che, mediante il prolungamento di x a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0^-$, ζ_{H} può essere dedotta dalla *Formula di Plana-Abel* in $\mathbb{R}$, nello sviluppo della *Funzione Trigamma*, ψ' (e.g., v. [13], Eq. (123)).

Esercizio 3

In modo analogo all'Eq. (53), per la cosiddetta *Funzione* λ, si ricava la rappresentazione in serie

$$x \mapsto \lambda(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^x} \equiv 2^{-2x}(\zeta_{\mathrm{H}}(x, 1/4) + \zeta_{\mathrm{H}}(x, 3/4)), \tag{56.1}$$

uniformemente convergente in ogni intervallo *compatto* del dominio $(1, +\infty)$ di x.
D'altra parte, si verifichi che esiste la rappresentazione alternativa, più semplice,

$$x \mapsto \lambda(x) \equiv 2^{-x}\zeta_{\mathrm{H}}(x, 1/2). \tag{56.2}$$

Esercizio 4

Si verifichi che, $\forall\{a, b\} \subset \mathbb{R}^+$, è ammissibile esprimere le *serie generali* seguenti nelle rispettive *rappresentazioni di Hurwitz*:

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(ak+b)^x} \equiv a^{-x}\zeta_{\mathrm{H}}(x, b/a), \tag{57}$$

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(ak+b)^x} \equiv a^{-x}(\zeta_{\mathrm{H}}(x, b/a) - 2^{1-x}\zeta_{\mathrm{H}}(x, (a+b)/(2a))), \tag{58}$$

entrambe *uniformemente convergenti* in ogni intervallo *compatto*, interno al dominio $(1, +\infty)$ di x.
L'Eq. (58) è applicabile al calcolo numerico delle somme $\beta_{\mathrm{D}}(p)$ di Dirichlet (v. Tabella, p. 18).

■

Rappresentazioni integrali in $\mathbb{R}$ della Funzione di Hurwitz mediante la Funzione Gamma

Nella rappresentazione integrale convenzionale (di Legendre) della *Funzione* Γ ,

$$x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt ,$$

si esegua la sostituzione di variabile $t \mapsto (k+q)u$, dove u è la nuova variabile di integrazione. Segue che $dt \equiv (k+q)du$ e, quindi, senza alcun cambiamento del dominio di integrazione, risulta

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} ((k+q)u)^{x-1} e^{-(k+q)u} (k+q) du \equiv (k+q)^x \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-ku} e^{-qu} du .$$

Con il sistema di restrizioni $\{k, q\} \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{R}^+ \wedge x \in (1, +\infty)$, vale sempre l'uguaglianza

$$\Gamma(x) \frac{1}{(k+q)^x} = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-ku} e^{-qu} du ,$$

i cui membri, sommati vs. l'indice k da 0 a M , danno luogo alla forma equivalente

$$\Gamma(x) \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{(k+q)^x} = \sum_{k=0}^{M} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-ku} e^{-qu} du .$$

L'integrale a destra è *uniformemente* convergente in $\mathbb{R}^+$. Allora, passando al limite $M \to +\infty$, è ammissibile (e.g., per il *criterio di Weierstrass*) scambiare tra loro le operazioni di integrazione e di somma di una serie, i.e., assorbire la sommatoria da esterna a interna all'integrale:

$$\Gamma(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+q)^x} = \int_0^{+\infty} u^{x-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ku} \right) e^{-qu} du .$$

Da quest'ultima uguaglianza, si riconoscono le rappresentazioni in serie, a sinistra, della *Funzione di Hurwitz* e, a destra, nella funzione integranda, della *Serie Geometrica* di ragione e^{-u} (≤ 1), convergente alla somma $(1 - e^{-u})^{-1}$. Quindi, si ottengono le rappresentazioni integrali equivalenti, convergenti *uniformemente* per $x \in (1, +\infty)$, del prodotto

$$\Gamma(x) \zeta_{\mathrm{H}}(x, q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1} e^{-qu}}{1 - e^{-u}} du \equiv \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1} e^{(1-q)u}}{e^u - 1} du . \tag{59}$$

Come si è già osservato, il caso $q = 1$ muta ζ_{H} in ζ , così che le rappresentazioni integrali (59) si riducono a quelle dell'integrale bosonico $\mathcal{M}_{-}(x)$ (e.g., v. [[13]], Eq. (176), P. 77).

