

Proprietà e applicazioni in  $\mathbb{R}$  della  
**Funzione GAMMA**

claudio magno

<https://www.cm-physmath.net/>

revisione  
13 aprile 2024

Dal modello 3-dim tracciato e inciso a mano in un blocco di legno ...

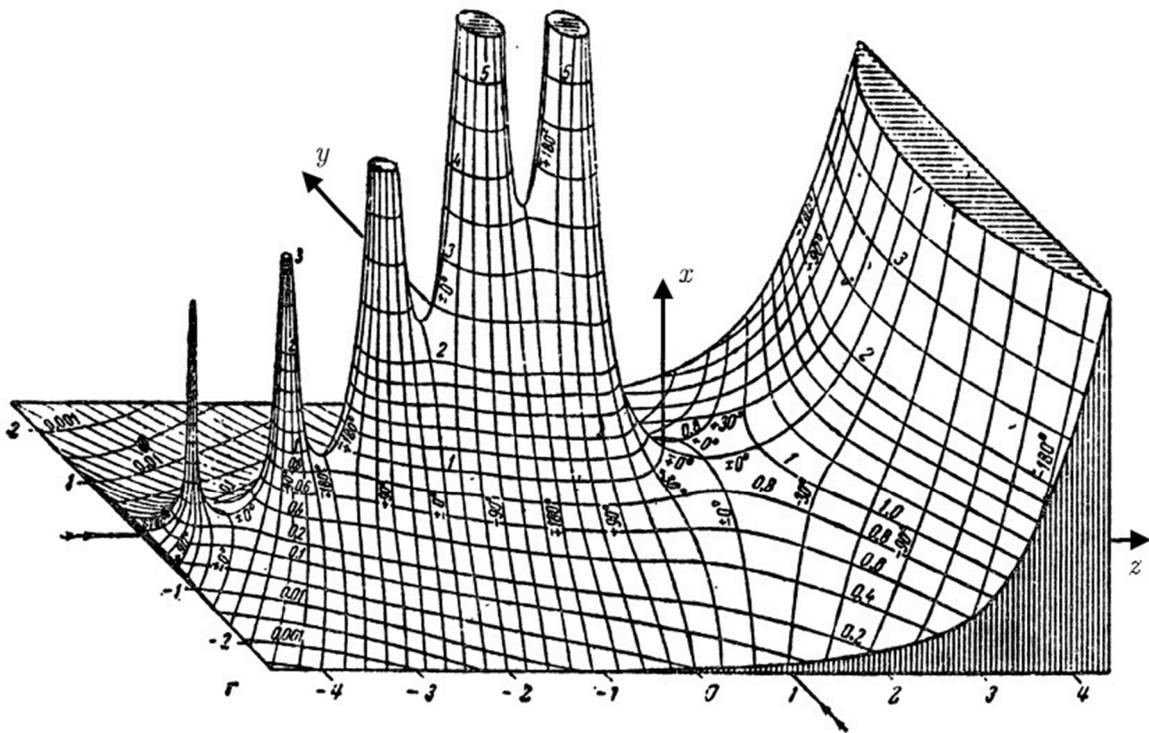


Fig. I – Grafico in  $\mathbb{R}^3$  di  $(z; y) \mapsto x = |\Gamma(w)|$ , con  $w = z + iy$  (v. [67] e [55])  
 (qui, la terna (destrorsa) di riferimento rettangolare è ordinata nella sequenza non-standard  $\{Z, Y, X\}$ ).

... alla *computer graphics* (qui, con GNUPLOT™ [76]):

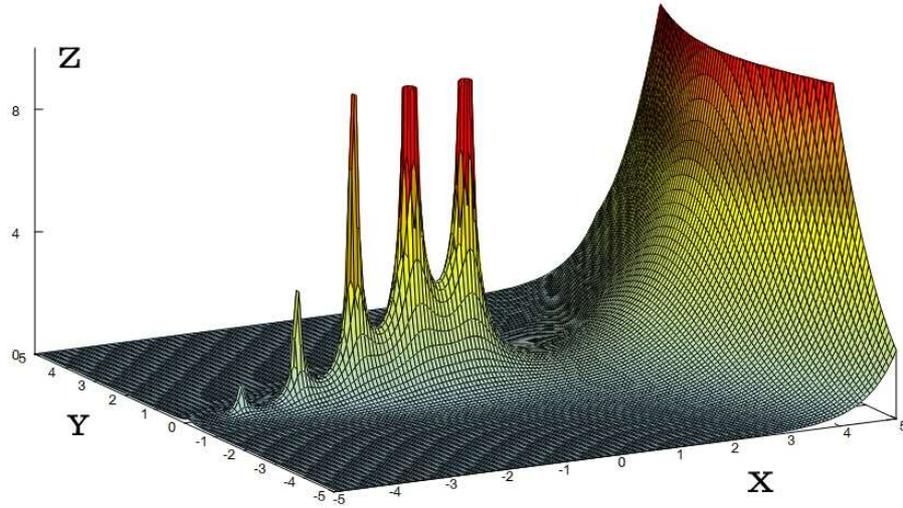


Fig. II – Grafico in  $\mathbb{R}^3$  di  $z = |\Gamma(w)|$ , con  $w = x + iy$ .

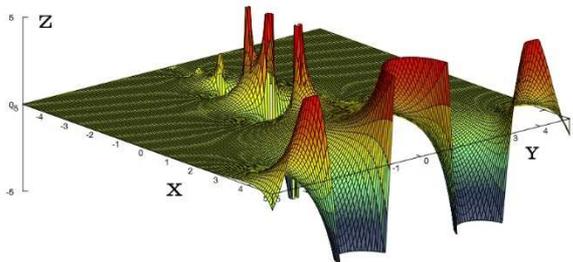


Fig. II-a – Grafico in  $\mathbb{R}^3$  di  $z = \Re(\Gamma(w))$ .

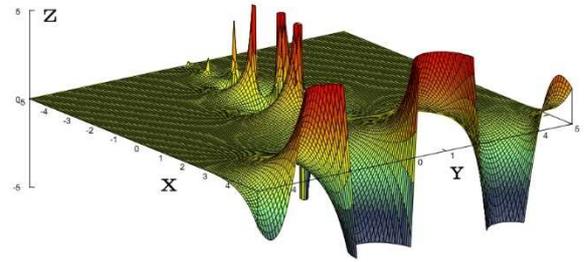


Fig. II-b – Grafico in  $\mathbb{R}^3$  di  $z = \Im(\Gamma(w))$ .

*a Emilio Montaldi, Luigi Gatteschi, Royce Zia, Steve O'Dell, Bob Gilmore,  
che hanno segnato il mio apprendimento dei METODI MATEMATICI DELLA FISICA  
... spero solo che qualcosa del loro grande mestiere ed esperienza emerga da queste pagine.*



**Luigi Gatteschi** (1923-2007)

Professore Ordinario di Calcoli Numerici e Grafici, UniTO, Torino

## INDICE

<b>INTRODUZIONE</b>		P. V
CAP. I	- LA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI LEGENDRE DELLA FUNZIONE <b>GAMMA</b>	P. 1
“ II	- LA FUNZIONE <b>BETA</b> DI EULER	P. 17
“ III	- IL NUMERO $\gamma$ DI EULER-MASCHERONI	P. 23
“ IV	- LE RAPPRESENTAZIONI DI EULER E DI WEIERSTRASS DELLA DELLA FUNZIONE <b>GAMMA</b>	P. 28
“ V	- LA FUNZIONE <b>DIGAMMA</b> E LE SUE DERIVATE	P. 38
“ VI	- LA FUNZIONE <b>GAMMA</b> IN REGIME ASINTOTICO	P. 57
“ VII	- APPLICAZIONI VARIE	P. 73
<b>APPENDICI</b>		
1	L'ALGORITMO DI APPROSSIMAZIONE DI LANCZOS	P. 93
2	UN ALGORITMO PER IL CALCOLO DEI VALORI ESTREMANTE STAZIONARI LOCALI DELLA FUNZIONE <b>GAMMA</b>	P. 98
3	COEFFICIENTI POLINOMIALI PER L'ESPANSIONE ASINTOTICA DELLA FUNZIONE <b>GAMMA</b>	P. 101
<b>BIBLIOGRAFIA</b>		P. 107

## INTRODUZIONE

È fuori dubbio che l'ambito di trattazione più elegante, sintetico e profondo della teoria della *Funzione  $\Gamma$*  è il sottoinsieme numerico complesso  $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \setminus \mathcal{Z}_0^-$  ( $\mathcal{Z}_0^\pm := \mathcal{Z}^\pm \cup \{0\}$ ), nel quale, oltre a essere monodroma, i.e., a-un-solvalore,  $\Gamma$  risulta *olomorfa* e, quindi, *analitica* per prolungamento. In altre parole,  $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\mathcal{C}})$ .

A tale proposito, esiste una lista estesa di lavori classici, a cominciare dai venerandi *Whittaker-Watson* [1] e *Tricomi* [2] ai sintetici e impegnativi *Lebedev* [3], *Gatteschi* [4] e *Carrier-Krook-Pearson* [8] al più specialistico *Olver* [5] ai più recenti *Temme* [6] e *Andrews-Askey-Roy* [7], per citare solo alcuni tra i più rispettati e noti (la graduatoria di merito non è facile). Né vanno dimenticati 'desktop data-bases' di provata affidabilità, quali il glorioso e ponderoso *Abramowitz-Stegun* [9], il suo supplemento, *Luke* [10], e il loro 'erede' naturale, l'*Olver-Lozier-Boisvert-Clark* [11].

Benché un uso 'professionale' di tali testi richieda capacità esecutive non sempre mutuabili dai soli insegnamenti istituzionali universitari di Analisi Matematica, la ricorrenza della *Funzione  $\Gamma$*  negli ambiti applicativi più svariati mi ha spinto, d'altra parte, a raccogliere idee e riordinare vecchi appunti sparsi per un'esposizione elementare della sua restrizione  $x \mapsto \Gamma(x) \equiv y$  al dominio  $\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}_0^-$ . Per questo math-notebook, ritengo che la formazione minima necessaria sia, almeno, quella fornita da testi consolidati come [22], [23] e simili.

Lascio ad altri il giudizio circa la mia riuscita. Nel controllo (talvolta perdente ...) sui 'sacri tomi', mi sono proposto, soprattutto, di evitare, da un lato, un'esposizione per soli ... intimi 'eletti', a scapito della praticabilità e della ... pazienza della lettrice\lettore volenterosi ma non 'addetti ai lavori', dall'altro, l'imposizione dell' $(n+1)$ -esima grandinata di formule 'dal buio' (qualcuna, tanto per finire in gloria, 'inquinata' da refusi fastidiosi e di puro intralcio ...). Il prezzo della rinuncia ai metodi potenti, sintetici e raffinati disponibili in  $\mathcal{C}$ , chiuso rispetto a qualsiasi operazione analitica (lecita), è costituito, inevitabilmente, dalla richiesta occasionale di calcoli un po' laboriosi ma con l'effetto (spero non-disprezzabile) di tenere 'allertata' la pratica manipolativa e/o di suggerire algoritmi programmabili possibili.

Dunque, l'obiettivo di questo mio *homework* resta circoscritto ben dentro i confini di un'illustrazione senza pretese della 'matriarca' delle *Funzioni Trascendenti Superiori* sia considerandola come uno **strumento** avanzato eccellente di rappresentazione sintetica sia prendendola a pretesto per incentivare il *fare consapevole* in chi si accosta a modelli fenomenologici, statistici o, più limitatamente, quantitativi.

I dettagli abbondano; per quelli omessi (pochi), si consulti la **Bibliografia**. La riproduzione soprattutto dei primi si rivelerà auto-istruttiva; l'indagarne le ramificazioni profonde emergenti costituirà, poi, un valore aggiunto formativo per la mente disponibile alla rielaborazione autonoma (*give yourself a chance* ...).

L'approccio seguito – a me, fisico, più congeniale – è *costruttivo* ma, mi auguro, *pulito* quanto basta sia a fornire una padronanza accettabile del  $\Gamma$ -strumento sia a lasciare intravederne un quadro teorico essenziale quanto coerente.

È difficile credere, con un argomento come questo, che sviste e/o errori non si nascondano tra le righe; in ogni caso, me ne assumo la responsabilità completa. Non potrò mai ringraziare abbastanza chi volesse segnalarmeli.

Ho disseminato un po' di volti e di date nel testo. Certo, è troppo poco per pretendere di aver fatto informazione storica seria ma voglio illudermi che già questo basti a lasciar trasparire come anche il Calcolo Matematico sia in grado di riflettere il pensiero prevalente negli ambienti storico-socio-culturali in cui è venuto sviluppandosi.

Le immagini e le foto provengono dal web-site del *MacTutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, St. Andrews, UK*, raggiungibile all'indirizzo

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/> .

Per quanto mi riguarda, la lettura gradevole dell'*Hairer-Wanner* [60], da stimolo imprevisto alla mia curiosità, si è trasformata subito in 'motore di ricerca' di molte delle fonti originarie citate, raramente accessibili con facilità anche solo in forma digitalizzata o, almeno, come trascrizioni *integre* (quando esistono ...).

C M

web: <https://www.cm-phymath.net>

mail: [cldmgn47@gmail.com](mailto:cldmgn47@gmail.com)



*Adrien-Marie Legendre (1752-1833)*

(ricostruzione digitale da schizzi e testimonianze dell'epoca)

## capitolo I

# La rappresentazione integrale di Legendre della Funzione GAMMA

La definizione di *fattoriale naturale* corrisponde alla generazione degli elementi della successione numerica  $\{n!\}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , caratterizzata dalle proprietà costitutive seguenti:

$$\begin{cases} 0! := 1 \\ (n+1)! := (n+1)n! \end{cases} \quad (1)$$

Ci si può porre il problema di estendere tale definizione all'insieme  $\mathbb{R}_0^+$ , costruendo una funzione  $\Phi: x \mapsto \Phi(x)$ ,  $\Phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ , il cui grafico *interpoli* i punti di coordinate  $(n; n!)$ , i.e., tale che,  $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+ (\Leftrightarrow \mathbb{N})$ , sia definita nell'intervallo *compatto*  $[n, n+1]$  e assuma il valore  $\Phi(n) = n!$ .

È evidente che esistono infiniti modi per costruire l'insieme *graf*  $\Phi \subset X^+ \times Y$ . Ad esempio, il più ovvio è quello di connettere le coppie  $\{(n; n!), (n+1; (n+1)!)\}$  di punti consecutivi mediante segmenti rettilinei. La linea aperta spezzata che si determina, illimitata superiormente, corrisponde certamente a una possibile *funzione interpolatrice*  $\Phi: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}$ .

D'altra parte, se si desidera che  $\Phi$  incorpori le stesse proprietà formali della successione  $\{n!\}$ , allora, sarà necessario richiedere,  $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ , che

$$\begin{cases} \Phi(0) := 1 \\ \Phi(x+1) := (x+1)\Phi(x) \end{cases} \quad (2)$$

È plausibile che l'identità  $n! \equiv \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  abbia suggerito ad Euler [12] di tentare l'ampliamento  $n \in \mathbb{Z}_0^+ \mapsto x \in \mathbb{R}_0^+$  interpolando la successione  $\{n!\}$  mediante la funzione integrale

$$x \mapsto \Phi(x) \equiv x! := \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt. \quad (3)$$

La rappresentazione integrale classica della *Funzione Gamma*,  $\Gamma$ , è di Legendre e risale, circa, al 1809. Chiamata inizialmente *Integrale Euleriano di 2° tipo* dallo stesso Legendre (v. [14], [15]), essa

cambia l'integrale (3) con la traslazione *parametrica*  $x \mapsto x - 1$  (superflua, secondo alcuni Autori di sensibilità ... estetica diversa (e.g., [61] o [62])), fissando la definizione,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,

$$x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (4)$$

Il cambiamento di *variabile (muta) di integrazione*  $t \mapsto -\ln u$  nell'Eq. (4) dà la rappresentazione alternativa di  $\Gamma$ , ben nota in Meccanica Statistica,

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln u)^{x-1} du. \quad (4.1)$$

La *Funzione  $\Gamma$*  appare qui e là nei problemi della Fisica Teorica, quali la normalizzazione delle funzioni d'onda quantistiche coulombiane e il calcolo di probabilità e di funzioni di partizione in Meccanica Statistica. In generale, comunque, la sua importanza risiede nella rappresentazione di altre funzioni, indicate, nella Matematica applicata, come *Speciali* (e.g., quelle *cilindriche*, i vari *polinomi ortogonali* e le loro funzioni *associate* rispettive, e quant'altre determinabili dalle più fondamentali *Funzioni Ipergeometriche*), onnipresenti nei modelli fenomenologici ondulatori e nelle questioni più varie di natura stocastica (e.g., le *co-Funzioni degli Errori*, *erf* e *erfc*).

Dunque,  $n! = \Phi(n) \equiv \Gamma(n + 1)$ ; in realtà, è solo una questione di scelte equivalenti per esprimere  $n!$ . Però, come è mostrato più avanti, la rappresentazione (4) di Legendre consente di collocare, completamente ed elegantemente, il ramo principale di  $\Gamma$  nel quadrante cartesiano  $X^+ \times Y^+$ , con l'asse  $Y$  come asintoto verticale. In ogni caso, l'altrimenti artificiosa *definizione*  $0! := 1$  mantiene una giustificazione formale, risultando, da un'integrazione elementare,

$$0! = \Phi(0) = \Gamma(0 + 1) \equiv \Gamma(1) = 1. \quad (5)$$

La verifica della convergenza *uniforme* (e.g., con il *Criterio di Weierstrass*) della rappresentazione integrale (4) è immediata, ricorrendo alla *scomposizione additiva di PRYM* [16] ( $x \in \mathbb{R}^+$ ),

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (6)$$

Qui, il primo integrale converge perché è  $0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$  e la funzione  $t \mapsto t^{x-1}$  è integrabile in senso generalizzato in  $\mathcal{U}_{\delta^+}(0)$  poiché è, al più, infinita di ordine  $1 - x \leq \mu < 1$  vs. l'infinito principale  $1/t$ . Anche il secondo integrale converge poiché la funzione integranda, in  $\mathcal{U}(+\infty)$ , è infinitesima di ordine maggiore di qualsiasi numero positivo.

È immediato concludere che  $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ , i.e., è analitica (in senso reale), avendosi,  $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$\frac{d^k}{dx^k} \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k} (t^{x-1} e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^k dt. \quad (7)$$

Le Eq.i (4) e (7) indicano che  $\Gamma$  è  $\mathcal{T}$ -espandibile ( $\mathcal{T} \therefore$  Taylor) in  $\mathbb{R}^+$ , dove  $\Gamma(x) \wedge \Gamma''(x) > 0$ . Pertanto, l'insieme *graf*( $\Gamma$ ) è contenuto completamente nel quadrante cartesiano  $X^+ \times Y^+$ , come è stato affermato sopra, ed è *convesso semplicemente* (o *in senso ordinario*).

Neppure tutto ciò vale a individuare una forma chiusa per  $\Gamma$  in termini di funzioni elementari. Comunque, un fatto interessante è che  $\Gamma$  (per  $x \in \mathbb{R}^+$ ) appartiene a una classe particolare di funzioni *positive e convesse*, quelle dette *log (aritmicamente)-convesse* ( $\therefore$  *smooth functions*).

Una funzione  $f: x \mapsto f(x) > 0$  in un intervallo  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  si dice *log-convessa* in  $\mathcal{I}$  se la funzione  $x \mapsto \ln f(x)$  è convessa in senso *ordinario* in  $\mathcal{I}$ . La condizione  $f(x) > 0$  è *necessaria* perché la definizione valga in  $\mathbb{R}$ .

Ricordando che, se  $f$  è derivabile *due* volte in  $\mathcal{I}$ , la condizione  $f''(x) \geq 0$  in  $\mathcal{I}$  è *necessaria e sufficiente* per la convessità di  $f$ , allora  $f$  è *log-convessa* in  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$  *sse*, in  $\mathcal{I}$ , risulta

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln f(x) \equiv \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} \geq 0, \tag{8}$$

ovvero,

$$f''(x) \geq \frac{(f'(x))^2}{f(x)} \geq 0. \tag{8.1}$$

Da ciò, segue che *la log-convessità implica la convessità in senso ordinario*. L'asserto inverso non vale necessariamente. Ad esempio, la funzione  $x \mapsto x^4$  è convessa per  $x \in (1, +\infty)$ ; tuttavia, la funzione associata in  $(1, +\infty)$ ,  $x \mapsto \ln(x^4) \equiv 4 \ln x$ , è concava, come si riconosce osservando che la sua funzione derivata 2<sup>a</sup>,  $f'': x \mapsto -4/x^2$ , assume valori *negativi* per  $x \in (1, +\infty)$ .

Con un'integrazioni *per parti*, l'Eq. (4) fornisce la 1<sup>a</sup> *Proprietà Fondamentale*, quella *Iterativa*

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \tag{9}$$

prolungamento a  $\mathcal{C}$  (al continuo) della *terza* condizione funzionale (2).