Infine, dall'Eq. (59), è immediato dedurre le *rappresentazioni integrali* equivalenti di ζ_{H} , pesate vs. la *Funzione* Γ ,

$$\zeta_{\mathrm{H}}(x, q) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1} e^{-qu}}{1 - e^{-u}} du \equiv \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1} e^{(1-q)u}}{e^u - 1} du . \tag{60}$$

■

Le espansioni della Funzione di Gudermann e della sua inversa

1. La *Funzione di Gudermann* (o *gudermanniana* o *ampiezza iperbolica*), gd (††),

$$x \mapsto gd\,x := 2\tan^{-1}(e^x) - \pi/2$$

è $\mathcal{M}$-espandibile, essendo $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Poiché la sua funzione derivata 1ª è data da

$$x \mapsto \frac{d}{dx} gd\,x \equiv \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}(e^x) - \pi/2) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \equiv sech\,x\,,$$

avvalendosi del *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* e dell'Eq. (45), è legittimo scrivere, per $|x| \in [0, \pi/2)$,

$$gd\,x = \int_0^x sech\,u\,du \equiv \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} u^{2n} du \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} \int_0^x u^{2n} du\,.$$

Quindi, se $|x| \in [0, \pi/2)$, vale l'espansione in serie di potenze ovvero in termini di *Somme* β_D *di Dirichlet* di ordine positivo *dispari*, dall'Eq. (48),

$$gd\,x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2(n+1)}}{(2n+1)\pi^{2n+1}} \beta_D(2n+1) x^{2n+1}. \tag{61}$$

2. Essendo la *gudermanniana* monotòna-crescente ($\in \mathcal{M}^\uparrow$) in $\mathbb{R}$, allora, $\exists\ gd^{-1}$, la sua funzione *inversa*, $\in \mathcal{C}^\infty((-\pi/2, 1/2))$, anch'essa $\in \mathcal{M}^\uparrow$, la quale è rappresentabile come

$$x \mapsto gd^{-1}x \equiv ln\,tan(x/2 + \pi/4).$$

Con lo stesso procedimento seguito per la funzione gd, si calcola

$$x \mapsto \frac{d}{dx} gd^{-1}x \equiv \frac{d}{dx} ln\,tan(x/2 + \pi/4) = \ldots = \frac{1}{sin(x + \pi/2)} \equiv \frac{1}{cos\,x} \equiv sec\,x\,,$$

da cui, quando $|x| \in [0, \pi/2)$, risulta, correttamente,

$$gd^{-1}x = \int_0^x sec\,u\,du \equiv \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} u^{2n} du \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} \int_0^x u^{2n} du\,,$$

i.e., come conclusione (‡),

$$gd^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2(n+1)}}{(2n+1)\pi^{2n+1}} \beta_D(2n+1) x^{2n+1}. \tag{62}$$

■

(††) E.g., v. il math-notebook PDF: **Struttura analitica della Goniometria Iperbolica**, P. 8-11.

(‡) Una raccolta critica di formule, di tavole e di riferimenti avanzati sui *Polinomi* e i *Numeri* sia *di Bernoulli* che *di Euler* costituisce il contenuto del cap. **23** in [11], P. 803-819.

Una tabella di serie $\beta_{\mathrm{D}}(p)$ di Dirichlet

Rappresentazioni numeriche *chiuse* delle somme delle *Serie* $\beta_{\mathrm{D}}(p)$ *di Dirichlet*, $p \in \mathbb{Z}^{+}$, esistono solo per l'ordine p *dispari*. Il calcolo relativo ai primi due di tali ordini, $p = 1, 3$, mediante la *Serie di Fourier*, è sviluppato nel math-notebook PDF: **Serie di Fourier in $\mathbb{R}$ - Proprietà e applicazioni**, P. 20-21. In ogni caso, l'algoritmo numerico *più efficiente* resta quello deducibile dall'Idn. (48):

$$\beta_{\mathrm{D}}(p) \mapsto \beta_{\mathrm{D}}(2n+1) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} = \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2(n+1)}(2n)!} E_{2n} . \tag{63}$$

Nella tabella seguente, sono riportate le prime otto somme $\beta_{\mathrm{D}}(p)$ *esatte*, di ordine p *dispari*. Come riferimento di controllo, il compendio [8] si è rivelato estremamente utile.