È interessante il fatto che  $\Gamma$  è l'*unica* funzione log-convessa tra tutte le funzioni che soddisfano le proprietà (5) e (9). Più precisamente, vale la condizione *necessaria e sufficiente* espressa dal

**Teorema** (di Mollerup-Bohr) [<sup>66</sup>]

$$\left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \\ f(1) = 1 \\ f(x+1) = x f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ f \text{ log-convessa in } \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} \iff \exists! f \equiv \Gamma \text{ in } \mathbb{R}^+. \blacktriangle$$

Pur tralasciando di dare una dimostrazione di questo teorema (e.g., v. [<sup>17</sup>] o WIKIPEDIA), vale la pena, almeno, di cercare una giustificazione intuitiva plausibile della log-convessità di  $\Gamma$ :

se  $f$  e  $g$  sono funzioni log-convesse, tale è, anche, il prodotto  $f(x)g(x)$ . Ciò segue dal fatto che  $\ln(f(x)g(x)) = \ln f(x) + \ln g(x)$  e che la somma di funzioni convesse semplicemente è convessa semplicemente. In particolare, se  $f$  è log-convessa, lo è anche  $cf, \forall c \in \mathbb{R}^+$ .

Invece, molto meno ovvio è che, se  $f$  e  $g$  sono funzioni log-convesse, anche la loro somma è log-convessa (non fosse altro perché  $\ln(f(x) + g(x)) \neq \ln f(x) + \ln g(x)$ ).

I due risultati precedenti implicano che una funzione combinazione-lineare  $x \mapsto \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)$  è log-convessa *se*  $c_k > 0 \wedge f_k$  è log-convessa,  $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ . Allora, la log-convessità di  $\Gamma$  segue dal *prolungamento a  $\mathcal{C}$*  di tale proprietà. Infatti,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ , la funzione  $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ , con  $x \in \mathbb{R}^+$ , è log-convessa in quanto prodotto della quantità  $c := e^{-t} > 0$ , *indipendente* da  $x$ , per la funzione *esponenziale* – log-convessa! –  $x \mapsto \tau(x) := t^{x-1}$  poiché risulta, appunto,  $d^2\tau(x)/dx^2 \equiv 0$ , con  $\tau(x) \in \mathbb{R}^+ \forall x$  (cf/c la Dsq. (8.1)).

Dalla *continuità* dell'operatore *Integrale*, la funzione  $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \equiv \Gamma(x)$  corrisponde a una *combinazione lineare continua* vs.  $t$  di funzioni log-convesse  $x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ , ciascuna vista come il prodotto di un coefficiente parametrico  $c(t) \equiv e^{-t} > 0$  per la funzione esponenziale  $x \mapsto t^{x-1}$  associata (vs.  $t$ ). Da qui, discende la log-convessità globale di  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^+$ .

Si dimostra (v., e.g., [2]) che  $\Gamma$  appartiene a una classe alquanto specializzata di funzioni che *non* risultano soluzioni particolari di alcuna equazione differenziale *ipergeometrica*, né *gaussiana* né *confluente* (v. [1], [2], [3], [4], [6]), la classe delle funzioni *trascendenti superiori*. □

Ritornando alla rappresentazione di Legendre (4), con il cambiamento di variabile  $t := u^{1/x}$ , si ha

$$\Gamma(x) \equiv \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^{1/x}} du > \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-u^{1/x}} du > \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-1} du = \frac{1}{ex} .$$

Tale maggiorazione indica che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ , i.e., che l'asse  $Y$  è un asintoto verticale per l'insieme *graf*( $\Gamma$ ), prevedibilmente. Inoltre, poiché  $\Gamma''(x) > 0$  in  $\mathbb{R}$ , allora,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ .

Quanto precede implica l'esistenza di un *unico* punto stazionario,  $x_0$ , di *minimo* locale per  $\Gamma$ . Esso è situato nell'intervallo  $(1, 2)$  perché, dalle Eq.i (4) e (9), risulta che  $\Gamma(1) \equiv \Gamma(2) = 1$ . Legendre e Gauss, quasi contemporaneamente [15], [18], localizzarono per primi  $x_0$ , correttamente alla 4<sup>a</sup> cifra decimale! Il CAS *Maxima*<sup>fr-sfwr</sup> [68] dà, con un errore  $< 10^{-12}$ ,

$$(x_0; \Gamma(x_0)) \approx (1.4616321449684; 0.8856031944109).$$

Per sinteticità, conviene introdurre il *Simbolo* (o *Polinomio* o *Funzione*) di POCHHAMMER [19], di argomento  $x \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$  e di grado (od ordine)  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ :

$$x \mapsto (x)_n := \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 0, \\ x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1), & \text{ se } n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (10)$$

È immediato osservare che  $(x)_1 \equiv x$  e che  $(1)_n \equiv n!$  (v. anche l'Eq. (206)).

Integrando  $n$  volte *per parti* nell'Eq. (4), con  $x > n$ , si determina la generalizzazione della *I<sup>a</sup> Proprietà Fondamentale*, l'Eq. (9):

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-n) \int_0^{+\infty} t^{x-n-1} e^{-t} dt$$

e, quindi, eseguendo la traslazione  $x \mapsto x+n$ , risulta

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1) \Gamma(x) \\ &\equiv (x)_n \Gamma(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Se  $x \equiv 1$ , l'Eq. (11) dà

$$\Gamma(n+1) = (1)_n \Gamma(1) = n! \quad (11.1)$$

mentre, se  $x \equiv n$ , l'Eq. (9) fornisce la rappresentazione *alternativa* più nota di  $n!$ :

$$n! \equiv \Gamma(n+1) \equiv n \Gamma(n). \quad (12)$$

L'Eq. (11) mostra che, nel caso in cui  $n \equiv \lfloor x \rfloor$ , il valore della funzione *parte intera* di  $x \in \mathbb{R}^+$  [17], il calcolo di  $\Gamma(x)$  è ricondotto, in ogni caso, all'intervallo  $(0, 1)$ , i.e., al calcolo di  $\Gamma(f(x))$ , indicando, con  $f(x) := x - \lfloor x \rfloor$ , il valore della funzione *parte frazionaria* (o *decimale*) di  $x$ .

In particolare, si assegni la quaterna  $\{p, q, j, k_{(j)}\} \subset \mathbb{Z}^+$ , con  $p, q$  primi tra loro  $\wedge p < q < j \wedge k_{(j)} := \lfloor (j-1)/q \rfloor$ . Poi, introdotto il simbolo comodo

$$j!_q := j(j-q)(j-2q)(j-3q) \dots (j-(k_{(j)}-1)q)(j-k_{(j)}q), \quad (13)$$

detto il *sotto-fattoriale q-esimo* di  $j$ , i.e., tale che  $q (> 0)$  è la differenza assoluta, o *passo*, tra due fattori consecutivi qualsiasi, si consideri il numero razionale  $p/q \in (0, 1)$  tale che  $x = n + p/q$ , con  $n \in \mathbb{Z}^+$ ; chiaramente, è  $n \equiv \lfloor x \rfloor$ .

Pertanto, mediante l'Eq. (11), si scrivono, in sequenza, le identità

$$\begin{aligned} \Gamma(n + p/q) &\equiv (p/q)_n \Gamma(p/q) \\ &\equiv (p/q)(p/q+1)(p/q+2) \dots (p/q+n-2)(p/q+n-1) \Gamma(p/q) \\ &\equiv \frac{p(p+q)(p+2q) \dots (p+(n-2)q)(p+(n-1)q)}{q^n} \Gamma(p/q) \\ &\equiv (q(n-1)+p)((q(n-1)+p)-q)((q(n-1)+p)-2q) \dots \downarrow \\ &\quad \downarrow \dots \cdot \overbrace{((q(n-1)+p)-(n-2)q)}^{\equiv p+q} \overbrace{((q(n-1)+p)-(n-1)q)}^{\equiv p}} \frac{\Gamma(p/q)}{q^n}, \end{aligned}$$

arrivando alla *formula generale di riduzione all'intervallo*  $(0, 1)$ , potendo sempre separare ogni numero razionale  $\rho \geq 1$  nella somma  $\rho = n + p/q (\equiv \lfloor \rho \rfloor + f(\rho))$ :

$$\Gamma(n + p/q) = \frac{(q(n-1)+p)!_q}{q^n} \Gamma(p/q). \quad (14)$$

La rappresentazione sintetica (14) viene dall'Eq. (13), specificata per gli interi  $j \equiv q(n-1) + p$  e  $k_{q(n-1)+p} \equiv \lfloor (q(n-1) + p - 1)/q \rfloor = \lfloor n - 1 + (p-1)/q \rfloor = n - 1$  (cf/c [9], P. 267, Table 6.1).

### Applicazione

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1/2) &= \frac{(2(n-1)+1)!_2}{2^n} \Gamma(1/2) \equiv \frac{(2n-1)!!}{2^n} \pi^{1/2} \quad (\text{v. Eq.i (24.1) e (156)}) \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3) \dots \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n} \pi^{1/2}; \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1/3) &= \frac{(3(n-1)+1)!_3}{3^n} \Gamma(1/3) \equiv \frac{(3n-2)!_3}{3^n} \Gamma(1/3) \\ &= \frac{(3n-2)(3n-5) \dots \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1}{3^n} \Gamma(1/3); \end{aligned} \quad (14.2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 2/3) &= \frac{(3(n-1)+2)!_3}{3^n} \Gamma(2/3) \equiv \frac{(3n-1)!_3}{3^n} \Gamma(2/3) \\ &= \frac{(3n-1)(3n-4) \dots \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2}{3^n} \Gamma(2/3); \end{aligned} \quad (14.3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1/4) &= \frac{(4(n - 1) + 1)!_4}{4^n} \Gamma(1/4) \equiv \frac{(4n - 3)!_4}{4^n} \Gamma(1/4) \\ &= \frac{(4n - 3)(4n - 7) \cdot \dots \cdot 13 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1}{4^n} \Gamma(1/4); \end{aligned} \tag{14.4}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 3/4) &= \frac{(4(n - 1) + 3)!_4}{4^n} \Gamma(3/4) \equiv \frac{(4n - 1)!_4}{4^n} \Gamma(3/4) \\ &= \frac{(4n - 1)(4n - 5) \cdot \dots \cdot 15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3}{4^n} \Gamma(3/4); \end{aligned} \tag{14.5}$$

etc. .

□

Tipicamente, la non-facile valutazione numerica accurata di  $\Gamma(x)$ , per  $x \in (0, 1)$ , è ricondotta a quadrature ad-hoc, costruite mediante polinomi *ortogonali*, e.g., di ČEBYŠEV o di LAGUERRE. Ad esempio, l'aggiustamento *ottimale* (*best-fit*) all'andamento quasi-iperbolico definitivo di  $\Gamma(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ , ottenuto da C. HASTINGS, Jr. [20], si scrive

$$\Gamma(x) \approx \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^7 b_k x^k, \tag{15}$$

dove, i coefficienti ottimizzati  $b_k$  sono

$b_0 = -0.57719\ 1652$	$b_1 = 0.98820\ 5891$	$b_2 = -0.89705\ 6937$	$b_3 = 0.91820\ 6857$
$b_4 = -0.75670\ 4078$	$b_5 = 0.48219\ 9394$	$b_6 = -0.19352\ 7818$	$b_7 = 0.03586\ 8343$

L'approssimazione (15) è un adattamento della Formula 6.1.36 in [9], P. 257, eseguito mediante la relazione iterativa (9) precedente. Si veda anche [10], P. 3, Table 1.2, pure costruita da *Polinomi di Čebyšev* di 1° tipo ma di argomento *modificato* ( $\therefore$  *shifted*),  $x \mapsto 2x - 1$ , con  $x \in [0, 1]$ .

Ad ogni modo, l'orto-normalità in  $[-1, 1]$  dei *Polinomi di Čebyšev* di 1° tipo ha l'effetto di *minimizzare* le variazioni locali dell'errore  $\varepsilon(x)$ . Specificamente,  $\varepsilon(x)$ , *crescente* per  $x = o(1)$ , resta stabilizzato dalla maggiorazione  $x|\varepsilon(x)| < 3 \cdot 10^{-7}$ .

Per approfondimenti sull'approccio numerico a tale questione, si ritorni a [9], CAP. 22, o (forse, meglio) si consulti [6], P. 115.

L'*algoritmo di Hastings* (15) ha dato origine a numerose sue varianti e/o alternative per il calcolo di  $\Gamma(x)$  nell'intervallo critico  $(0, 1)$ . Al presente (2020), non sembra noto alcun algoritmo altrettanto preciso, semplice e *generale* come quello deducibile dalla cosiddetta *approssimazione di Lanczos* [21], valida  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ! I dettagli operativi sono presentati nell'Appendice 1.

□

La 2<sup>a</sup> *Proprietà Fondamentale* della *Funzione  $\Gamma$* , detta di *Riflessione* (o di *Complementazione*), si caratterizza per la simmetria nello scambio tra argomenti in  $(0, 1)$ . La sua dimostrazione in  $\mathbb{C}$  si ottiene con un'integrazione *di bordo* (*contour*), per  $z \rightarrow \infty$ , alquanto semplice (v. [54], P. 185 e P. 281). La restrizione a  $\mathbb{R}^+$  riflette, allora, le condizioni simultanee  $\Im m z \equiv 0 \wedge \Re e z \in \mathbb{R}^+$ .

Mantenendo i limiti assunti per questo math-notebook, è fornita, qui di seguito, una dimostrazione, condotta completamente in  $\mathbb{R}^+$ , della *Proprietà di Riflessione*, che sfrutta un risultato elementare di  $\mathcal{F}$ -espansione in serie ( $\mathcal{F} \therefore$  Fourier):

**Proposizione**

Sia  $x \in (0, 1)$ . Allora (*Proprietà di Riflessione della Funzione  $\Gamma$* ),

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \equiv \pi \operatorname{csc}(\pi x). \blacktriangle \tag{16}$$

Dimostrazione – Dalla rappresentazione integrale di Legendre, si scrive,  $\forall x \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \left( \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-s} ds \right) \left( \int_0^{+\infty} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt \right) \\ &\equiv \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} s^{x-1} t^{-x} e^{-(s+t)} ds dt \equiv \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} g(s, t) ds dt. \end{aligned} \tag{17}$$

La rappresentazione integrale doppia (17) è convergente poiché la sua separabilità vs. le variabili  $s$  e  $t$  è ottenibile da forme parziali *convergenti uniformemente*, quelle del  $\Gamma$ -integrale di Legendre. □

In generale, le tre condizioni seguenti:

- a. il dominio (di integrazione)  $\Omega \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$  è  $PJ$ -misurabile (i.e., di misura  $\mu_{PJ}$ , à-la Peano-Jordan);
- b.  $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ;
- c.  $\exists \{\Omega_j\}$ , con  $j \in \mathbb{Z}^+$ , una successione di sotto-dominî *nidificati* di  $\Omega$  che costituiscono una *copertura* di  $\Omega$  (e.g., l'insieme dei *quadrati*  $\{\Omega_{x,y;j}\} \equiv \{(x; y) \in [0, j] \times [0, j]\}$  o l'insieme dei *quarti di cerchio*  $\{\Omega_{\varphi,\rho;j}\} \equiv \{(\varphi; \rho) \in [0, \pi/2] \times [0, j]\}$ ), i.e., tale che,  $\forall j$ ,
  - $\Omega_j$  è limitata,  $PJ$ -misurabile e  $\mu_{PJ}(\Omega_j) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \mu_{PJ}(\Omega)$ ,
  - $\Omega_j \subset \Omega_{j+1} \wedge \Omega_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \Omega \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$ ,
  - $|g(s, t)| \in \mathcal{R}(\Omega_j)$  (i.e.,  $|g|$  è Riemann-integrabile in  $\Omega_j$ ),
  - $\lim_{j \rightarrow +\infty} \iint_{\Omega_j} |g(s, t)| ds dt < +\infty$ ,

sono *sufficienti* a garantire che, se  $\Omega \equiv (\mathbb{R}^+)^2$ , allora,  $\exists! \lim_{j \rightarrow +\infty} \iint_{\Omega_j} g(s, t) ds dt = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} g(s, t) ds dt$ . □

Al cambiamento di variabili

$$\begin{cases} s := \frac{uv}{v+1} \equiv s(u, v) \\ t := \frac{u}{v+1} \equiv t(u, v) \end{cases}, \tag{18}$$

corrisponde il determinante jacobiano  $\partial(s, t)/\partial(u, v) \equiv s'_u t'_v - s'_v t'_u = u/(v+1)^2 > 0$  sul dominio trasformato di  $u, v$ -integrazione, come si può verificare prontamente controllando il segno di  $u$  attraverso la trasformazione inversa,

$$\begin{cases} u = s + t \equiv u(s, t) \\ v = s/t \equiv v(s, t) \end{cases}, \tag{18.1}$$

e ricordando che  $\{s, t\} \subset \mathbb{R}^+$ . Quindi, mediante le Eq.i (16) e (17), si scrive

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(1-x) &\equiv \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} dv \left(\frac{uv}{v+1}\right)^{x-1} \left(\frac{u}{v+1}\right)^{-x} e^{-u} \frac{u}{(v+1)^2} \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-u} du \int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{v+1} dv = \int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{v+1} dv.
 \end{aligned} \tag{19}$$

La rappresentazione integrale (19), per  $x \in (0, 1)$ , è *convergente*. La si può scomporre come

$$\int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{v+1} dv = \int_0^1 \frac{v^{x-1}}{1+v} dv + \int_1^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{1+v} dv \equiv \mathfrak{I}_1(x) + \mathfrak{I}_2(x). \tag{20}$$

Se si pone  $v := 1/w$  in  $\mathfrak{I}_2(x)$ , si ottiene il cambiamento  $\int_1^{+\infty} (dv) \equiv \int_1^0 (-dw/w^2) \equiv \int_0^1 (dw/w^2)$  dell'operatore di integrazione e, da questo, viene che

$$\mathfrak{I}_2(x) = \int_0^1 \frac{w^{-x}}{1+w} dw \equiv \int_0^1 \frac{v^{-x}}{1+v} dv, \tag{21}$$

avendo rinominato  $v$  la variabile (muta) di integrazione  $w$ . Pertanto, dalle Eq.i (20) e (21), si trova che vale la rappresentazione integrale

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) \equiv \int_0^1 \frac{v^{x-1} + v^{-x}}{1+v} dv. \tag{22}$$

Nella funzione integranda, il fattore  $1/(1+v)$  è la somma della Serie Geometrica di *ragione*  $-v$ , nell'intervallo  $[0, 1)$ , dove, risultando l'espressione integranda maggiorata dalla funzione *limitata e integrabile*  $x \mapsto v^{x-1} + v^{-x}$ , è ammissibile l'integrazione termine-a-termine

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^1 (v^{x-1} + v^{-x}) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n v^n \right) dv \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 (v^{n+x-1} + v^{n-x}) dv \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+1-x} \right) = \left( \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \\
 &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} \right) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Ora, si consideri l' $\mathcal{F}$ -espansione della restrizione della funzione  $2\pi$ -periodica *pari*  $u \mapsto \cos xu$  nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , con il parametro  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , la quale risulta esprimibile mediante soli termini-coseno. Poiché valgono le  $\mathcal{D}$ -condizioni generalizzate, i coefficienti necessari,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(xu) du = \frac{2 \sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{e, per } n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(xu)) \cos(nu) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(x-n)u + \cos(x+n)u) du \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin((x-n)\pi)}{x-n} + \frac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} \right) = -\frac{2x \sin(\pi x)}{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2},
 \end{aligned}$$

danno l'espansione

$$\cos(xu) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \left( \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2} \cos(nu) \right). \quad (24)$$

Se si assegnano  $u \equiv 0$  e  $x \in (0, 1)$  nell'Eq. (24) e, quindi, si moltiplicano i membri di questa per  $\pi/\sin(\pi x)$ , dal confronto con l'Eq. (23), si ha, transitivamente, la **Proposizione (16)**, q. e. d. .

### Applicazioni

1. Ponendo  $x = 1/2$  nell'Eq. (16), si ottiene  $(\Gamma(1/2))^2 = \pi$ , i.e., il valore notevole

$$\Gamma(1/2) = \pi^{1/2} \quad (25.1)$$

$$\equiv \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt. \quad (25.1.1)$$

La sostituzione ulteriore  $t := \alpha u^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , nell'Eq. (25.1.1) fornisce le uguaglianze

$$\Gamma(1/2) = 2\alpha^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du \equiv \pi^{1/2}$$

e, da queste, il cosiddetto *Integrale di GAUSS-POISSON*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2}. \quad (25.1.2)$$

2. La *Proprietà di Riflessione* della *Funzione  $\Gamma$*  conduce,  $\forall x \in (0, 1)$ , all'equivalenza delle rappresentazioni riepilogate qui di seguito:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi \csc \pi x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2} \cos(nu) \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2}, \quad (25.2.1)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{v+1} dv \equiv \int_0^{+\infty} \frac{v^{-x}}{v+1} dv \equiv \int_0^1 \frac{v^{x-1} + v^{-x}}{1+v} dv, \quad (25.2.2)$$

dalle Eq.i (20), (21) e (22).

3. Anche il calcolo dell'integrale generalizzato, parametrico in  $x$ , con  $|x| \in [0, \pi)$ ,

$$\mathcal{J}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xu}}{\cosh \pi u} du, \quad (25.3)$$

rimanda al risultato fondamentale espresso dall'Eq. (16). Infatti, definendo  $u := (\ln t)/(2\pi)$ , si arriva alla rappresentazione equivalente

$$\mathcal{J}(x) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt,$$

dove,  $\alpha := (\pi + x)/(2\pi) \wedge \alpha \in (0, 1)$ . Allora, direttamente dalle Eq.i (19) e (16), segue che

$$\mathcal{J}(x) = (1/\pi) \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \equiv \Gamma((\pi + x)/(2\pi)) \Gamma((\pi - x)/(2\pi))$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \equiv \frac{1}{\sin(x/2 + \pi/2)} = \sec(x/2), \quad (25.3.1)$$

dalla quale, con l'espansione  $x \mapsto 2\pi x$ , quando sia  $|x| \in [0, 1/2)$ , si determina la formula di argomento *simmetrico*

$$\Gamma(1/2 + x)\Gamma(1/2 - x) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)} \equiv \pi \sec(\pi x). \quad (26)$$

■

L'Eq. (4) costituisce una rappresentazione di  $\Gamma(x)$  solo per  $x \in \mathbb{R}^+$ . Comunque, essa può essere prolungata analiticamente (in senso reale) nell'insieme  $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$ . Infatti, riscritta l'Eq. (9) come

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad (27)$$

e tenendo conto che  $\Gamma(1) = 1$ , si ha, per  $x \in (0, 1)$ , che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x) := \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = -\infty.$$

Poi, se si esegue la traslazione  $x \mapsto x+n-1$  nell'Eq. (27), con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , dalla quale si ottiene  $\Gamma(x+n-1) = \Gamma(x+n)/(x+n-1)$ , risulta che

$$\lim_{x \rightarrow -n^\pm} \Gamma(x) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mp\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Quindi,  $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $x = -n$  è un polo di  $\Gamma$ , i.e., un asintoto verticale per l'insieme  $\text{graf}(\Gamma)$ , mentre, se  $x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^- \wedge n \in \mathbb{Z}^+$ , si determina il *prolungamento analitico* (in senso reale)

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(x+1)}{x}, & \text{per } x \in (-1, 0), \\ \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}, & \text{per } x \in (-2, -1), \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \equiv \frac{\Gamma(x+n)}{(x)_n}, & \text{per } x \in (-n, -n+1), \\ \vdots \\ \text{etc. .} \end{cases} \quad (28)$$

Il segno di  $\Gamma(x)$  relativo ai rami del suo prolungamento analitico (28) è deducibile facilmente osservando che, nell'intervallo  $(-n, -n+1)$ , risulta, con  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$\text{sgn} \Gamma(x) \equiv \frac{\Gamma(x)}{|\Gamma(x)|} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases},$$

Da questo, si osserva l'*alternanza (numerabile)* di *massimi* e di *minimi* stazionari locali in  $\mathbb{R}^-$ , come effetto del prolungamento massimale della *Funzione*  $\Gamma$ . I grafici delle Figure 1 e 0 sono significativi su tale proprietà.

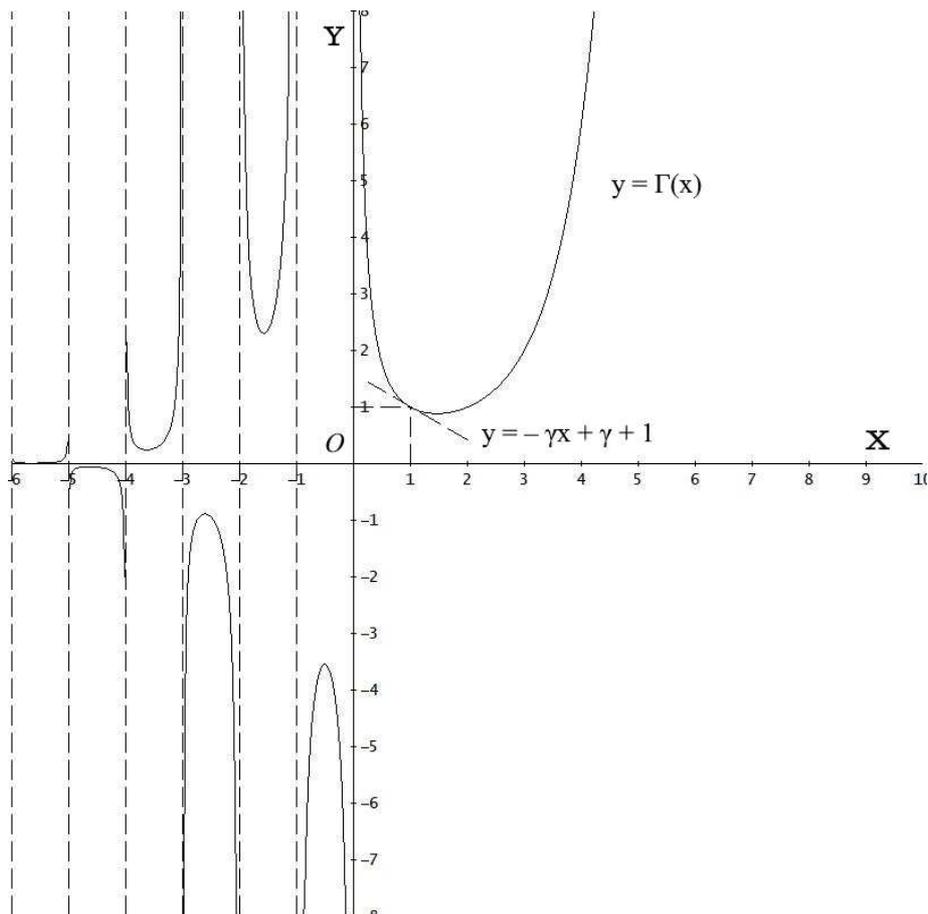


Fig. 1 – Grafico della Funzione Gamma in  $\mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto \Gamma(x) \equiv y$

valori approssimati delle coordinate degli estremi stazionari locali sono calcolabili combinando la derivata dell'Eq. (28) con l'*algoritmo di Lanczos*, v. **Appendice 1**, P. 93.

□

Alternativamente, l'*algoritmo di Hastings*, espresso dall'Eq. (15), può essere adattato allo scopo, tenendo conto che, per  $x \in (-n, -n + 1)$ , risulta  $(x + n) \in (0, 1)$  e, pertanto, che

$$\frac{\Gamma(x + n)}{(x)_n} \approx \frac{\frac{1}{x + n} + \sum_{k=0}^7 b_k (x + n)^k}{x(x + 1)(x + 2) \dots (x + n - 2)(x + n - 1)} \geq 0. \quad (28.1)$$

A questo punto, si procede senza difficoltà alla minimizzazione\massimizzazione numerica locale dell'espressione razionale *approssimante* (28.1), secondo che  $n$  sia pari\dispari.

□

Infine, chi scrive (CM) ha sviluppato un algoritmo elementare per la determinazione delle coordinate degli estremi, che utilizza la *Funzione Zeta di Riemann* come acceleratrice di convergenza. Sia le coordinate del minimo locale  $(x_0; \Gamma(x_0))$ , evidenziate alle PP. 5-6, che quelle dei primi 8 estremi situati nel semi-piano cartesiano sinistro sono state calcolate con tale algoritmo e riportate nella tabella sottostante (i dettagli dell'algoritmo sono presentati nell'**Appendice 2**):

indicato con  $x_n \in (-n, -n + 1)$  l' $n$ -simo valore estremante di  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^-$ , con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , così da determinare, in corrispondenza,  $y_n \equiv \Gamma(x_n)$ , si trovano, con 12 cifre decimali significative,

$(x_1; y_1) \approx (-0.504083008264; -3.54464361116)$	<i>Massimo</i> stazionario locale,
$(x_2; y_2) \approx (-1.57349847316; 2.30240725834)$	<i>minimo</i> stazionario locale,
$(x_3; y_3) \approx (-2.61072086844; -0.888136358400)$	<i>Massimo</i> stazionario locale,
$(x_4; y_4) \approx (-3.63529336643; 0.245127539834)$	<i>minimo</i> stazionario locale,
$(x_5; y_5) \approx (-4.65323776174; -0.0527796395872)$	<i>Massimo</i> stazionario locale,
$(x_6; y_6) \approx (-5.66716244155; 0.00932459448261)$	<i>minimo</i> stazionario locale,
$(x_7; y_7) \approx (-6.67841821307; -0.00139739660894)$	<i>Massimo</i> stazionario locale,
$(x_8; y_8) \approx (-7.68778832503; 0.000181878444909)$	<i>minimo</i> stazionario locale.

HERMITE (CHARLES, 1822-1901) osservò (1881) [24] che, per  $n \gg 1$ , vale l'andamento asintotico

$$x_n \sim -n + (\ln n)^{-1} + o((\ln n)^{-2}) \quad (29)$$

circa la posizione delle ascisse *estremanti* dei rami del prolungamento in  $\mathbb{R}^-$  mentre il valore-limite della successione numerica delle ordinate  $\{\Gamma(x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ , a termini di segno *alterno*, è 0.

Geometricamente, ciò corrisponde al fatto che gli estremi stazionari dei rami del prolungamento di  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^-$  si avvicinano al semi-asse  $X^-$ , per  $x \rightarrow -\infty$ , *bilateralmente* e con segno *alterno*.

Un'immediata conseguenza della prolungabilità di  $\Gamma$  è l'estensione di validità delle Eq.i (16), (25.3.1) e (26). Infatti, intersecando il dominio naturale  $\mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  della funzione  $x \mapsto \pi \csc(\pi x)$  con il dominio massimale  $\mathcal{D}_\Gamma := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$  di  $x \mapsto \Gamma(x)$ , risulta subito evidente che la *Proprietà di Riflessione di  $\Gamma$*  è valida  $\forall x \in \mathcal{D}_\Gamma$ .

Si osservi, però, che le rappresentazioni integrali (25.2.2) sussistono *solo* per  $x \in (0, 1)$ . □

La traslazione  $x \mapsto x - n$ , con  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ , nel *dominio massimale*  $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  dell'Eq. (16), determina la *Proprietà di Riflessione generalizzata*

$$\begin{aligned} \Gamma(x - n) \Gamma(1 + n - x) &= \frac{\pi}{\sin(\pi(x - n))} \equiv \frac{(-1)^n \pi}{\sin(\pi x)} \\ &\equiv (-1)^n \Gamma(x) \Gamma(1 - x). \end{aligned} \quad (30.2)$$

Inoltre, eliminando  $\Gamma(x - n)$  tra le Eq.i (30.1) e (11) e, quindi, traslando  $n \mapsto n - 1$ , si trova che

$$\Gamma(x) \Gamma(n - x) = \frac{(-1)^{n-1} \pi (x - n + 1)_{n-1}}{\sin(\pi x)}, \quad (30.3)$$

da cui, la traslazione ulteriore  $x \mapsto x + n$  porta all'identità (v., anche, Eq. (A.9), p. 97)

$$\Gamma(x + n) \Gamma(-x) = -\frac{\pi (x)_n}{x \sin(\pi x)}. \quad (30.4)$$

□

Come conclusione, può risultare conveniente ricordarsi di un'espressione compatta del *Simbolo di Pochhammer* in termini di *Funzioni  $\Gamma$* , e.g., nel corso di valutazioni della funzione stessa o di

semplificazioni di calcolo. L'identità (11) equivale al rapporto

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}, \quad (30.5)$$

con il quale, i risultati  $(x)_0 = 1$ ,  $(x)_1 \equiv x$  e  $(1)_n = n!$  sono verificati prontamente.

Altre identità, più articolate, sono ricavate nel CAP. 7, **Esempio 4**, P. 86. In tutte, la generalità, l'auto-consistenza e l'eleganza della rappresentazione integrale (4) di Legendre trovano – secondo chi scrive – conferme ripetute ed esplicite. ■

**Applicazione**      **Il Simbolo di Hankel**

Sia assegnato  $\nu \in \mathbb{R}$ , tale che  $\nu - 1/2 \notin \mathbb{Z}$ . Inoltre, sia  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Per ridurre il rapporto

$$g_{\nu,k} := \frac{\Gamma(1/2 + \nu + k)}{\Gamma(1/2 + \nu - k)} \equiv \frac{\Gamma((1/2 + \nu) + k)}{\Gamma((1/2 + \nu) - k)} \quad (31)$$

a forma algebrica, conviene riprendere l'Eq. (26),

$$\Gamma(1/2 + x) \Gamma(1/2 - x) = \pi / \cos(\pi x) \quad (31)$$

dal cui *prolungamento massimale* in  $\mathbb{R}$ , si può scrivere, dopo il cambiamento  $x \mapsto k - \nu$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2 + (k - \nu)) \Gamma(1/2 - (k - \nu)) &= \frac{\pi}{\cos(\pi(k - \nu))} \equiv \frac{\pi}{\cos(k\pi) \cos(\nu\pi) + \sin(k\pi) \sin(\nu\pi)} \\ &= \frac{(-1)^k \pi}{\cos(\nu\pi)}, \end{aligned}$$

o, in modo equivalente,

$$\Gamma(1/2 - (k - \nu)) = \frac{(-1)^k \pi}{(\cos(\nu\pi)) \Gamma((1/2 - \nu) + k)}. \quad (31.1)$$

Sostituendo l'espressione (31.1) nel denominatore dell'Eq. (31), si riscrive,

$$g_{\nu,k} = \frac{(-1)^k \cos(\nu\pi)}{\pi} \Gamma((1/2 + \nu) + k) \Gamma((1/2 - \nu) + k). \quad (31.2)$$

Il prodotto tra le funzioni  $\Gamma$  nell'Eq. (31.2) può essere ridotto mediante la *Proprietà Iterativa* (9). Procedendo separatamente, per comodità, con ciascun  $\Gamma$ -fattore, si ha,

definito  $\lambda := 1/2 + \nu$ ,

- $\Gamma((1/2 + \nu) + k) \equiv \Gamma(\lambda + k)$   
 $= (\lambda + k - 1)(\lambda + k - 2) \dots (\lambda + 2)(\lambda + 1) \lambda \Gamma(\lambda)$   
 $= (k - 1/2 + \nu)(k - 3/2 + \nu) \dots (3/2 + \nu)(1/2 + \nu) \Gamma(1/2 + \nu); \quad (31.3)$

analogamente, dopo aver definito  $\mu := 1/2 - \nu$ ,

- $\Gamma((1/2 - \nu) + k) \equiv \Gamma(\mu + k)$   
 $= (\mu + k - 1)(\mu + k - 2) \dots (\mu + 2)(\mu + 1) \mu \Gamma(\mu)$   
 $= (k - 1/2 - \nu)(k - 3/2 - \nu) \dots (3/2 - \nu)(1/2 - \nu) \Gamma(1/2 - \nu). \quad (31.4)$

Sostituendo i prodotti (31.3) e (31.4) nell'Eq. (31.2), questa diventa

$$\begin{aligned}
 g_{\nu,k} &= (-1)^k \frac{\cancel{\cos(\nu\pi)}}{\pi} \underbrace{((k-1/2)^2 - \nu^2)((k-3/2)^2 - \nu^2) \dots ((3/2)^2 - \nu^2)((1/2)^2 - \nu^2)}_{k \text{ fattori}} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{\cos(\nu\pi)}} \\
 &= \frac{1}{2^{2k}} (4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9) \dots (4\nu^2 - (2k-3)^2)(4\nu^2 - (2k-1)^2) \\
 &\equiv \frac{1}{2^{2k}} \prod_{m=1}^k (4\nu^2 - (2m-1)^2). \tag{31.5}
 \end{aligned}$$

Si osservi che, per  $\nu = \pm(s-1/2)$ , con  $s \in \mathbb{Z}^+$ , il prodotto (31.5) è *nullo*. Questo rende ragione della condizione iniziale  $\nu - 1/2 \notin \mathbb{Z}$ , mediante la quale, sono evitate le divergenze dei  $\Gamma$ -termini nell'Eq. (31) quando  $(1/2 + \nu \pm k) \in \mathbb{R}_0^-$ .

Mediante l'Eq. (31.5), viene definita la notazione sintetica  $h_{\nu,k}$ , detta *Simbolo di HANKEL* (v. [4], [6]), utilizzata nella rappresentazione dei coefficienti di certe serie asintotiche relative alle *Funzioni di BESSEL* (e.g., per una discussione più dettagliata, v. il math-notebook: *Rappresentazioni in serie di potenze delle Funzioni di Bessel in  $\mathbb{R}$* , pp. 25-30):

$$h_{\nu,k} := \frac{g_{\nu,k}}{k!} = \frac{\Gamma(1/2 + \nu + k)}{k! \Gamma(1/2 + \nu - k)}. \tag{32}$$

La definizione (32) è estendibile anche a  $k = 0$ , avendosi, per sostituzione diretta,  $h_{\nu,0} = 1$ .

Quindi, in forma algebrica, si scrive

$$h_{\nu,k} = \begin{cases} 1, & \text{per } k = 0, \\ \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9) \dots (4\nu^2 - (2k-1)^2)}{2^{2k} k!} \equiv \frac{\prod_{m=1}^k (4\nu^2 - (2m-1)^2)}{2^{2k} k!}, & \forall k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \tag{32.1}$$

Per il *Simbolo di Hankel*, vale,  $\forall k \in \mathbb{Z}_0^+$ , la formula iterativa evidente

$$h_{\nu,k+1} = \frac{4\nu^2 - (2k+1)^2}{4(k+1)} h_{\nu,k}. \tag{32.2}$$

■

**Esercizio 1** Sia  $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \wedge k \in \mathbb{Z}_0^+$ . Si verifichino le identità

$$1.1 \quad \Gamma(\nu + k + 1) \equiv (\nu + 1)_k \Gamma(\nu + 1) \equiv (\nu)_{k+1} \Gamma(\nu);$$

$$1.2 \quad \Gamma(k + 1 + \nu) \Gamma(k + 1 - \nu) \equiv (\nu)_{k+1} (1 - \nu)_k \frac{\pi}{\sin(\nu\pi)}.$$

**Esercizio 2** Si deduca, dall'Eq. (4.1), la rappresentazione alternativa

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt.$$

**Esercizio 3** Dalla scomposizione di Prym, Eq. (6), si determini la rappresentazione di MITTAG-LEFFLER (v. [25]) (ristretta a  $\mathbb{R}$ ), valida  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ ,

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

**Esercizio 4** Si verifichi che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4} dt = -\frac{2^{1/2} \pi^2}{16}.$$

**Esercizio 5** Per  $u = \pi$  e sostituendo  $x \mapsto \xi$ , l'Eq. (24) genera l'uguaglianza

$$\pi \cot \pi \xi - \frac{1}{\xi} = 2\xi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\xi^2 - n^2}.$$

Dopo aver integrato i membri di questa vs.  $\xi$  tra 0 e  $x$ , si dimostri, per  $n \rightarrow +\infty$ , che

$$5.1 \quad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2} \right).$$

Quindi, in sequenza, si verifichino le rappresentazioni produttorie

$$5.2 \quad \sinh x \equiv -i \sin(ix) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{x^2}{(n\pi)^2} \right);$$

$$5.3 \quad \cos x \equiv \frac{\sin(2x)}{2 \sin x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right);$$

$$5.4 \quad \cosh x \equiv \cos(ix) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right).$$

**Esercizio 6** Data la terna ordinata di numeri  $\{c, b, \mu\} \in \mathbb{R}^+ \times (1, +\infty) \times \mathbb{R}^+$ , si mostri che

$$\int_0^{+\infty} b^{-ct^\mu} dt = \frac{\Gamma(1/\mu)}{\mu (c \ln b)^{1/\mu}}.$$

**Esercizio 7** Assegnata la terna ordinata  $\{\alpha, p, q\} \in (1, +\infty) \times (\mathbb{R}^+)^2$ , si verifichi che

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{p + qt^\alpha} dt = \frac{\pi \csc(\pi/\alpha)}{\alpha p^{1-1/\alpha} q^{1/\alpha}}.$$

**Esercizio 8** Assegnata la terna ordinata  $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}^+ \times \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{R}^+$ , tale che sia  $\Delta \equiv b^2 - 4ac < 0$ , si verifichi che

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(au^2 + buv + cv^2)} du dv = \frac{2\pi}{(-\Delta)^{1/2}}.$$

**Esercizio 9** Quando  $x \in (0, 1)$ , si verifichino le espressioni integrali seguenti:

$$\begin{aligned} 9.1 \quad \int_0^{+\infty} \cos(t^x) dt &= \frac{\Gamma(1/x)}{x} \cos \frac{\pi}{2x}; & 9.2 \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^x) dt &= \frac{\Gamma(1/x)}{x} \sin \frac{\pi}{2x}; \\ 9.3 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t + \pi/4)}{t^x} dt &= \frac{\pi \sin(\pi x/2 + \pi/4)}{\Gamma(x) \sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

**Esercizio 10** Sia  $x \in (0, 1)$ . Si verifichi che

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} \ln t}{1+t} dt = -\pi^2 \cot(\pi x) \csc(\pi x).$$

**Esercizio 11** Sia  $x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^- \wedge n \in \mathbb{Z}_0^+$ . Con  $n$  integrazioni *per parti*, si verifichi la  $\Gamma$ -forma integrale di CAUCHY-SAALSCHÜTZ (v. [26] o [27]), valida  $\forall x \in (-n-1, -n)$ ,

$$\Gamma(x) \equiv \frac{\Gamma(x+n)}{(x)_n} = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \left( e^{-t} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \right) dt.$$

**Esercizio 12** Per  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ , si verifichi l'uguaglianza seguente:

$$\Gamma(-n + 1/2) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \pi^{1/2}.$$

**Esercizio 13** Sia  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ . Si dimostri che, per  $x \rightarrow -n$ , vale l'andamento asintotico

$$\Gamma(x) \sim \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

Nota: Il polo di  $\Gamma$  in  $z \equiv x = -n$  è, evidentemente, *semplice*. Il fattore  $(-1)^n/n!$  di proporzionalità asintotica costituisce il *residuo analitico* di  $z \mapsto \Gamma(z)$  in tale polo.