p	$\beta_{\mathrm{D}}(p)$
1	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$
3	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
5	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = \frac{5}{1536}\pi^5$
7	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^7} = \frac{61}{184320}\pi^7$
9	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^9} = \frac{277}{8257536}\pi^9$
11	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{11}} = \frac{50521}{14863564800}\pi^{11}$
13	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{13}} = \frac{540553}{1569592442880}\pi^{13}$
15	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{15}} = \frac{199360981}{5713316492083200}\pi^{15}$

Vale la pena di ricordare che la somma della Serie di Dirichlet di ordine $p = 2$ corrisponde alla nota *Costante* λ_{C} *di* CATALAN (E. C., 1814-1894), calcolabile solo *numericamente*. In forma approssimata alla 20ª cifra decimale, risulta

$$\beta_{\mathrm{D}}(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} := \lambda_{\mathrm{C}} \approx 0.91596559417721901505 . \tag{64}$$

La *Costante* λ_{C} si incontra frequentemente in questioni di Analisi Combinatoria e nel calcolo di certe classi di serie e di integrali definiti, importanti in Astrofisica e in Gravitazione.

Un metodo alternativo per il calcolo di λ_{C}, mediante la *Funzione* ψ' (*Trigamma*), è presentato, ancora nel math-notebook PDF [13], alle PP. 39-40.

■■■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [6], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

[1] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, VOL. **1** (1990, RIST. 2002), P. 475-496; **2** (1991; RIST. 1998), CAP. 3, ZANICHELLI (-MASSON);

[2] BONONCINI, V. E. - FANTI, G., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. **1**, CAP. VII, 5A ED., C.E.D.A.M. (1975);

[3] LORENZI, A. - PAPARONI, E., *Esercizi e problemi di Analisi Due*, CAP. 1, 2 & 3, MCGRAW-HILL LIBRI ITALIA S.R.L. (1994);

[4] SALSA, S. - SQUELLATI, A., *Esercizi di Analisi Matematica 2*, PARTE **I**, CAP. 3, ED. MASSON (1993);

[5] HENRICI, P., *Applied and Computational Complex Analysis*, **I**, P. 35-42, JOHN WILEY & SONS (1974);

[6] WHITTAKER, E. T. - WATSON, G. N., *A Course of Modern Analysis*, 4TH ED., P. 125-127, CAMBRIDGE UN. PRESS., (1927; REPR. 1973);

[7] MARKUSHEVICH, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2ND ED., VOL.S **1**, **2**, **3**, CHELSEA PUBL. CO. (RIST. 1977);

[8] TEMME, N. M., *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, P. 1-6, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);

[9] CARRIER, G. F. - KROOK, M. - PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable*, MCGRAW-HILL, INC. (1966);

[10] TITCHMARSH, E. C., *The Theory of Functions*, 2ND ED., P. 27-31, OXFORD UN. PRESS, (1939, RIST. C/CORR., 1978);

[11] MITTAG-LEFFLER, M. G., *Acta Soc. Scient. Fennicae*, **XI** (1880), P. 273-293; dello stesso autore, si consulti, anche: *Acta Mathematica*, **IV** (1884), P. 1-79;

[12] SPIEGEL, M. R., *Theory and problems of Complex Variables*, 2ND ED., P. 175, 191-192, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1964);

[13] L'AUTORE (CM) [math-notebook PDF],
PROPRIETÀ E APPLICAZIONI IN $\mathbb{R}$ DELLA FUNZIONE GAMMA.

□

[14] ZWILLINGER, D., ED., *Standard Mathematical Tables and Formulae*, 33RD ED., C.R.C. PRESS (2003);

[15] GRADSHTEYN, I. S. - RYZHIK, I. M., eds., *Table of Integrals, Series and Products*, 7TH ED., ACADEMIC PRESS (2007);

[16] ABRAMOWITZ, M. - STEGUN, I. A., EDS., *Handbook of Mathematical Functions*, DOVER PUBNS., INC. (1972), REF.: AMS-55 (versione senza tavole numeriche);

[17] OLVER, F. W. J. - LOZIER, D. W. - BOISVERT, R. F. - CLARK, C. W., EDS., *N.I.S.T. Handbook of Mathematical Functions*, CAMBRIDGE UN. PRESS (2010) [link: http://dlmf.nist.gov/];

[18] HANSEN, E. R., *A Table of Series and Products*, PRENTICE HALL, INC. (1975)
(dall'autore (CM), su richiesta e-mail, è disponibile un ADDENDUM (2018) in allegato PDF gratuito).

■■■