■■■



Leonhard Euler (1707-1783)

## capitolo II

## La Funzione BETA di Euler

Si esegua la trasformazione di scala  $w \equiv w(v) := (1+u)v$ , parametrica in  $u \in \mathbb{R}^+$ , sull'identità

$$\Gamma(x+y) \equiv \int_0^{+\infty} w^{x+y-1} e^{-w} dw,$$

nella quale, sia  $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^+$ .

Essendo  $u$  indipendente da  $v$  (e, quindi, da  $w$ ), risulta  $dw = (1+u)dv$  e

$$\Gamma(x+y) \equiv (1+u)^{x+y} \int_0^{+\infty} v^{x+y-1} e^{-(1+u)v} dv. \quad (33)$$

Dopo aver moltiplicato i membri dell'Eq. (33) per il differenziale  $u^{x-1}(1+u)^{-x-y}du$ , si integri rispetto a  $u$  da 0 a  $+\infty$ , costruendo l'integrale doppio generalizzato *convergente* (v. P. 7, a., b. e c.)

$$\begin{aligned} \Gamma(x+y) \int_0^{+\infty} u^{x-1}(1+u)^{-x-y} du &\equiv \int_0^{+\infty} u^{x-1}(1+u)^{-x-y} du (1+u)^{x+y} \int_0^{+\infty} v^{x+y-1} e^{-(1+u)v} dv \\ &= \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-uv} du \int_0^{+\infty} v^{x+y-1} e^{-v} dv. \end{aligned}$$

In esso, si definisca  $u := t/v$  (chiaramente,  $t$  non dipende da  $v$ ), dando luogo alla trasformazione

$\int_0^{+\infty} (du) \mapsto \int_0^{+\infty} (dt/v)$  del primo operatore integrale a destra. Quindi, si prosegue scrivendo

$$\begin{aligned} \Gamma(x+y) \int_0^{+\infty} u^{x-1}(1+u)^{-x-y} du &= \int_0^{+\infty} (t/v)^{x-1} e^{-t} (dt/v) \int_0^{+\infty} v^{x+y-1} e^{-v} dv \\ &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt \equiv \Gamma(x)\Gamma(y), \end{aligned}$$

essendo, qui, *ininfluente* lo scambio dell'ordine di integrazione.

Ora, con Binet [40], si definisce *Funzione Beta* di Euler [29],  $B$ , la funzione integrale, indicata inizialmente da Legendre (v. [17], P. 221) come l'*Integrale Euleriano di 1° tipo*,

$$(x; y) \mapsto B(x, y) := \int_0^{+\infty} u^{x-1} (1+u)^{-x-y} du \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (34)$$

Si noti la simmetria della *Funzione B* vs. il suo argomento (v. Fig. 2, P. 22).

La definizione  $u := s/(1-s)$ , corrispondente alla trasformazione  $\int_0^{+\infty} (du) \mapsto \int_0^1 (ds/(1-s)^2)$  dell'operatore integrale, fa sì che la rappresentazione integrale (34) assuma la forma alternativa (à la Čebyšëv), di importanza notevole,

$$B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds. \quad (34.1)$$

Quindi, posto  $u := (\cot \theta)^2$ , che genera la trasformazione  $\int_0^{+\infty} (du) \mapsto \int_{\pi/2}^0 (-2 \cos \theta d\theta / (\sin \theta)^3)$  dell'operatore integrale nell'Eq. (34), si determina la rappresentazione goniometrica

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta. \quad (34.2)$$

A questa, con le traslazioni  $x \mapsto x + 1/2 \wedge y \mapsto y + 1/2$ , si affianca un'utile forma alternativa:

$$B(x + 1/2, y + 1/2) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x} (\sin \theta)^{2y} d\theta \equiv \frac{\Gamma(x + 1/2)\Gamma(y + 1/2)}{(x + y)\Gamma(x + y)}. \quad (34.2.1)$$

□

Oltre che di interesse stretto per la Statistica, la *Funzione B* trova applicazione sia nel calcolo di un'ampia classe di integrali definiti di *differenziale binomio* (†), non esprimibili altrimenti in termini finiti, i.e., mediante funzioni elementari (e.g., quelli di linea relativi al calcolo della lunghezza di certe curve piane regolari), sia in rappresentazioni integrali sintetiche delle *Funzioni Speciali* (e.g., di *Bessel*, *Ipergeometriche*, etc.).

La *Funzione B* gode di proprietà notevoli che agevolano l'attività computazionale. In ogni caso, questa si riconduce alle proprietà della *Funzione Γ* che, delle due, resta la funzione *fondamentale*. Qui di seguito, sono riportate alcune identità comode nell'impiego di  $B$ :

1. Per una verifica esplicita della *simmetria* di  $B$  rispetto allo scambio dei parametri  $x$  e  $y$  nell'Eq. (34), è sufficiente eseguire la trasformazione  $v := 1 - s$  nell'Eq. (34.1). Pertanto,

$$B(x, y) \equiv B(y, x). \quad (35)$$

2. Si verifica subito che l'Eq. (16), nella quale  $|x| < 1$ , e l'Eq. (26), nella quale  $|x| < 1/2$ , equivalgono, rispettivamente, alle rappresentazioni – entrambe prolungabili! –

$$B(x, 1-x) = \pi \csc(\pi x), \quad (36)$$

$$B(1/2 + x, 1/2 - x) = \pi \sec(\pi x). \quad (37)$$

3. 
$$B(x + 1, y) \equiv \frac{\Gamma(x + 1)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y + 1)} = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x + y)\Gamma(x + y)} \equiv \frac{x}{x + y} B(x, y). \quad (38.1)$$

Scambiando  $x$  con  $y$  e sfruttando l'Eq. (35), si ottiene la relazione analoga

$$B(x, y+1) \equiv \frac{y}{x+y} B(x, y). \quad (38.2)$$

4. Sia  $y > 1$ . Sfruttando le Eq.i (9) e (34), segue, che

$$B(x+1, y-1) \equiv \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x+y)} = \frac{x \cancel{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(y)}{y-1}}{\frac{\Gamma(x) \cancel{\Gamma(y)}}{B(x, y)}}, \text{ i.e., semplificando, che}$$

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} B(x+1, y-1). \quad (39.1)$$

Procedendo analogamente, risulta, scambiando le variabili, con  $x > 1$ ,

$$B(x, y) = \frac{x-1}{y} B(x-1, y+1). \quad (39.2)$$

5. Sia  $q \in (0, 1)$ . Quando  $x \equiv 1+q \wedge y \equiv 1-q$ , allora, tenendo conto dell'Eq. (16), si ha

$$\begin{aligned} B(x, y) \equiv B(1+q, 1-q) &= \int_0^{+\infty} u^q (1+u)^{-2} du = \frac{\Gamma(1+q)\Gamma(1-q)}{\Gamma(2)} \\ &= q\Gamma(q)\Gamma(1-q) = q\pi \operatorname{csc}(\pi q). \end{aligned} \quad (40)$$

6. Si consideri l'integrale definito di *differenziale binomio*, parametrico in  $x$  e  $y$ ,

$$\mathfrak{B}(x, y) := \int_0^1 u^{x-1} (1-u^q)^{y/q-1} du.$$

nel quale,  $\{x, y, q\} \subset \mathbb{R}^+$ .

Con la sostituzione  $u \mapsto t^{1/q}$ , corrispondente alla trasformazione  $\int_0^1 (du) \mapsto \int_0^1 (t^{1/q-1} dt/q)$  dell'operatore integrale, si trova subito, in analogia con l'Eq. (35), che

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(x, y) &= \int_0^1 t^{x/q-1} (1-t)^{y/q-1} dt \equiv \frac{1}{q} B(x/q, y/q) \\ &\equiv \frac{\Gamma(x/q)\Gamma(y/q)}{q\Gamma((x+y)/q)} \equiv \mathfrak{B}(y, x). \end{aligned} \quad (41)$$

In particolare, se  $y \equiv q-x (> 0)$ , si riconosce, mediante l'Eq. (16), che

$$B(x/q, 1-x/q) = \Gamma(x/q)\Gamma(1-x/q) = \pi/\sin(\pi x/q). \quad (41.1)$$

7. Il calcolo degli *Integrali di Wallis*,  $W_c(q) := \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^q d\theta$  e  $W_s(q) := \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^q d\theta$ , si riduce al caso generale espresso dall'Eq. (34.2) quando  $q \in (-1, +\infty)$  in  $W_c$  e in  $W_s$ .

Infatti, per  $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^+$ , le uguaglianze  $q = 2x-1 = 2y-1$  sono riscrivibili nelle forme *inverse equivalenti*  $x = y = q/2 + 1/2$ .

Quindi, ricorrendo alla variante (34.2.1) dell'Eq. (34.2) e tenendo presente la simmetria espressa dall'Eq. (35) e le Eq.i (9) e (25.1), segue l'identità tra gli *Integrali di Wallis*,

$$W_c(q) \equiv (1/2) B(q/2 + 1/2, 1/2) \equiv (1/2) B(1/2, q/2 + 1/2) \equiv W_s(q) \\ = \frac{\pi^{1/2}}{q} \frac{\Gamma(q/2 + 1/2)}{\Gamma(q/2)} := W(q). \quad (42)$$

8. Sia  $(x, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^+$  (v. Eq. (10)). Allora, dall'Eq. (11), risulta

$$B(x, n) \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(n)}{\Gamma(x+n)} = \frac{(n-1)!}{(x)_n} \equiv B(n, x) \quad (43)$$

$$(i.e., B(x, 1) = \frac{0!}{(x)_1} = \frac{1}{x}, \quad B(x, 2) = \frac{1!}{(x)_2} = \frac{1}{x(x+1)}, \quad B(x, 3) = \frac{2!}{(x)_3} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}, \text{ etc.}).$$

□

Come conclusione di questa discussione elementare sulla *Funzione B*, si può ricavare, seguendo *Legendre* e *Gauss* ([<sup>13</sup>], [<sup>18</sup>]), la cosiddetta *Formula di Duplicazione* per la *Funzione Γ*, ottenuta dalla *Funzione B* di argomento riflesso:

$$B(x, x) \equiv \frac{(\Gamma(x))^2}{\Gamma(2x)} \\ = \int_0^1 (t(1-t))^{x-1} dt. \quad (44.1)$$

Nell'integrale (44.1), si definisca  $t := (u+1)/2$ , determinando la trasformazione dell'operatore integrale  $\int_0^1 (dt) \mapsto \int_{-1}^1 (du/2)$ . Da queste sostituzioni, segue che

$$B(x, x) = 2^{1-2x} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{x-1} du \equiv 2^{2-2x} \int_0^1 (1-u^2)^{x-1} du, \quad (44.2)$$

sfruttando il fatto che la funzione integranda è *pari*.

La sostituzione ulteriore  $u := v^{1/2}$  nell'Eq. (44.2) dà  $du = (1/2)v^{-1/2} dv \equiv (1/2)v^{1/2-1} dv$  e, senza alcun cambiamento degli estremi dell'intervallo di integrazione, si prosegue scrivendo

$$B(x, x) = 2^{1-2x} \int_0^1 v^{1/2-1} (1-v)^{x-1} dv \equiv 2^{1-2x} B(1/2, x) \\ \equiv 2^{1-2x} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)} = 2^{1-2x} \frac{\pi^{1/2}\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)}. \quad (44.3)$$

Infine, eliminando  $B(x, x)$  tra le uguaglianze (44.1) e (44.3), semplificando e risolvendo rispetto a  $\Gamma(2x)$ , si ottiene la *Formula di Duplicazione* cercata:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\pi^{1/2}} \Gamma(x) \Gamma(x+1/2). \quad (45)$$

■

---

(†) Una discussione concisa ma prontamente operativa dei risultati di Čebyšëv (P. L., 1821-1894) sull'integrabilità *in termini finiti* del *Differenziale Binomio* in  $\mathbb{R}$  è presentata nel math-notebook: *Esercizi di Calcolo Integrale in una variabile reale*, MR-5, p. 5-7.

**Esercizio 1** Si verifichino le identità seguenti:

- 1.1  $B(x, y) \equiv B(x+1, y) + B(x, y+1)$ ;
- 1.2  $B(x, y) B(x+y, z) \equiv B(y, z) B(x, y+z)$ ;
- 1.3  $B(x, y) B(x+y, 1-y) = \frac{\pi}{x} \operatorname{csc}(\pi y)$ , quando  $y \in (0, 1)$ .

**Esercizio 2** Si verifichi l'identità seguente, per  $\{n, k\} \subset \mathbb{Z}^+ \wedge k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1) B(n-k+1, k+1)} \equiv \left( (n+1) \int_0^{+\infty} u^k (1+u)^{k-2(n+1)} du \right)^{-1}.$$

**Esercizio 3** Sia  $-1 < \alpha < \beta$ . Definito  $u := (\sinh x)^2$ , si verifichi che

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sinh x)^\alpha}{(\cosh x)^\beta} dx = \frac{1}{2} B((\alpha+1)/2, (\beta-\alpha)/2) \equiv \frac{\Gamma((\alpha+1)/2) \Gamma((\beta-\alpha)/2)}{2\Gamma((\beta+1)/2)}.$$

**Esercizio 4** Sia  $\theta \in (-\pi, \pi)$ . Si verifichi che

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+x^2+2xy\cos\theta)} dx dy = \frac{\theta}{2} \operatorname{csc} \theta.$$

**Esercizio 5** Sia  $\phi \equiv \tan \vee \cot \wedge \alpha \in (0, 1)$ . Si verifichi che

$$\int_0^1 (\phi(x))^\alpha dx \equiv - \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\phi(x))^\alpha} = \int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{(\phi(1/x))^\alpha}{x^2} dx = \pi \operatorname{sec}(\alpha\pi/2).$$

**Esercizio 6** Sia  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Con riferimento all'Eq. (42), si verifichino le *Identità di Wallis* seguenti:

- 6.1  $W(2n) = \frac{1}{2} B(n+1/2, 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi$ ;
- 6.2  $W(2n+1) \equiv \frac{1}{2} B(n+1, 1/2) = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$ ;
- 6.3  $W(n+2) \equiv \frac{1}{2} B((n+3)/2, 1/2) = \frac{n+1}{n+2} W(n)$ .

**Esercizio 7** Dopo aver verificato che

$$7.1 \quad W(-1/2) = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{2(2\pi)^{1/2}} \quad \text{e che}$$

$$7.2 \quad W(1/2) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{(\Gamma(1/4))^2},$$

si verifichi il valore dell'integrale doppio

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 dx}{((1-y^4)(1-x^4))^{1/2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Questo risultato, tratto probabilmente da alcune annotazioni a margine nei manoscritti di *L. Euler*, si incontra nella Teoria delle *Funzioni Integrali Ellittiche Legendriane*.

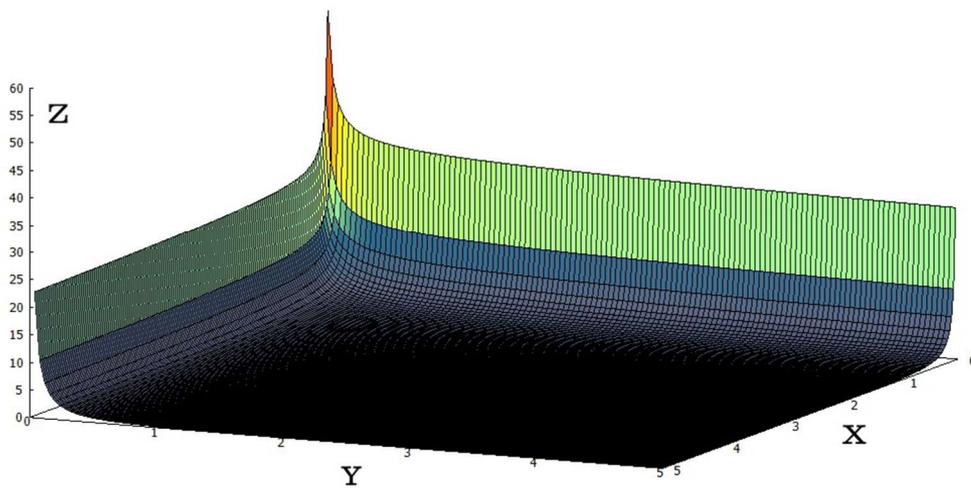


Fig. 2 – Grafico di  $(x, y) \mapsto z := B(x, y)$ , con  $\{x, y\} \subset (\mathbb{R}^+)^2$ .

■■■



Lorenzo Mascheroni (1750-1800)

## capitolo III

## Il Numero $\gamma$ di Euler-Mascheroni

Circa nel 1734, LEONHARD EULER, il grande matematico di Basilea, definì <sup>[28]</sup> un numero reale, rivelatosi di notevole importanza sia teorica che applicativa nell'Analisi, mediante il valore-limite

$$\gamma := \lim_{v \rightarrow +\infty} \left( \left( \sum_{n=1}^v \frac{1}{n} \right) - \ln v \right). \quad (46)$$

Il simbolo corrente,  $\gamma$ , che sostituisce l'originario  $C$  di Euler, si incontra, per la prima volta (1790), nelle 'Adnotationes ad calculum integrale Euleri' del conte bergamasco LORENZO MASCHERONI.

Da appunti di chi scrive, raccolti alle lezioni di Analisi Matematica I (UNIMI, Fisica, 1967) tenute dal Prof. RICCI (GIOVANNI, 1904-1973), una presentazione rigorosa del numero  $\gamma$  – la *costante di Euler-Mascheroni* – richiede una rivisitazione preliminare della

### Disuguaglianza di Bernoulli (Jakob, 1654-1705)

Sia  $\{\xi, n\} \in (-1, +\infty) \times \mathbb{Z}_0^+$ . Allora,  $\forall n$ , risulta

$$(1 + \xi)^n \geq 1 + n\xi. \quad \blacktriangle \quad (47)$$

#### Dimostrazione

È immediato, per induzione vs.  $n$ .

□

Ora, si osserva che la successione numerica  $\{a_n\} := \{(1 + 1/n)^n\}$  è definitivamente *crescente*.

Infatti,  $\forall n > 1$ , si ha

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \equiv \frac{(1 + 1/n)^n}{(1 + 1/(n-1))^{n-1}} = \frac{((n+1)/n)^n}{(n/(n-1))^n (n/(n-1))^{-1}} = \frac{((n^2-1)/n^2)^n}{(n-1)/n} \equiv \frac{(1 - 1/n^2)^n}{1 - 1/n}$$

e, poiché  $(1 - 1/n^2)^n > 1 + n(-1/n^2) = 1 - 1/n$  per la *Disuguaglianza di BERNOULLI*, nella quale, si prenda  $\xi \equiv -1/n^2$ , segue che  $a_n > a_{n-1}$ , secondo l'asserto.

Analogamente, la successione numerica  $\{b_n\} := \{(1 + 1/n)^{n+1}\}$  è definitivamente *decescente*.

Risulta, infatti,  $\forall n > 1$ ,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \equiv \frac{(1 + 1/n)^{n+1}}{(1 + 1/(n-1))^n} \equiv \frac{((n+1)/n)^n (n+1)/n}{(n/(n-1))^n} = \frac{(n+1)/n}{(n^2/(n^2-1))^n} \equiv \frac{1 + 1/n}{(1 + 1/(n^2-1))^n}.$$

Qui, essendo  $(1 + 1/(n^2-1))^n > 1 + n(1/(n^2-1)) > 1 + n(1/n^2) = 1 + 1/n$  per la *Disuguaglianza di Bernoulli*, nella quale, si prenda  $\xi \equiv 1/(n^2-1)$ , segue pure che  $b_n < b_{n-1}$ , secondo l'asserto.

Ora, i limiti  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = e^-$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b_n = e^+$  fissano il *taglio* 'e' di DEDEKIND, (J. W. R., 1831-1916),

$$e := (\mathbf{E}^- | \mathbf{E}^+) \equiv (\{a_n\} | \{b_n\}), \tag{48.1}$$

equivalente, in forma *logaritmica* (la verifica è immediata), alle coppie di disuguaglianze

$$1/(n+1) < \ln(1 + 1/n) < 1/n. \tag{48.2}$$

A loro volta,  $\forall v \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ , le identità

$$\sum_{n=1}^{v-1} 1/(n+1) \equiv \left(\sum_{n=1}^v 1/n\right) - 1 \equiv h_v - 1, \tag{49.1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{v-1} \ln(1 + 1/n) &\equiv \sum_{n=1}^{v-1} (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\ln 3 - \cancel{\ln 2}) + \dots + (\ln v - \cancel{\ln(v-1)}) \equiv \ln v, \end{aligned} \tag{49.2}$$

$$\sum_{n=1}^{v-1} 1/n \equiv \left(\sum_{n=1}^v 1/n\right) - 1/v \equiv h_v - 1/v \tag{49.3}$$

estendono additivamente le disuguaglianze (48.2), generando la sequenza ternaria

$$\left(\sum_{n=1}^v 1/n\right) - 1 < \ln v < \left(\sum_{n=1}^v 1/n\right) - 1/v, \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

Da questa, definita la somma finita  $\theta_v := \left(\sum_{n=1}^v 1/n\right) - \ln v \equiv h_v - \ln v$ , si deduce che

$$0 < 1/n < \theta_v < 1. \tag{50}$$

Ora, la successione numerica  $\{\theta_v\}$  *decesce* tendendo a un limite *non-negativo*, avendosi, dalla disequazione *sinistra* (48.2), che

$$\theta_v - \theta_{v+1} \equiv \left(\left(\sum_{n=1}^v 1/n\right) - \ln v\right) - \left(\left(\sum_{n=1}^{v+1} 1/n\right) - \ln(v+1)\right) = \ln(1 + 1/v) - 1/(v+1) > 0,$$

i.e., che 0 è un valore *minorante* di  $\theta_v$ . Ciò implica che  $\exists! \gamma \in \mathbb{R}^+$  tale che  $\gamma^+ := \lim_{v \rightarrow +\infty} \theta_v$ .

Quindi, risultando, *al più*,  $\gamma \in [0, 1) \wedge \theta_v = \gamma + \varepsilon_v$ , con  $\varepsilon_v = o(1) > 0$ , vale la somma

$$h_v := \sum_{n=1}^v 1/n = \ln v + \gamma + \varepsilon_v \equiv \ln v + \theta_v, \tag{51.1}$$

detta, anche, *numero armonico v-esimo* (o *somma armonica v-esima*; per convenzione,  $h_0 := 0$ ).

Se si riscrive l'identità (49.2) nella forma

$$\ln v = \sum_{n=1}^{v-1} \ln(1 + 1/n) \equiv \left(\sum_{n=1}^v \ln(1 + 1/n)\right) - \ln(1 + 1/v),$$

l'Eq. (51.1) assume l'espressione equivalente

$$\gamma + \varepsilon_\nu \equiv h_\nu - \left( \sum_{n=1}^{\nu} \ln(1 + 1/n) \right) + \ln(1 + 1/\nu), \quad (51.2)$$

che, essendo  $\varepsilon_\nu = o(1) \wedge \ln(1 + 1/\nu) = o(1)$  per  $\nu \rightarrow +\infty$ , fornisce un'espansione in serie di  $\gamma$ :

$$\gamma := \sum_{n=1}^{+\infty} (1/n - \ln(1 + 1/n)). \quad (52.1)$$

Per determinare il *verso di convergenza* della serie (52.1) e, da questo, se sia  $\gamma \neq 0$ , si osserva che la successione  $\{s_\nu\}$  delle sue somme parziali è *crescente* poiché si ha

$$\begin{aligned} s_{\nu-1} - s_\nu &\equiv \sum_{n=1}^{\nu-1} (1/n - \ln(1 + 1/n)) - \sum_{n=1}^{\nu} (1/n - \ln(1 + 1/n)) \\ &= \ln(1 + 1/\nu) - 1/\nu < 0, \end{aligned}$$

dalla disuguaglianza *destra* (48.2). Quindi, la serie (52.1) converge a  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  *per difetto*, i.e.,

$$\gamma = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (1/n - \ln(1 + 1/n)) \right)^- > 0. \quad (52.2)$$

Infatti, gli addendi della serie (52.2) sono *tutti positivi* e, quindi, la maggiorazione

$$\gamma > \sum_{n=1}^{\nu} (1/n - \ln(1 + 1/n))$$

vale  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ , i.e.,  $\forall$  somma parziale.

Allora, dall'Eq. (51.2), segue che il parametro  $\varepsilon_\nu$  *decrese* per  $\nu$  crescente, avendosi

$$\varepsilon_\nu \in (0, \ln(1 + 1/\nu)). \quad (53)$$

Se si sostituiscono a  $\varepsilon_\nu$ , nell'Eq. (51.1), alternativamente i valori estremi inferiore e superiore del suo intervallo di variabilità (53), si ottengono, rispettivamente, le disuguaglianze

$$h_\nu - \ln \nu > \gamma, \quad (54.1)$$

$$h_\nu - \ln \nu < \gamma + \ln(1 + 1/\nu), \quad \text{i.e.,} \quad h_\nu - \ln(\nu + 1) < \gamma, \quad (54.2)$$

combinando le quali, resta definito il *taglio* ' $\gamma$ ' di Dedekind, come elemento separatore di classi contigue di numeri *irrazionali trascendenti*,

$$\gamma := (\mathbf{G}^- | \mathbf{G}^+) \equiv (\{h_\nu - \ln(\nu + 1)\} | \{h_\nu - \ln \nu\}), \quad (54.3)$$

corrispondente,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ , alla coppia di disuguaglianze

$$h_\nu - \ln(\nu + 1) < \gamma < h_\nu - \ln \nu. \quad (54.4)$$

□

Di principio, le classi di disuguaglianze (54.4) permettono un controllo dell'approssimazione di  $\gamma$  con la precisione desiderata, sia per eccesso che per difetto. Nella pratica, però, osservato, e.g., che  $h_{10000} - \ln(10000) = 0.5772[65\dots]$  fornisce  $\gamma$  correttamente solo alla quarta (!) cifra decimale, si intuisce facilmente come la convergenza *lentissima* delle somme nelle disuguaglianze (54.4) renda *assai poco* conveniente l'approssimazione di  $\gamma$  con esse.

Euler, era ben consapevole della necessità operativa di metodi accelerativi di convergenza a  $\gamma$  con una precisione assegnata, i.e., con un numero *prefissato* di cifre significative corrette. Infatti, è verosimile che la *Formula sommativa di EULER-MACLAURIN* (v., e.g., [5], [9]), esprimibile mediante i *Numeri di Bernoulli* [58], sia stata introdotta (senza troppe giustificazioni formali) nel tentativo ottenere una stima numerica altrimenti impossibile con i metodi algebrici ordinari noti a quel tempo.

Così, dopo aver ricavato il risultato *asintotico* [6]

$$\gamma \sim h_\nu - \frac{1}{2\nu} - \ln \nu + \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{2k} \zeta(2k), \quad (55)$$

Euler ottenne 16 cifre decimali corrette di  $\gamma$  con  $\nu = 10$  e  $M = 7$  ( $B_{2k}$  è il *Numero di Bernoulli* di ordine  $2k$  (v. Eq. 160) mentre  $\zeta(2k)$  è il valore della *Funzione di RIEMANN* di *argomento*  $2k$ ). Questo algoritmo, però, porta con sé l'inconveniente destabilizzante della divergenza molto rapida e di segno *alternato* dei *Numeri di Bernoulli* al crescere di  $M$ .

Mascheroni, nelle sue citate ‘*Adnotationes ...*’ del 1790, cercò di far meglio con un calcolo simile. Sfortunatamente, delle sue 32 cifre decimali, solo le prime 19 sono corrette, come J. VON SOLDNER rilevò nel 1809.

Nel 1812, G. F. B. NICOLAI, allievo di GAUSS, determinò le prime 40 cifre decimali corrette di  $\gamma$ , confermando i calcoli di von Soldner. Comunque, i vari raffinamenti di calcolo restavano ancorati saldamente alla relazione asintotica (55); cambiavano solo le assegnazioni di  $\nu$  e di  $M$ .

Una strada diversa fu percorsa da T. J. STIELTJES nel 1887, che utilizzò una serie molto rapidamente convergente di somma  $\gamma$ , dominata dalla differenza  $\zeta(2n + 1) - 1$  e dal fattore esponenziale  $2^{-2n}$ , entrambi infinitesimi per  $n \rightarrow +\infty$  (v. P. 53, **Esercizio 8.2**). Le cifre corrette calcolate furono 32.

Il metodo dell’*Integrale Esponenziale* fu applicato da D. W. SWEENEY, nel 1963 [31], arrivando a spingere la precisione a 10000 cifre decimali.

Più recentemente (A. J. YEE, 2009), l’utilizzo di *Funzioni di Bessel Iperboliche*  $K_\nu$  in un algoritmo di tipo ‘*binary splitting*’ e la disponibilità di processori di ultima (a quella data) generazione, ad altissima densità di memoria, hanno dato 29 844 489 545 cifre decimali corrette di  $\gamma$ !

Per stime ‘pronto-uso’, anche con una calcolatrice tascabile, i numeri  $\in \mathbb{Q}^+$

$$\frac{228}{395}, \quad \frac{30316449}{52521875} \quad e \quad \frac{376566901}{652385103}$$

approssimano  $\gamma$  *per difetto* alla 6<sup>a</sup>, alla 13<sup>a</sup> e alla 18<sup>a</sup> cifra decimale *corretta*, rispettivamente.

Con quasi tutte le esigenze applicative, il valore approssimato *per difetto* alla 26<sup>a</sup> cifra decimale,

$$\gamma \approx 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 9 \quad (55.1)$$

è certamente sufficiente. Questioni di natura specialistica possono richiedere un’approssimazione maggiore, e.g., arrestata a 50 cifre decimali,

$$\gamma \approx 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421\ 59335\ 93992. \quad (55.2)$$

Le prime 200 cifre decimali di  $\gamma$  sono riportate in [68], P. 15; comunque, molti programmi di calcolo (MAXIMA<sup>fr-sfwr</sup> [71], EMT<sup>fr-sfwr</sup> [76], MATHEMATICA<sup>TM</sup>, etc.), tutti operativi su piattaforme standard, incorporano routines altamente ottimizzate in grado di approssimare  $\gamma$  con un numero virtualmente illimitato di cifre decimali. □

La natura di  $\gamma$  – se sia razionale o irrazionale – non è certa. Comunque, pur apparendo plausibile la congettura che  $\gamma$  sia *irrazionale* (e, forse, *trascendente*, come  $e$  e  $\pi$ ), sofisticati controlli numerici iterativi mediante *frazioni continue* indicherebbero che, se  $\gamma \in \mathbb{Q}^+$ , allora, il suo denominatore non può che essere un numero (intero) di *non meno di*  $10^{242081}$  cifre! (T. Papanikolaou, 1997; J. Havil, 2003 [68]). Lo ‘stato dell’arte’ aggiornato (2023) su  $\gamma$  è presentato in [80] e in [81].

Il percorso delineato – anche con qualche notazione storica – tra i *tagli di Dedekind* (48.1) e (54.3) sembra adombrare l'esistenza di un legame tanto fondamentale quanto elusivo, tra  $e$  e  $\gamma$ .

Euler chiarì (1748) il significato dell'identità  $-1 \equiv e^{i\pi}$  ma la connessione tra  $e$  e  $\gamma$  e, da questa, tra  $\gamma$  e  $\pi$ , resta (2023) un enigma di gran lunga più frustrante, probabilmente, dell'attesa stessa di quasi 360 anni (!) della prima dimostrazione del *Teorema di Fermat* (A. WILES, 1994).

Varie altre rappresentazioni di  $\gamma$ , integrali e non, sono presentate più avanti: Eq.i (66.1) e (66.2); **Esercizio 1**, P. 37; Eq.i (103) e (107); **Esercizi: 2**, P. 52; **8**, P. 53 e **15**, P. 55.

□

### Esempio 1

Oltre che nell'Analisi (le *Funzioni di Bessel*, l'*Integrale Esponenziale*, etc.), la *costante di Euler-Mascheroni* ricorre frequentemente tra i risultati della *Teoria dei Numeri*.

Dirichlet [53] ha dimostrato che  $\gamma$  è il valore-limite della successione *decescente*

$$\{(1/2)(\mu_n + 1 - \ln n)\},$$

dove  $\mu_n$  è la media *aritmica* dei divisori di tutti i numeri interi dell'insieme  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Così, inversamente, resta fissata la stima asintotica ( $n \gg 1$ )

$$\mu_n \sim \ln n + 2\gamma - 1.$$

### Esempio 2

Sia  $p \leq n$  ( $\in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2\}$ ) un numero primo *qualsiasi*. Il matematico belga VALLÉE POUSSIN (C. J. É. G. N., BARON DE LA, 1866-1962) scoprì [32] la dipendenza di  $\gamma$  generalizzando quello che oggi è noto come il 3° Teorema di MERTENS (F. C. J., 1840-1927),

$$\gamma = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( (\ln n) \prod_{p=2}^n (1 - 1/p) \right).$$

La produttoria si estende ai *soli* numeri primi  $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots, p^*\}$ , con  $p^* \leq n$ .

### Esempio 3

La cosiddetta *Funzione  $\phi(n)$  di Euler (Totient Function)* rappresenta il numero di frazioni proprie *irriducibili*, tutte con denominatore uguale a  $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2\}$ , i.e., il numero di numeri primi  $\leq n$ .

Una sua maggiorazione, che si può ritenere definitiva e di precisione notevole, incorpora anche  $\gamma$ :

$$\phi(n) \leq \frac{n}{\ln(\ln n)} e^{-\gamma}.$$

### Esempio 4

Il coefficiente angolare della retta tangente a *graf*( $\Gamma$ ) (v. P. 11, Fig. 1) nel punto (1;1) vale  $-\gamma$  (v. Eq. (63)). Pertanto, è elementare scrivere l'equazione cartesiana esplicita di tale retta:

$$y = -\gamma x + \gamma + 1.$$

■■■



*Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897)*

## capitolo IV

# Le rappresentazioni di Euler e di Weierstrass della Funzione GAMMA

Nella cosiddetta *forma di Euler* (v. [14]), l'applicazione  $x \mapsto \Gamma(x)$  è definita, per  $x \in \mathbb{R}^+$ , come la funzione-limite della *successione di funzioni*

$$\{g_n(x)\} := \left\{ \frac{n!n^x}{(x)_{n+1}} \right\}, \quad (56)$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ , i.e., in modo equivalente, come

$$\Gamma(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{(x)_{n+1}}. \quad (57)$$

Si incomincia con l'osservare che traslando  $x \mapsto x+1$  e moltiplicando per  $1 \equiv x/x$ , risulta

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^{x+1}x}{x((x+1)(x+2)\dots((x+1)+(n+1)-1))} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{nx}{x+n+1} \frac{n!n^x}{(x)_{n+1}} \right) = x\Gamma(x), \end{aligned} \quad (58)$$

i.e., la *Proprietà Iterativa* espressa dall'Eq. (9). Poi, dall'Eq. (58), si determina il valore

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n}{(1)_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

come già ottenuto con l'Eq. (3). Quindi, iterando l'Eq. (58), si ritrovano le Eq.i (11) e (12).

Ora, mediante l'identità  $n^x \equiv e^{x \ln n}$ , si può riconfigurare il termine generale della successione (56) nel modo seguente:

$$g_n(x) = \frac{n^x(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \equiv \frac{e^{x \ln n}}{x} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k}$$

$$\equiv \frac{1}{x} \left( \prod_{k=1}^n e^{-x/k} \right) e^{x \ln n} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} \left( \prod_{k=1}^n e^{x/k} \right) = \frac{1}{x} e^{-x((\sum_{k=1}^n 1/k) - \ln n)} \prod_{k=1}^n \frac{k e^{x/n}}{x+k} .$$

Poi, ricordando che  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( (\sum_{k=1}^n 1/k) - \ln n \right)$ , si deduce che la rappresentazione-limite (57) è equivalente al *prodotto infinito*, noto come *forma di (Newman-) Weierstrass* (v. [33], [34], [67]),

$$\Gamma(x) := \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{x/n}}{x+n} . \tag{59}$$

Circa l'equivalenza tra la rappresentazione integrale di Legendre (4) e quella -limite (57) di Euler e, quindi, transitivamente, quella Weierstrass (59), si consideri la successione ausiliaria di funzioni

$$\{ \Theta_n(x) \} := \left\{ \int_0^n t^{x-1} (1-t/n)^n dt \right\}, \tag{60}$$

$\forall t \in (0, n] \subset \mathbb{R}^+$ . Poiché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t/n)^n = e^{-t}$ , mediante il passaggio al limite del suo termine generale, se ne determina la funzione-limite (v. [4], p. 6-9; [22], **2**, p. 151-156; [64], p. 325-328),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Theta_n(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} (1-t/n)^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \equiv \Gamma(x) . \tag{61}$$

D'altra parte, per il calcolo del termine generale  $\Theta_n(x)$  della successione, posto  $t := nu$  e riscritto

$$\Theta_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du \equiv n^x B(x, n+1), \tag{62}$$

applicando  $n$  volte l'Eq. (39.1) al fattore  $B(x, n+1)$  nell'Eq. (62), si ottiene

$$\begin{aligned} \Theta_n(x) &= n^x \frac{n(n-1)(n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)} B(x+n, 1) \\ &\equiv \frac{n! n^x}{(x)_n} \int_0^1 u^{x+n-1} du = \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \equiv g_n(x) . \end{aligned}$$

Quindi, con il ricorso al limite (59), resta provata l'equivalenza delle rappresentazioni (4), (57) e (59) della *Funzione  $\Gamma$* . ▲

Dalla rappresentazione (57) di Weierstrass, si può determinare un risultato notevole che lega la *Funzione  $\Gamma$* , attraverso la sua derivata 1<sup>a</sup>, alla *Costante di Euler-Mascheroni*.

**Proposizione**

Il valore numerico di  $\Gamma'$ , per  $x = 1$ . è

$$\Gamma'(1) = -\gamma . \tag{63}$$

**Dimostrazione**

Si consideri l'uguaglianza dei *logaritmi* naturali dei membri dell'Eq. (59),

$$\ln \Gamma(x) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln \frac{n}{x+n} + \frac{x}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} &\equiv -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{n} - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right) \\ &\equiv -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \end{aligned} \tag{64}$$

dove,  $f_n(x) := x/n - \ln(1 + x/n)$ .

Ricordando che  $x \in \mathbb{R}^+$ , la *derivata logaritmica* della *Funzione  $\Gamma$*  è determinabile direttamente dall'Eq. (64) derivando termine-a-termine,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) &\equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \\ &\equiv -\gamma - 1/x + \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x). \end{aligned} \tag{65}$$

Infatti, la scrittura della serie nell'Eq. (65) è certamente corretta  $\forall x \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^+$ , dove  $\mathcal{K}$  è un intervallo compatto qualsiasi, *sia* perché  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  è convergente in  $\mathcal{K}$  (e.g., la sua somma è  $\gamma$  quando  $x \equiv 1 \in \mathcal{K}$ ) *sia* perché  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  converge uniformemente. Inoltre, la convergenza uniforme di  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  in ogni intervallo *compatto*  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^+$  rende ammissibile il passaggio al limite  $x \rightarrow 1$  attraverso il simbolo di sommatoria nell'Eq. (65).

Così, ricordando l'identità (5), risulta

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma'(1)}{1} = \Gamma'(1) = -\cancel{\gamma} + \cancel{\gamma} \equiv -\gamma \tag{65.1}$$

avendo riconosciuto la *Serie di Mengoli* [35],  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n(n+1)) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} (\lim_{x \rightarrow 1} x/(n(n+x)))$ , la cui somma vale  $1^-$  (v. Eq. (68)). – La **Proposizione (63)** è dimostrata. **▲**

Dall'Eq. (7), l'Eq. (63) fornisce immediatamente il valore del *1° Integrale di EULER-MASCHERONI*, *non ottenibile* altrimenti in forma chiusa mediante funzioni elementari:

$$\gamma = -\Gamma'(1) \equiv - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt. \tag{66.1}$$

Proseguendo dall'Eq. (66.1) con un'integrazione *per parti*, si scrive

$$\gamma \equiv \int_0^1 \ln t \, d(e^{-t} - 1) + \int_1^{+\infty} \ln t \, d(e^{-t}) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

Se si sostituisce  $t$  con  $1/t$  e, quindi,  $dt$  con  $-dt/t^2$  nell'ultimo integrale scritto, risulta, pure, che

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} \, dt. \tag{66.2}$$

Si può eseguire una valutazione numerica di  $\Gamma'(x)$  in  $\mathbb{R}^+$  riscrivendo l'Eq. (65) nella forma

$$\Gamma'(x) = \left( -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \right) \Gamma(x), \tag{67}$$

(pseudo-)proporzionale a  $\Gamma(x)$ , tenendo conto che,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ , vale la maggiorazione

$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 1.6449341,$$

dove, con  $\zeta$ , è indicata la *Funzione Zeta* di RIEMANN (v.: [1], CAP. **XIII**; [5], P. 61; [8], P. 192).

In particolare, dalla scomposizione in fratti semplici del termine generale della serie  $S(x)$ , i.e.,

$S(x) \equiv (1/x) \sum_{n=0}^{+\infty} (1/n - 1/(n+x))$ , si trova,  $\forall (v, p) \in (\mathbb{Z}^+)^2$ ,  $v > p$  e  $x \equiv p$ , che

$$\begin{aligned} S(p) &\equiv \frac{1}{p} \lim_{v \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^v \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \equiv \frac{1}{p} \lim_{v \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + \sum_{n=p+1}^v \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^v \frac{1}{n+p} \right) \\ &= \frac{1}{p} \lim_{v \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + \sum_{n=p+1}^v \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{v+p} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \lim_{v \rightarrow +\infty} \sum_{n=v+1}^{v+p} \frac{1}{n} = \dots \\ &\dots = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{v+1} = \left( \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \right)^- \equiv (h_p/p)^-, \end{aligned} \quad (68)$$

cf/c Eq. (51.1). Il caso  $(x \equiv) p \equiv 1$  fornisce la somma della *Serie di MENGOLI*:  $S(1) = 1^-$ .

Pertanto, mediante le Eq.i (67), (68) e (12), risulta che

$$\begin{aligned} \Gamma'(p) &= (-\gamma - 1/p + pS(p)(p-1)!) \\ &\equiv \left( (-\gamma + \sum_{n=1}^{p-1} 1/n) (p-1)! \right)_{p \geq 2} \equiv ((h_p - \gamma)(p-1)!)_{p \geq 2}. \end{aligned} \quad (69)$$

In tal modo, l'Eq. (69) consente agevolmente di ottenere, e.g., una conferma immediata del tasso di crescita molto rapida di  $\Gamma(x)$  nell'intervallo  $[2, +\infty)$  (cf/c Fig. 1, P. 11).

L'applicazione con i primi valori *interi*  $\geq 2$  dà

$$\begin{aligned} \Gamma'(2) &= 1 - \gamma \approx 0.423, \\ \Gamma'(3) &= 3 - 2\gamma \approx 1.846, \\ \Gamma'(4) &= 11 - 6\gamma \approx 7.537, \\ &\vdots \\ \Gamma'(10) &= 1026576 - 362880\gamma \approx 817116, \\ &\text{etc. .} \end{aligned}$$

Tra l'altro, il fatto che  $\Gamma'(1) = -\gamma < 0$  mentre  $\Gamma'(2) = 1 - \gamma > 0$  è consistente con l'esistenza di un minimo stazionario locale nell'intervallo compatto  $[1, 2]$ , come già notato a P. 4.

Un controllo dell'andamento di  $\Gamma'(x)$  in  $(0, +\infty)$  è realizzabile ricavando una generalizzazione dell'Eq. (9) per le derivate di  $\Gamma$  dall'Eq. (7) mediante un'integrazione *per parti*:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k)}(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^k dt \\ &= \underbrace{(-e^{-t}) t^{x-1} \ln t \Big|_0^{+\infty}}_{\equiv 0} - \int_0^{+\infty} (-e^{-t}) \frac{d}{dt} (t^{x-1} (\ln t)^k) dt \\ &= (x-1) \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} (\ln t)^k dt + k \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} (\ln t)^{k-1} dt \\ &\equiv (x-1) \Gamma^{(k)}(x-1) + k \Gamma^{(k-1)}(x-1), \end{aligned}$$

da cui, con la traslazione  $x \mapsto x+1$ , risulta la formula iterativa

$$\Gamma^{(k)}(x+1) = x\Gamma^{(k)}(x) + k\Gamma^{(k-1)}(x). \quad (70)$$

Così, nell'Eq. (70), mentre  $k \equiv 0$  corrisponde all'Eq. (9), la specificazione  $k \equiv 1$  dà

$$\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x). \quad (70.1)$$

Prevedibilmente, il prolungamento analitico di  $\Gamma'(x)$  all'intervallo  $(-m, -m+1) \subset \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ , richiede che l'Eq. (67) sia modificata in conformità all'Eq. (28), i.e.,

$$\Gamma'(x) = \left( -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \right) \frac{\Gamma(x+m)}{(x)_m}, \quad (71)$$

risultando, comunque,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n(n+x)) < +\infty$ , e.g., per il *Criterio di Raabe*. □

Ora, come riferimento preliminare per eventuali questioni relative alla convessità di  $\Gamma(x)$  in  $\mathbb{R}^+$ , può rivelarsi utile disporre di un'espressione per  $\Gamma''(x)$  prontamente utilizzabile.

Derivando l'Eq. (67) termine-a-termine, si trova

$$\begin{aligned} \Gamma''(x) &= \left( \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right) \Gamma(x) + \left( -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \right) \Gamma'(x) \\ &= \left( \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right) \Gamma(x) + \left( -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \right)^2 \Gamma(x) \\ &= \left( \left( \gamma + \frac{1}{x} \right)^2 + \frac{1}{x^2} - 2(\gamma x + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} + x^2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right) \Gamma(x), \end{aligned} \quad \Downarrow (72)$$

pseudo-proporzionale a  $\Gamma(x)$ , come per il caso di  $\Gamma'(x)$ .

Anche l'ultima sommatoria nell'Eq. (72) è legittima, per il *Criterio di Weierstrass*, rispetto alla commutazione con l'operazione di derivazione generatrice, risultando definitivamente,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $1/(n+x)^2 < 1/(n(n+x)) (< 1/n^2)$ . In particolare, quando  $x \equiv p \in \mathbb{Z}^+$ , si trova, in parallelo con l'Eq. (68), il valore della somma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^2}. \quad (73)$$

Il prolungamento di  $\Gamma''(x)$  all'intervallo generico  $(-m, -m+1) \subset \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$ , per cui  $m \in \mathbb{Z}^+$ , richiede la modifica prevedibile dell'Eq. (72) nella forma *convergente* (e.g., con il *Criterio di Raabe*)

$$\begin{aligned} \Gamma''(x) &= \left( \left( \gamma + \frac{1}{x} \right)^2 + \frac{1}{x^2} - 2(\gamma x + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} + \right. \\ &\quad \left. \Downarrow + x^2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right) \frac{\Gamma(x+m)}{(x)_m}. \end{aligned} \quad (74)$$

□

Infine, dalla successione (56), si origina la 3<sup>a</sup> *Proprietà Fondamentale* della *Funzione  $\Gamma$* , quella di *Moltiplicazione* vs l'argomento (v. [18], p. 149), e che costituisce una generalizzazione di quella di *Duplicazione*, Eq. (45). L'enunciato operativo della 3<sup>a</sup> Proprietà è il seguente:

**Proposizione**

Sia  $p \in \mathbb{Z}^+$ . Allora, vale l'identità

$$\Gamma(px) = \frac{p^{px-1/2}}{(2\pi)^{(p-1)/2}} \prod_{k=0}^{p-1} \Gamma(x+k/p). \blacktriangle \quad (75)$$

**Dimostrazione**

Si può procedere riconoscendo che la quantità ausiliaria

$$\Omega := \frac{p^{px-1}}{\Gamma(px)} \prod_{k=0}^{p-1} \Gamma(x+k/p) \quad (76)$$

non dipende da  $x$ , nonostante l'apparenza.

Infatti, dall'Eq. (56), per  $n \rightarrow +\infty$ , si ha

$$g_n(x) \equiv \frac{n}{x+n} \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n} \sim \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n}.$$

Quindi, dalla definizione alternativa evidente

$$\Gamma(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n},$$

segue l'equivalenza delle rappresentazioni-limite seguenti:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{p^{px-1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)!n^{px}}{(px)_n}} \prod_{k=0}^{p-1} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)!n^{x+k/p}}{(x+k/p)_n} \right) \\ &\equiv \frac{p^{px-1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(pn-1)!(pn)^{px}}{(px)_{pn}}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( ((n-1)!)^p n^{px} \frac{\prod_{k=0}^{p-1} n^{k/p}}{\prod_{k=0}^{p-1} (x+k/p)_n} \right) = \dots \\ &\quad \text{(avendo eseguito la sostituzione } n \mapsto pn \equiv O(n) \text{ nel limite (i.e., in } \mathcal{U}(+\infty) \text{)} \\ &\quad \text{nel denominatore della prima frazione)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((n-1)!)^p (pn)_{pn} \cancel{(pn)_{pn}} n^{(p-1)/2} p^{-1}}{(pn-1)!(pn)_{pn} \prod_{k=0}^{p-1} (x+k/p)_n}, \end{aligned} \quad (76.1)$$

dopo aver operato, nel numeratore, la riduzione  $\prod_{k=0}^{p-1} n^{k/p} \equiv n^{(1/n)\sum_{k=0}^{p-1} k} = n^{(p-1)/2}$ .

Nella forma-limite (76.1), il prodotto di indice  $k$  può essere ridotto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{p-1} \left( x + \frac{k}{p} \right)_n &\equiv \prod_{k=0}^{p-1} \left( \frac{px+k}{p} \right)_n \\ &= \prod_{k=0}^{p-1} \left( \frac{px+k}{p} \left( \frac{px+k}{p} + 1 \right) \left( \frac{px+k}{p} + 2 \right) \dots \left( \frac{px+k}{p} + n-1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{p^{pn}} \prod_{k=0}^{p-1} ((px+k)(px+k+p)(px+k+2p) \dots (px+k+(n-1)p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \equiv \frac{1}{p^{pn}} \prod_{k=0}^{p-1} (px+k) \prod_{k=0}^{p-1} (px+p+k) \prod_{k=0}^{p-1} (px+2p+k) \dots \prod_{k=0}^{p-1} (px+(n-1)p+k) \\
 & = \frac{1}{p^{pn}} (px)_p (px+p)_p (px+2p)_p \dots (px+(n-2)p)_p (px+(n-1)p)_p \\
 & = (px)_{pn} / p^{pn}.
 \end{aligned} \tag{77}$$

Sostituendo il termine ottenuto dalla riduzione (77) nel limite (76.1) e semplificando, si arriva alla rappresentazione cercata di  $\Omega$  che, come anticipato, appare, in modo esplicito, *indipendente* da  $x$ :

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((n-1)!)^p n^{(p-1)/2} p^{pn-1}}{(pn-1)!} \neq \Omega(x). \tag{78.1}$$

Pertanto, il parametro  $\Omega$  è determinabile sostituendo un *qualsiasi* valore  $x > 0$  nell'Eq. (76). Un controllo di questa suggerisce la *scelta conveniente*  $x \equiv 1/p$ , con la quale, si ha

$$\begin{aligned}
 \Omega & \equiv \Omega(1/p) = \Gamma(1/p) \Gamma(2/p) \dots \Gamma((p-2)/p) \Gamma((p-1)/p) \\
 & \equiv \Gamma(1 - ((p-1)/p)) \Gamma(1 - ((p-2)/p)) \dots \Gamma(1 - 2/p) \Gamma(1 - 1/p) \\
 & \equiv \Omega(1 - 1/p).
 \end{aligned} \tag{78.2}$$

Allora, si può scrivere, in forma complementare, ricorrendo alla *Proprietà di Riflessione*, Eq. (16),

$$\begin{aligned}
 \Omega^2 & \equiv \Omega(1/p) \Omega(1 - 1/p) = \prod_{k=1}^{p-1} (\Gamma(k/p) \Gamma(1 - k/p)) \\
 & = \prod_{k=1}^{p-1} (\pi / \sin(k\pi/p)) \equiv \pi^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} \csc(k\pi/p).
 \end{aligned} \tag{79}$$

Ora, resta da calcolare il prodotto nel denominatore dell'Eq. (79).

Essendo le  $p$  radici in  $\mathcal{C}$  del polinomio  $z \mapsto A_{(p)}(z) := z^p - 1 \equiv (z-1)(z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1)$  esprimibili nella forma  $z_k = e^{i(2k\pi/p)} \equiv \cos(2k\pi/p) + i \sin(2k\pi/p)$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ , si può eseguire la divisione *esatta* per  $z-1 \neq 0$

$$\frac{A_{(p)}(z)}{z-1} = \sum_{k=1}^p z^{k-1} = \prod_{k=1}^{p-1} (z - (\cos(2k\pi/p) + i \sin(2k\pi/p))). \tag{80}$$

Ora, nel limite  $z \rightarrow 1$ , l'Eq. (80) dà

$$\begin{aligned}
 p & = \prod_{k=1}^{p-1} ((1 - \cos(2k\pi/p)) + i \sin(2k\pi/p)) = \prod_{k=1}^{p-1} (2(\sin(k\pi/p))^2 - 2i \sin(k\pi/p) \cdot \cos(k\pi/p)) \\
 & = 2^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} (\sin(k\pi/p) - i \cos(k\pi/p)) \sin(k\pi/p) \\
 & \equiv 2^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} (\cos((k\pi/p) - \pi/2) - i \sin((k\pi/p) - \pi/2)) \sin(k\pi/p) \\
 & = 2^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} (e^{i(k\pi/p - \pi/2)} \sin(k\pi/p)) \\
 & = 2^{p-1} \left( \prod_{k=1}^{p-1} \sin(k\pi/p) \right) e^{(i\pi/p) \sum_{k=1}^{p-1} k} e^{-i(p-1)\pi/2} = 2^{p-1} \left( \prod_{k=1}^{p-1} \sin(k\pi/p) \right) \underbrace{e^{i(p-1)\pi/2} e^{-i(p-1)\pi/2}}_{\equiv 1},
 \end{aligned}$$

i.e., risolvendo rispetto al prodotto goniometrico, risulta

$$\prod_{k=1}^{p-1} \sin(k\pi/p) = 2^{1-p} p. \quad (81)$$

Con il risultato (81), si ottiene, dall'Eq. (79),

$$\Omega = (2\pi)^{(p-1)/2} p^{-1/2}, \quad (82)$$

senza ambiguità di segno nell'estrazione di radice poiché è  $\Omega(1/p) > 0$ .

Infine, eliminando  $\Omega$  tra le Eq.i (76) e (82) e risolvendo vs.  $\Gamma(px)$ , la **Proposizione (75)** resta dimostrata. ■

La **Proprietà di Moltiplicazione** della *Funzione  $\Gamma$*  è, a sua volta, generatrice di varie relazioni utili attraverso la *derivata logaritmica* di  $\Gamma(px)$ , calcolata con l'Eq. (75),

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(px) \equiv p \frac{\Gamma'(px)}{\Gamma(px)} = p \ln p + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\Gamma'(x+k/p)}{\Gamma(x+k/p)}. \quad (83)$$

### Applicazione

In modo analogo all'Eq. (69), come caso particolare della più generale Eq. (67), si determini una rappresentazione iterativa di  $\Gamma'(m+1/2)$ , con  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

### Soluzione

Con  $p \equiv 2 \wedge x \equiv 1/2$ , l'Eq. (83) fornisce l'uguaglianza

$$2 \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 2 \ln 2 + \frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)},$$

da cui, con la sostituzione dei valori noti  $\Gamma(1) \equiv 1$ ,  $\Gamma(1/2) \equiv \pi^{1/2}$  e  $\Gamma'(1) \equiv -\gamma$ , si trova che

$$\Gamma'(1/2) = -(\gamma + 2 \ln 2) \pi^{1/2}. \quad (83.1)$$

Poi, quando  $x \in \{m+1/2\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ , l'Eq. (70.1) fornisce i risultati iniziali seguenti mediante le Eq.i (83.1), e (14.1):

$$\begin{aligned} \Gamma'(3/2) &\equiv \Gamma'(1+1/2) = (1/2) \Gamma'(1/2) + \Gamma(1/2) \\ &= (-\gamma - 2 \ln 2 + 2) \frac{1}{2} \pi^{1/2}; \end{aligned} \quad (83.2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma'(5/2) &\equiv \Gamma'(2+1/2) \equiv \Gamma'(3/2+1) = (3/2) \Gamma'(3/2) + \Gamma(3/2) \\ &= \dots = (-\gamma - 2 \ln 2 + 2(1+1/3)) \frac{3}{2^2} \pi^{1/2}; \end{aligned} \quad (83.3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma'(7/2) &\equiv \Gamma'(3+1/2) \equiv \Gamma'(5/2+1) = (5/2) \Gamma'(5/2) + \Gamma(5/2) \\ &= \dots = (-\gamma - 2 \ln 2 + 2(1+1/3+1/5)) \frac{5 \cdot 3}{2^3} \pi^{1/2}; \end{aligned} \quad (83.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma'(9/2) &\equiv \Gamma'(4+1/2) \equiv \Gamma'(7/2+1) = (7/2) \Gamma'(7/2) + \Gamma(7/2) \\ &= \dots = (-\gamma - 2 \ln 2 + 2(1+1/3+1/5+1/7)) \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{2^4} \pi^{1/2}. \end{aligned} \quad (83.5)$$

$$\Gamma'(11/2) \equiv \Gamma'(5+1/2) \equiv \Gamma'(9/2+1) = (9/2) \Gamma'(9/2) + \Gamma(9/2)$$

$$= \dots = (-\gamma - 2\ln 2 + 2(1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9)) \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{2^5} \pi^{1/2}. \quad (83.6)$$

Pertanto, un facile controllo lascia emergere evidente, per induzione, la rappresentazione generale cercata, insieme con due sue varianti:

$$\Gamma'(m + 1/2) = \left( -\gamma - 2\ln 2 + 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} \right) \frac{(2m-1)!!}{2^m} \pi^{1/2} \quad (84)$$

$$\equiv \left( -\gamma - 2\ln 2 + 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} \right) \Gamma(m + 1/2), \quad (84.1)$$

dall'Eq. (14.1),

$$\equiv \left( -\gamma - 2\ln 2 + 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} \right) \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \pi^{1/2}, \quad (84.2)$$

anticipando l'Eq. (156), p. 65.

È fuori discussione che, nei problemi computazionali e nelle indagini numeriche più complesse, la forma fattorizzata di Weierstrass (59) della *Funzione  $\Gamma$* , insieme con la sua *derivata logaritmica* (65), siano strumenti di maneggevolezza ed efficacia notevoli. In particolare, come si vedrà nel prossimo capitolo, la seconda può essere molto difficilmente sopravvalutata in sede applicativa. ■

#### Esercizio 1

Si verifichino le rappresentazioni integrali seguenti della *Costante di Euler-Mascheroni*:

$$\gamma = - \int_0^1 \ln(-\ln t) dt \equiv - \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\ln t)}{t^2} dt.$$

#### Esercizio 2

Si verifichi che,  $\forall \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\alpha x)}{\Gamma(\beta x)} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

#### Esercizio 3

Dal confronto tra l'Eq. generale (67), nella quale si sostituisca  $x \equiv m + 1/2$ , con  $m \in \mathbb{Z}^+$ , e l'Eq. (84.2), si provi che vale la somma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+2m+1)} = \frac{2}{2m+1} \left( -\ln 2 + \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1} \right).$$

#### Esercizio 4

Sia  $w \in \tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ . Si prolunghi in  $\tilde{\mathcal{C}}$  ( $x \mapsto w := x + iy$ ) la rappresentazione *fondamentale* (59) di  $\Gamma$ , costruendo la funzione *meromorfa*

$$w \mapsto \Gamma(w) \equiv \Gamma(x + iy) := \frac{e^{-\gamma w}}{w} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{w/n}}{w + n}.$$

Quindi, applicando *formalmente* l'Eq. (59) a ciascun termine del rapporto  $\Gamma(w)/\Gamma(x)$ , si verifichi l'espressione della funzione-modulo

$$(x; y) \mapsto z(x, y) \equiv |\Gamma(w)| = |\Gamma(x)| \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}\right)^{-1/2} \left(\equiv \left|\int_0^{+\infty} t^{w-1} e^{-t} dt\right|\right). \quad (\dagger)$$

**Esercizio 5**

Prolungando  $\Gamma$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ , i.e.,  $\Gamma(x) \mapsto \Gamma(w) \equiv \Gamma(x + iy)$ , se ne verifichi la rappresentazione *mista generale separata* di  $\Re\Gamma(w)$  vs.  $i\Im\Gamma(w)$ , mostrando i passaggi:

$$\Gamma(w) \equiv \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-\gamma(x^2+nx-y^2)} \cos \alpha_n}{((x^2+y^2)((x+n)^2+y^2))^{1/2}} + i \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-\gamma(x^2+nx-y^2)} \sin \alpha_n}{((x^2+y^2)((x+n)^2+y^2))^{1/2}}, \quad (\ddagger)$$

in cui,  $\alpha_n \equiv \tan^{-1} \left( \frac{(x^2+nx-y^2) \sin((2x/n+1)y^2) - (2x+n)y \cos((2x/n+1)y^2)}{(x^2+nx-y^2) \cos((2x/n+1)y^2) + (2x+n)y \sin((2x/n+1)y^2)} \right) + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

La separazione  $(\ddagger)$  di  $\Gamma(w)$  agevola la programmazione grafica *distinta* delle superfici *reali*  $\Re\Gamma(w)$  e  $\Im\Gamma(w)$ .

**Esercizio 6**

Siano  $t_1$  e  $t_2$  le rette tangenti a *graf*( $\Gamma$ ), rispettivamente, nei punti di ascisse  $x = 1$  e  $x = 2$ .

Si verifichi che

6.1  $t_1 \cap t_2 \equiv (2 - \gamma; \gamma^2 - \gamma + 1)$  e che l'ampiezza dell'angolo *ottuso* tra  $t_1$  e  $t_2$  misura

$$\alpha \equiv \pi - \cot^{-1}(\gamma^2 - \gamma + 1) \approx 2.2181 \text{ rad} \approx 127^\circ 05' 17'';$$

6.2 si costruisca, con un procedimento classico qualsiasi (la Regola di *Simpson-3/8* o il metodo di *Newton-Cotes* o la Regola di *Boole*, etc.), l'integrazione *numerica* che determina l'area  $A$  del dominio limitato tra l'intervallo  $[1, 2] \subset X$  e *graf*( $\Gamma$ ), detto il dominio *normale* vs. l'asse  $X$ , mostrando che, in unità  $u$  arbitrarie,

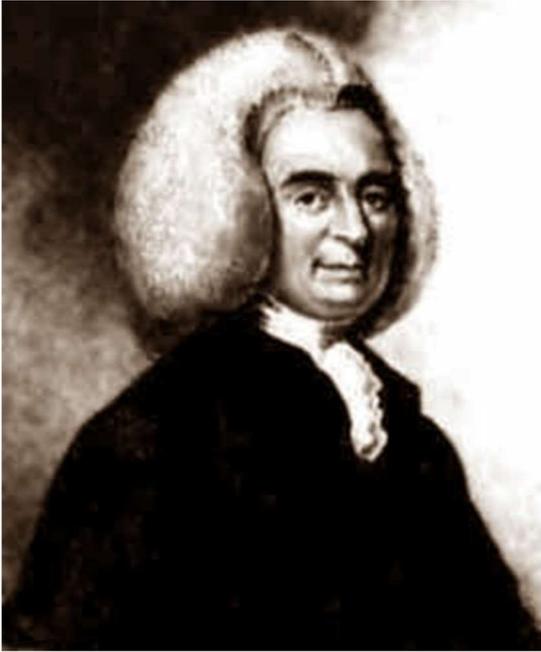
$$A \approx 0.92275 u^2.$$

Si confronti tale valore di  $A$  con quello ottenibile direttamente, e.g., con *Maxima*<sup>TM</sup> (v. [71]).



(†) Va sottolineato che la definizione della variabile di integrazione  $t$  è del tutto *indipendente* da quella del *parametro* nella rappresentazione integrale di  $\Gamma$ , sia esso reale,  $x$ , o complesso,  $w$ . Infatti,  $t \in \mathbb{R}^+$  è soltanto la generatrice *muta* di tale rappresentazione. Inoltre, com'è ovvio,  $x$  e  $y$  sono *indipendenti* tra loro in  $w$ .

La superficie modulare *graf*( $z$ ) è mostrata nelle Fig. I e II, alle P. I e II.



Colin Maclaurin (1698-1746)

capitolo V

**La Funzione DIGAMMA  
e le sue derivate**

Sia  $x \in \mathbb{R}^+$ . La funzione *derivata logaritmica* di  $\Gamma$ , indicata nella letteratura come la *Funzione  $\psi$*  o *Digamma* (v. grafico a p. 44), e della quale esiste una teoria completa, è già stata introdotta mediante le Eq.i (65) e (83), trovando alcune prime applicazioni. I suoi aspetti di maggior interesse consistono nel fatto che  $\psi$  e le sue derivate *ordinarie* successive, dette le *Funzioni Poligamma*, costituiscono strumenti efficaci e consolidati per il calcolo della somma di molte serie numeriche, insieme con la *Serie di Fourier*, la *Funzione Zeta di Riemann*,  $\zeta$ , e la *Funzione di Hurwitz*,  $\zeta_H$  (†). □

Riprendendo la rappresentazione (65),

$$\begin{aligned}
 x \mapsto \psi(x) &:= \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\
 &= -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}
 \end{aligned}
 \tag{85}$$

con una derivazione ammissibile termine-a-termine su un intervallo *compatto* opportuno, si ottiene la Funzione *Trigamma* (cf/c Eq. (73); v. grafico a P. 56),

$$x \mapsto \psi'(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} := \zeta_H(2, x). \quad (\dagger) \tag{86}$$

Inoltre, valgono le formule iterative seguenti (cf/c [9], TABLE 6.1, P. 267-270):

$$\psi(x+1) \equiv \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} \equiv \psi(x) + \frac{1}{x}, \tag{87}$$

con la traslazione  $x \mapsto x+1$  e dalle Eq.i (70.1) e (9); poi, tenendo presente l'Eq. (86), si ha

$$\psi'(x+1) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+(x+1))^2} \equiv \frac{1}{(x+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)+x)^2}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{1}{(x+1)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \psi'(x) - 1/x^2. \end{aligned} \tag{88}$$

Mediante induzione vs. l'indice  $n$  d'ordine della *Funzione Poligamma* generale,

$$x \mapsto \psi^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n \psi(x)}{dx^n} \equiv \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln \Gamma(x) \equiv (-1)^{n+1} n! \zeta_H(n+1, x), \tag{89}$$

vale la formula di *traslazione unitaria* dell'argomento,

$$\psi^{(n)}(x+1) \equiv \psi^{(n)}(x) + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \tag{89.1}$$

dalla quale, traslando  $x \mapsto x+n \equiv (x+(n-1))+1$  e iterando con l'Eq. (89.1), si ha ( $\psi^{(0)} \equiv \psi$ )

$$\psi^{(n)}(x+n) \equiv \psi^{(n)}(x) + (-1)^n n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+n-k)^{n+1}}. \tag{89.2}$$

**Proposizione**

Vale l'espansione di argomento *razionale*, per  $p/q \in (0, 1)$ , scoperta da Gauss,

$$\psi(p/q) = -\gamma - \frac{\pi}{2} \cot(\pi p/q) - \ln(2q) + \sum_{k=1}^{q-1} \cos(2k\pi p/q) \ln|\sin(k\pi/q)|. \tag{90}$$

Una dimostrazione di questa identità, talvolta utile, è riportata in [7]. ▲

**Esempio 1**

Si approssimi la somma  $\lambda_c$  della serie numerica (*Costante di Catalan*)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \equiv \sum_n u_n$ .

**Soluzione**

Si ha  $\sum_n u_n < \infty$ , poiché è anche  $\sum_n |u_n| < +\infty$ . Da ciò, segue che gli addendi di  $\sum_n u_n$  sono riordinabili in modo arbitrario *senza* alterarne la somma.

Pertanto,

$$\begin{aligned} \sum_n u_n &= 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \dots - \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{19^2} + \dots \right) \\ &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} - \left( \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2} \right) \\ &= \frac{8}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2}. \end{aligned} \tag{91}$$

Ritornando all'Eq. (86), questa dà  $\psi'(1/4) = 16 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1/4)^2}$  ovvero, in modo equivalente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} = \frac{1}{16} \psi'(1/4) - 1. \tag{92}$$

Analogamente, risulta  $\psi'(3/4) = \frac{16}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3/4)^2}$ , da cui viene che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2} = \frac{1}{16} \psi'(3/4) - \frac{1}{9}. \quad (93)$$

Sostituendo le espressioni delle sommatorie (91) e (92) nell'Eq. (90), si ottiene

$$\lambda_c := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{16} (\psi'(1/4) - \psi'(3/4)) \approx 0.91596\ 55941\ 77219\ 01505. \quad (94)$$

L'approssimazione della somma della serie (91),  $\lambda_c$ , nota come la *Costante di Catalan* (v. [36]), è stata eseguita introducendo, nell'Eq. (88), i valori necessari della *Funzione  $\psi'$  (Trigamma)* forniti, e.g., in [9], TABLE 6.1, P. 267-270, per  $x \in [1, 2]$ , od ottenibili facilmente con *Maxima*<sup>fr-sfwr</sup> (v. [68]).  $\square$

Il passo successivo consiste nel determinare l' $\mathcal{M}$ -espansione (Maclaurin) in  $\mathbb{R}$  della funzione  $x \mapsto \ln \Gamma(x+1)$  in termini di *Funzioni  $\zeta$  di Riemann* e il dominio di tale rappresentazione.

Dopo aver predisposto l'uguaglianza formale

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{dx^n} \ln \Gamma(x+1) \right) \Bigg|_{x=0} x^n \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-1)}(1)}{n!} x^n, & (\psi^{(0)}(x) \equiv \psi(x)), \\ &= \psi^{(0)}(1) x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-1)}(1)}{n!} x^n \equiv \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-1)}(1)}{n!} x^n \\ &= -\gamma x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-1)}(1)}{n!} x^n, \end{aligned} \quad (95)$$

derivando  $n-1$  volte l'Eq. fondamentale (85) e commutando ovunque, lecitamente, le operazioni di derivazione e di somma infinita, si calcola

$$\begin{aligned} \psi^{(n-1)}(x) &\equiv \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \psi(x) \equiv \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(k+x)^n} \\ &\equiv (-1)^n (n-1)! \left( \frac{1}{x^n} + \left( -\frac{1}{x^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1+x)^n} \right) \right), \end{aligned}$$

pervenendo, con la traslazione  $n \mapsto n+1$ , alla formula generale

$$\psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1+x)^{n+1}}, \quad (96)$$

la quale, assegnando  $x \equiv 1$ , dà luogo all'identità numerica importante

$$\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \equiv (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1). \quad (96.1)$$

Pertanto, il risultato espresso dall'Eq. (95) corrisponde alla forma

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x+1) &= -\gamma x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) x^n \\ &\equiv -\gamma x + \sum_n c_n x^n. \end{aligned} \tag{97}$$

Osservato che la somma  $S_\rho := \zeta(n) \in (1, \pi^2/6]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ , e che la successione  $\{\zeta(n)\}$  è decrescente verso il valore-limite  $1^+$ , il calcolo del raggio  $\rho$  di convergenza di  $\sum_n c_n x^n$  dà

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n/c_{n+1}| \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(n)/n}{\zeta(n+1)/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+1/n) \frac{\zeta(n)}{\zeta(n+1)} = 1^+.$$

Inoltre, per  $x = -1$ ,  $\sum_n c_n x^n$  si riduce alla serie numerica  $\sum_{n=2}^{+\infty} \zeta(n)/n$ . Se a questa si applica, e.g., il *Criterio di Condensazione* (sia quello del *rapporto* che quello della *radice* si rivelano inefficaci), essendo la successione  $\{\zeta(n)/n\}$  decrescente e infinitesima, è *necessario e sufficiente* determinare il carattere della serie numerica *estratta*  $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n (\zeta(2^n)/2^n) \equiv \sum_{n=2}^{+\infty} \zeta(2^n)$ :

poiché  $\zeta(2^n) > 1 \forall n$ , segue che  $\sum_{n=2}^{+\infty} \zeta(2^n)$  diverge e, quindi, *anche*  $\sum_{n=2}^{+\infty} \zeta(n)/n$  diverge.

Invece, per  $x = 1$ , risulta che  $\sum_n c_n x^n \equiv \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \zeta(n)/n$ , la cui convergenza è verificata prontamente mediante il *Criterio di Leibniz*. La somma di questa serie è  $\gamma$ , v. **Esercizio 2**.

Pertanto, la rappresentazione in serie di potenze (97) vale solo nell'intervallo semi-aperto  $(-1, 1]$ . È interessante osservare che tale intervallo è lo stesso di quello per l' $\mathcal{M}$ -espansione della funzione  $x \mapsto \ln(1+x)$ . A tale proposito, si veda l'**Esercizio 7.1**, P. 52. ■

Come è prevedibile, l'applicazione della derivazione logaritmica a *prodotti* di Funzioni  $\Gamma$  porta a risultati interessanti, soprattutto per applicazioni nell'ambito dell'approssimazione numerica.

**Esempio 2**

La derivazione logaritmica completa dell'Eq. (16), eseguita per  $x \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} d \ln(\Gamma(x) \Gamma(1-x))/dx &= d \ln \Gamma(x)/dx + d \ln \Gamma(1-x)/dx \equiv \psi(x) - \psi(1-x) \\ &= d \ln(\pi \csc \pi x)/dx = -\pi \cot \pi x, \end{aligned}$$

genera l'uguaglianza

$$\pi \cot \pi x = \psi(1-x) - \psi(x), \tag{98.1}$$

la quale, con la sostituzione  $x \mapsto x/\pi$ , i.e., per  $x \in (0, \pi)$ , si riscrive nella forma

$$\pi \cot x = \psi(1-x/\pi) - \psi(x/\pi). \tag{98.2}$$

Quindi, con l'Eq. (85), l'Eq. (98.2) è equivalente all'espansione in serie *uniformemente convergente* di funzioni razionali

$$\cot x = (\pi - 2x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n(n+1) + x(\pi - x)}. \tag{98.3}$$

Procedendo in modo analogo, si calcola, dall'Eq. (26), per  $|x| < 1/2$ ,

$$\frac{d}{dx} \ln(\Gamma(1/2+x) \Gamma(1/2-x)) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(1/2+x) + \frac{d}{dx} \ln \Gamma(1/2-x)$$

$$\equiv \psi(1/2 + x) - \psi(1/2 - x) = \frac{d}{dx} \ln(\pi \sec \pi x) = \pi \tan \pi x ,$$

pervenendo all'uguaglianza

$$\pi \tan \pi x = \psi(1/2 + x) - \psi(1/2 - x), \tag{99.1}$$

equivalente, con la sostituzione  $x \mapsto x/\pi$ , i.e., per  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , alla forma

$$\pi \tan x = \psi(1/2 + x/\pi) - \psi(1/2 - x/\pi). \tag{99.2}$$

Ancora mediante l'Eq. (85), l'Eq. (99.2) si riduce all'espansione uniformemente convergente

$$\tan x = 8x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2 - 4x^2} . \tag{99.3}$$

■

La *Funzione  $\psi$*  mostra un altro aspetto di grande interesse nella varietà delle sue *rappresentazioni integrali*, utili sia nello studio di sviluppi in serie correlati sia nelle convoluzioni di trasformate relative alla soluzione di certe equazioni differenziali e integrali sia nella *Teoria dei Numeri*.

L'Integrale generalizzato di *Frullani* (v. [37],[38],[39]),

$$\int_0^{+\infty} \frac{F(bu) - F(au)}{u} du = \left( \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) - \lim_{u \rightarrow 0^+} F(u) \right) \ln(b/a), \tag{100}$$

per il quale,  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$  ed è integrabile in  $\mathbb{R}^+$  in senso generalizzato e  $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^+$ , fornisce una rappresentazione di  $\ln(a/b)$  quando  $F(u) \equiv e^{-u}$  (v. **Esercizio 13**, P. 54),

$$\ln(a/b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} du . \tag{100.1}$$

Ora, mediante le Eq.i (7) e (100.1), nella quale siano  $a \equiv 1 \wedge b \equiv t$ , si scrive

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt \equiv \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-tu}}{u} du \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( e^{-u} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(u+1)t} dt \right) \frac{du}{u} \\ &\quad \text{(dopo lo scambio (ammissibile) dell'ordine delle integrazioni)} \\ &= \Gamma(x) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_0^{+\infty} \frac{du}{u} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(u+1)t} dt . \end{aligned} \tag{101}$$

Se, per il  $t$ -integrale interno all'integrale doppio nell'Eq. (101), si esegue la trasformazione, parametrica in  $u$ ,  $t \equiv t(w) \mapsto w/(u+1)$ , risulta  $dt = dw/(u+1)$ ; comunque, si osserva che non ha luogo alcun cambiamento vs. il dominio di  $t$ -integrazione. Pertanto,

$$\begin{aligned} \Gamma'(x) &= \Gamma(x) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_0^{+\infty} \frac{du}{u} \int_0^{+\infty} \left( \frac{w}{u+1} \right)^{x-1} e^{-w} \frac{dw}{u+1} \\ &= \Gamma(x) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \Gamma(x) \int_0^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)^x} \end{aligned}$$

$$\equiv \Gamma(x) \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-u}}{u} - \frac{1}{u(u+1)^x} \right) du,$$

da cui, si deduce la 1<sup>a</sup> rappresentazione integrale di  $\psi(x)$ ,

$$\psi(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-u}}{u} - \frac{1}{u(u+1)^x} \right) du. \quad (102)$$

Il confronto tra le Eq.i (102) e (66.1), indica, per  $x = 1$ , che

$$\gamma \equiv -\psi(1) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{u(u+1)} - \frac{e^{-u}}{u} \right) du. \quad (103)$$

Quindi, seguendo Gauss (v. [1<sup>8</sup>], p. 159), si può riscrivere l'Eq. (102) nella forma equivalente

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)^x} \right). \quad (104)$$

e sostituire  $u := e^{\tau} - 1$  nel secondo addendo dell'Eq. (102), determinando la trasformazione  $\int_{\varepsilon}^{+\infty} (du) \mapsto \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty} (e^{\tau} d\tau)$  dell'operatore integrale corrispondente. L'Eq. (104) diventa, allora,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty} \frac{e^{-x\tau}}{1-e^{-\tau}} d\tau \right) \\ &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\varepsilon}^{\ln(1+\varepsilon)} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{1-e^{-u}} du \right), \end{aligned} \quad (105)$$

nel cui terzo integrale, la variabile (muta) precedente di integrazione,  $\tau$ , è stata rinominata  $u$ .

Per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , il primo integrale nell'Eq. (105) tende a  $0^+$ ; i termini rimanenti generano la 2<sup>a</sup> rappresentazione integrale di  $\psi(x)$ , detta di Gauss,

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-xu}}{1-e^{-u}} \right) du. \quad (106)$$

Ancora, dal confronto con l'Eq. (66.1), l'Eq. (106) fornisce, per  $x \equiv 1$ , un'espressione integrale alternativa ulteriore per la costante di Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left( \frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} \right) du. \quad (107)$$

Quindi, la 3<sup>a</sup> rappresentazione integrale di  $\psi(x)$  viene generata sommando membro-a-membro le Eq.i (106) e (107). Si ottiene

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{1-e^{-u}} du. \quad (108)$$

Infine, se si definisce  $u := -\ln \xi$ , al quale, segue la trasformazione  $\int_0^{+\infty} (du) \mapsto \int_1^0 (-d\xi/\xi)$  dell'operatore integrale, l'Eq. (108) muta nella 4<sup>a</sup> rappresentazione integrale di  $\psi(x)$ :

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \xi^{x-1}}{1 - \xi} d\xi. \quad (109)$$

Dal confronto tra le Eq.i (108), (109) e (85), si deduce immediatamente un'espansione in serie di funzioni razionali per i due integrali equivalenti precedenti,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{1 - e^{-u}} du \equiv \int_0^1 \frac{1 - u^{x-1}}{1 - u} du = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}. \quad (110)$$

Tale sviluppo è valido  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .

■

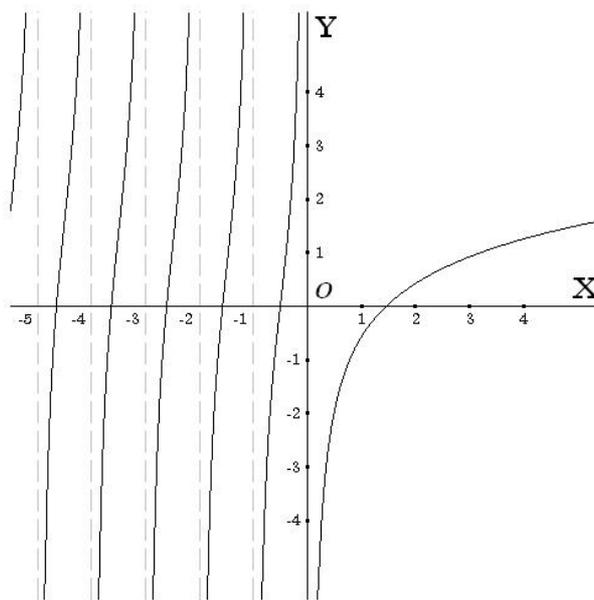


Fig. 3 - Grafico della *Funzione Digamma*,  $x \mapsto \psi(x)$



*Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855)*

### Le rappresentazioni di Binet di $\ln \Gamma(x)$

La traslazione di variabile  $x \mapsto x+1$  trasforma la rappresentazione integrale di Gauss della Funzione Digamma, Eq. (106) (Fig. 3, p. 44), in

$$\begin{aligned} \psi(x+1) &\equiv \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} \equiv \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-(x+1)u}}{1-e^{-u}} \right) du = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-xu}}{e^u-1} \right) du \\ &\equiv \int_0^{+\infty} \left( \left( \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-xu}}{u} \right) + \frac{e^{-xu}}{2} - \left( \frac{e^{-xu}}{e^u-1} - \frac{e^{-xu}}{u} + \frac{e^{-xu}}{2} \right) \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{u} du + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xu} du - \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) e^{-xu} du. \end{aligned}$$

Per mezzo dell'integrale logaritmico di Frullani (100.1), si può scrivere, allora,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} - \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) e^{-xu} du. \quad (111)$$

L'integrale generalizzato nell'Eq. (111) è convergente. Infatti, definita l'applicazione

$$u \mapsto \mathcal{B}(u) := \frac{1}{u} \left( \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right), \quad (112)$$

nota come la *Funzione di Binet* (si verifichi che è una funzione pari), risulta, in  $\mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u) &\equiv \frac{(u-2)e^u + u + 2}{2u^2(e^u-1)} \\ &= \frac{(u-2)(1+u+u^2/2+u^3/6+u^4/24+u^5/120+o(u^5)) + u + 2}{2u^2((1+u+u^2/2+u^3/6+o(u^3))-1)} \\ &= \frac{(u^3/6)(1+u/2+(3/20)u^2+o(u^2))}{2u^3(1+u/2+u^2/6+o(u^2))} \\ &\equiv \frac{1}{12} \frac{1+u/2+(1/6-1/60)u^2+o(u^2)}{1+u/2+(1/6)u^2+o(u^2)} \xrightarrow{u \rightarrow 0^\pm} (1/12)^-, \end{aligned} \quad (112.1)$$

mentre, in  $\mathcal{U}(+\infty)$ , si vede subito che  $\mathcal{B}(u) = o(1)$ . Ora, insieme con l'identità formale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)} dt = \ln \Gamma(x+1) \equiv \ln(x\Gamma(x)) = \ln x + \ln \Gamma(x), \quad (113)$$

integrando i membri dell'Eq. (111) da 1 a  $x \in \mathbb{R}^+$ , si calcola

$$\int_1^x \frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)} dt = \int_1^x \ln t dt + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x dt \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) e^{-tu} du = \dots$$

(con uno scambio (lecito) tra le  $t$ - e  $u$ -integrazioni nell'integrale doppio precedente)

$$= x \ln x - x + 1 + \frac{1}{2} \ln x - \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \left( -e^{-tu}/u \Big|_{t=1}^x \right) du$$

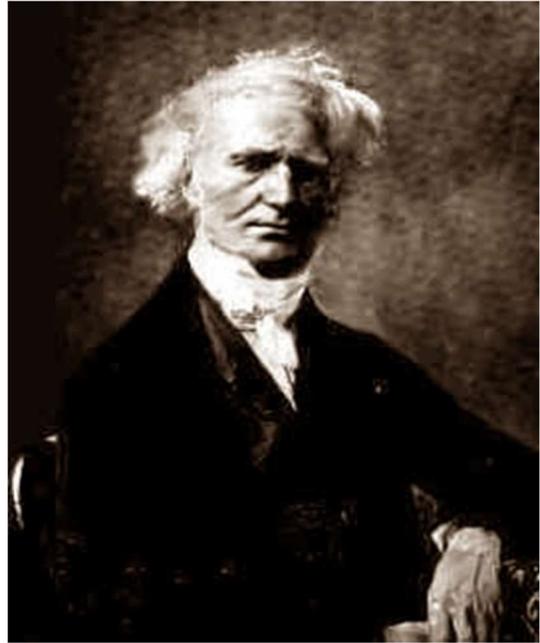
$$= (x + 1/2) \ln x - x + 1 + \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-xu} - e^{-u}}{u} du. \quad (114)$$

Uguagliando i membri destri delle equazioni (113) e (114), si perviene alla 1<sup>a</sup> rappresentazione di Binet di  $\ln \Gamma(x)$ , nella forma semi-integrale in cui essa fu presentata originariamente (v. [39]):

$$\ln \Gamma(x) = (x - 1/2) \ln x - x + 1 + \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-xu} - e^{-u}}{u} du \quad (115)$$

$$\equiv (x - 1/2) \ln x - x + 1 + \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-xu} du - \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-u} du. \quad (115.1)$$

*Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856)*



Circa mezzo secolo più tardi (1888), A. Pringsheim (v. [41]) riuscì a ridurre ulteriormente l'Eq. (115) con una manovra di 'mestiere consumato', tanto nitida quanto esemplare e istruttiva:

definiti gli integrali

$$M := \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-u/2} du \quad \text{e} \quad N := \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-u} du \equiv \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u/2) e^{-u/2} du \quad (115.1.1)$$

nell'Eq. (115.1), si determina la differenza  $M - N \equiv \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-u/2}}{u} - \frac{1}{e^u - 1} \right) \frac{du}{u}$  e, quindi,

$$\begin{aligned} M &\equiv (M - N) + N = \int_0^{+\infty} \left( \left( \frac{e^{-u/2}}{u} - \frac{1}{e^u - 1} \right) + \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) e^{-u} \right) \frac{du}{u} \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-u/2} - e^{-u}}{u^2} - \frac{e^{-u}}{2u} \right) du. \end{aligned} \quad (116)$$

D'altra parte, si osserva che  $\frac{d}{du} \frac{e^{-u/2} - e^{-u}}{u} = \frac{2e^{-u} - e^{-u/2}}{2u} - \frac{e^{-u/2} - e^{-u}}{u^2}$ , i.e., che

$$\frac{e^{-u/2} - e^{-u}}{u^2} \equiv -\frac{d}{du} \frac{e^{-u/2} - e^{-u}}{u} + \frac{2e^{-u} - e^{-u/2}}{2u}. \quad (117)$$

Mediante l'Idn. (117), l'integrale (116) diventa

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{+\infty} \left( \left( -\frac{d}{du} \frac{e^{-u/2} - e^{-u}}{u} \right) + \frac{2e^{-u} - e^{-u/2}}{2u} - \frac{e^{-u}}{2u} \right) du \\
 &= \frac{e^{-u} - e^{-u/2}}{u} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-u/2}}{u} du = \frac{1}{2}(1 - \ln 2),
 \end{aligned} \tag{118.1}$$

ricorrendo ancora all'Integrale logaritmico di *Frullani*, Eq. (100.1).

Ora, dalle Eq.i (115.1) e (115.1.1), si esprime il valore particolare

$$\ln \Gamma(1/2) = 1/2 + \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-u/2} du - \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-u} du \equiv 1/2 + M - N = 1 - (1/2)\ln 2 - N,$$

dal quale, si deduce che

$$N = 1 - (1/2)\ln 2 - \ln \Gamma(1/2) = 1 - (1/2)\ln(2\pi). \tag{118.2}$$

Pertanto, l'introduzione del valore di  $N$  nell'Eq. (115) genera la  $I^a$  rappresentazione semi-integrale di BINET-PRINGSHEIM di  $\ln \Gamma(x)$ ,

$$\begin{aligned}
 \ln \Gamma(x) &= \ln((2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x}) + \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-xu}}{u} du \\
 &\equiv \ln((2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x}) + \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-xu} du.
 \end{aligned} \tag{119}$$

*Alfred Pringsheim* (1850-1941)

Sia  $x \gg 1$ . L'Eq. (112.1) implica che

$$\sup_{\mathbb{R}} \mathcal{B}(u) = \frac{1}{12};$$

allora, poiché vale definitivamente la disuguaglianza

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{B}(u) e^{-xu} du < \frac{1}{12} \int_0^{+\infty} e^{-xu} du = \frac{1}{12x}, \tag{120}$$

l'Eq. (119) lascia emergere il comportamento *asintotico*

$$\ln \Gamma(x) \sim \ln((2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x}) + \frac{1}{12x}. \tag{121}$$

Esponenziando il complesso dei termini in ciascuno dei membri dell'uguaglianza asintotica (121), eseguendo la traslazione  $x \mapsto x+1$  e trascurando, infine, gli addendi di ordine  $\leq -2$  per  $x \gg 1$ , si trova

$$\Gamma(x+1) \sim (x+1)^{x+1/2} e^{-x} (2\pi)^{1/2} e^{1/(12x)} \sim (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x} (1 + 1/(12x)), \tag{121.1}$$

che corrisponde alla somma arrestata ai primi due termini della celeberrima espansione asintotica di *Stirling-De Moivre* (S-DM). A questa, è dedicato il capitolo VI.



■

Con la rappresentazione in serie della *Funzione Trigamma*, Eq. (86) (v. Fig. 4, P. 56),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \psi'(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x), \quad (122)$$

si ripropone la questione del calcolo della somma di una serie convergente qualsiasi. Poiché una rappresentazione numerica *chiusa* di tale somma è ottenibile molto di rado, ci si deve accontentare, in generale, del valore approssimato a una sua somma ridotta  $n$ -sima opportuna *più* una *stima* del resto corrispondente,  $R_n \equiv o(1)$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Il problema della trasformazione di un integrale in una serie è fondamentale e ben noto in Analisi Matematica. Di gran lunga *più arduo* è il problema inverso, quello della riconduzione di una serie a rappresentazione integrale. In tale caso, un approccio generale (il più delle volte, l'*unico* praticabile) e diretto rende l'integrazione in  $\mathcal{C}$  una strada obbligata e, probabilmente, *senza alternativa*.

Tra i metodi classici *numerici* più efficaci per la rappresentazione di una serie in termini di integrali, va ricordato quello espresso dalla pure celebre *Formula di Euler-Mclaurin* (v., e.g.: [5], CAP. 8, P. 281; [6], CAP. 1; [42], VOL. II, P. 455), nei coefficienti della quale, compaiono i *Numeri di Bernoulli* e le restrizioni all'intervallo  $[0, 1)$  dei *Polinomi di Bernoulli*.

Alternativo al precedente ma non meno importante, è disponibile il metodo *analitico* basato sulla *Formula di Plana-Abel* (v. [43], [44]; si vedano, anche, [5], CAP. 8, P. 290, e [42], VOL. I, P. 274).

Questo secondo metodo richiede l'integrazione in  $\mathcal{C}$  mediante il calcolo dei residui ai poli della funzione analitica pertinente; tra l'altro, se ne può mostrare la connessione con il metodo generatore della *Formula di Euler-Mclaurin* (v. [5]).

□

L'applicazione (in  $\mathcal{C}$ , dunque) della *Formula di Plana-Abel* alla serie (121) fornisce, nel limite  $R_n = o(1)$  e con la restrizione  $\Im m z \equiv 0$  ( $z \equiv x + iy$ ), il risultato preliminare seguente, *esatto* in  $\mathbb{R}$  (cf/c [1], P. 250 e [42], VOL. II, P. 38-42),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{4xt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + x^2)^2} dt. \quad (123)$$

Essendo *legittimo* e *sufficiente* (v. [1]) integrare da 1 a  $x \in \mathbb{R}^+$  le quantità contenute nei membri dell'Eq. (123) e tenendo come riferimento l'Eq. (122), si può iniziare scrivendo

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) du &= \frac{d}{du} \ln \Gamma(u) \Big|_1^x \equiv \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} \Big|_1^x = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) + \gamma \equiv \psi(x) + \gamma \quad (124) \\ &= \int_1^x \left( \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{u} \right) du + \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} \frac{4ut}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + u^2)^2} dt = \dots \end{aligned}$$

con una permutazione lecita tra le  $t$ - e  $u$ -integrazioni nell'integrale doppio

$$\begin{aligned} &= \left( -\frac{1}{2u} + \ln u \right) \Big|_1^x + \int_0^{+\infty} \frac{2t}{e^{2\pi t} - 1} dt \int_1^x \frac{2u}{(t^2 + u^2)^2} du \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} + \ln x + \int_0^{+\infty} \left( \frac{2t}{e^{2\pi t} - 1} dt \right) \left( -\frac{1}{t^2 + u^2} \right) \Big|_{u=1}^x. \end{aligned}$$

Se si completa la  $u$ -integrazione definita e si risolve vs.  $\psi(x)$  contenuta nell'Eq. (124), si arriva all'espressione

$$\psi(x) \equiv \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = -\frac{1}{2x} + \ln x - \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + x^2)} dt + C_1, \quad (125)$$

dove, con un'identificazione ovvia del termine integrando  $g(t)$ , è stata definita la *costante*

$$C_1 := \frac{1}{2} - \gamma + \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + 1)} dt \equiv 1/2 - \gamma + \int_0^{+\infty} g(t) dt. \quad (126)$$

È verificabile immediatamente che l'integrale  $\int_0^{+\infty} g(t) dt$  è convergente. Infatti,  $g(t) = O(1)$  in  $\mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ , avendosi  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1/\pi$ , mentre  $g(t) \sim 1/(te^{2\pi t}) = o(1)$  in  $\mathcal{U}(+\infty)$ . □

Ora, per determinare una rappresentazione integrale di  $\ln \Gamma(x)$ , è necessario integrare le quantità contenute nei membri dell'Eq. (125), ancora tra 1 e  $x$  ( $\in \mathbb{R}^+$ ):

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{d}{du} \ln \Gamma(u) du &\equiv \ln \Gamma(u) \Big|_1^x = \ln \Gamma(x) \\ &= \int_1^x \left( -\frac{1}{2u} + \ln u \right) du - \int_1^x du \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + u^2)} + \int_1^x C_1 du \\ &= \left( -(1/2) \ln u + u(\ln u - 1) + C_1 u \right) \Big|_1^x - \int_0^x du \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t^2 + u^2} \left( \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \right) \\ &= (x - 1/2) \ln x + (C_1 - 1)x + 1 - C_1 - \int_1^x du \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t^2 + u^2} \left( \frac{e^{-2\pi t} dt}{1 - e^{-2\pi t}} \right) \\ &= (x - 1/2) \ln x + (C_1 - 1)x + 1 - C_1 - \int_1^x du \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t^2 + u^2} \left( -\frac{1}{2\pi} d \ln(1 - e^{-2\pi t}) \right). \quad (127) \end{aligned}$$

Il  $t$ -integrale generalizzato interno all'integrale doppio nell'Eq. (127) può essere calcolato *per parti* immediatamente, riducendolo alla forma

$$\int_{t=0}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 + u^2} \left( -\frac{1}{2\pi} d \ln(1 - e^{-2\pi t}) \right) = \cancel{-\frac{1}{2\pi} (\ln(1 - e^{-2\pi t})) \frac{2t}{t^2 + u^2} \Big|_{t=0}^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} (\ln(1 - e^{-2\pi t})) \frac{u^2 - t^2}{t^2 + u^2} dt.$$

Quindi, tenendo conto anche della permutabilità tra le  $t$ - e  $u$ -integrazioni, si arriva all'equazione

$$\ln \Gamma(x) = (x - 1/2) \ln x + (C_1 - 1)x + 1 - C_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-2\pi t}) dt \int_1^x \frac{u^2 - t^2}{t^2 + u^2} du. \quad (128)$$

La  $u$ -integrazione nell'Eq. (127) è elementare: si ottiene

$$\int_1^x \frac{u^2 - t^2}{t^2 + u^2} du \equiv \frac{x}{t^2 + x^2} - \frac{1}{t^2 + 1}. \quad (128.1)$$

Poi, l'introduzione del risultato algebrico (128.1) nell'integrale (128) porta all'espressione

$$\ln \Gamma(x) = (x - 1/2) \ln x + (C_1 - 1)x + 1 - C_1 - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{t^2 + x^2} dt + C_2, \quad (129)$$

nella quale, si è posto

$$C_2 := 1 - C_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{t^2 + 1} dt \quad (129.1)$$

poiché l'addendo integrale nell'Eq. (129.1) è convergente, i.e., è uguale a una *costante*. Infatti, la funzione integranda  $\ln(1 - e^{-2\pi t})/(t^2 + 1)$ , diverge *logaritmicamente* in  $\mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ , dove essa diventa infinita di ordine  $< 1$  rispetto all'infinito principale  $1/x$ , mentre, in  $\mathcal{U}(+\infty)$ , essa è  $o(1)$ .

Gli integrali nell'Eq. (129) e nell'Eq. (129.1) sono calcolabili *per parti*. Per il primo, si trova

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{t^2 + x^2} dt &= \underbrace{\left( \frac{1}{x} \tan^{-1} \frac{t}{x} \right) \ln(1 - e^{-2\pi t})}_{\equiv 0} \Big|_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x} \tan^{-1} \frac{t}{x} \right) \frac{2\pi e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}} dt \\ &= -\frac{2\pi}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(t/x)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \end{aligned} \quad (130)$$

così che, quando  $x \equiv 1$ , si determina la forma equivalente alla (129.1),

$$C_2 \equiv 1 - C_1 - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1} t}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (130.1)$$

Sostituendo il risultato (130) nell'Eq. (129), si arriva all'uguaglianza

$$\ln \Gamma(x) = (x - 1/2) \ln x + (C_1 - 1)x + C_2 + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(t/x)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (131)$$

nella quale le costanti  $C_1$  e  $C_2$  restano da determinarsi.

Riguardo all'addendo integrale nell'Eq. (131), si osserva che  $\tan^{-1}(t/x) \in [0, t/x)$ . Pertanto,

$$\ln \Gamma(x) - (x - 1/2) \ln x - (C_1 - 1)x - C_2 < \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (132)$$

D'altra parte, definito  $t := \tau/(2\pi)$ , si calcola, mediante l'Eq. (176) specificata per  $\eta \equiv 2$ ,

$$\frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{2\pi t} - 1} dt \equiv \frac{1}{2\pi^2 x} \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{e^\tau - 1} d\tau = \frac{1}{2\pi^2 x} \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2 x} \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{12x}.$$

Dunque, la disuguaglianza

$$\ln \Gamma(x) - (x - 1/2) \ln x - (C_1 - 1)x - C_2 < 1/(12x) \quad (133)$$

coincide con la Dsg. (132).

Ora, dopo aver riscritto l'andamento asintotico (121) come

$$\ln \Gamma(x) - (x - 1/2) \ln x + x - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \sim \frac{1}{12x} + o(1), \quad (134)$$

il confronto tra le Eq.i (133) e (134), eseguito, *convenientemente*, nel limite  $x \rightarrow +\infty$ , dà

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = (1/2)\ln(2\pi). \end{cases} \quad (135)$$

L'introduzione dei valori (135) nell'Eq. (129) dà origine alla 2<sup>a</sup> *rappresentazione semi-integrale di Binet di  $\ln \Gamma(x)$* :

$$\ln \Gamma(x) = \ln((2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x}) + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(t/x)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (136)$$

Mediante la disuguaglianza (132), la relazione asintotica (121.1) riceve una conferma ulteriore, basata sull'Eq. generatrice (136).

Infine, si verifica prontamente, con i valori delle costanti  $C_1$  e  $C_2$ , l'espressione in termini finiti delle tre rappresentazioni integrali *equivalenti* di quella che è riconoscibile come la *trasformata di Laplace*, di parametro  $x \in \mathbb{R}^+$ , della *Funzione di Binet* (v. **Esercizio 10**, P. 53-54):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathcal{B}(t)\} &\equiv \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(t) e^{-xt} dt \equiv \begin{cases} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-xt}}{t} dt, \\ 2 \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(t/x)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \\ -\frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{t^2 + x^2} dt, \end{cases} \\ &= \ln \frac{\Gamma(x)}{(2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x}}. \end{aligned} \quad (137)$$

**Esercizio 1** Si verifichino le rappresentazioni integrali della *Costante di Catalan*, Eq. (94),

$$\lambda_c \equiv \int_0^1 \frac{\tan^{-1}t}{t} dt \equiv \int_0^1 \frac{\ln(1/t)}{1+t^2} dt.$$

**Esercizio 2** Si verifichino le rappresentazioni seguenti della *Costante di Euler-Mascheroni*:

$$2.1 \quad \gamma = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}; \quad 2.2 \quad \gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\ln(xy)} dx dy.$$

**Esercizio 3** Si verifichi che, per  $|x| < \pi$ , vale la rappresentazione in serie di potenze *pari*

$$\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{n \pi^{2n}} x^{2n}.$$

**Esercizio 4** Si verifichi la validità della rappresentazione integrale

$$\psi^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt.$$

**Esercizio 5** Si verifichino consecutivamente,  $\forall \{x, y\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \wedge x \neq y$ , le uguaglianze

$$5.1 \quad \psi(x+1) - \psi(y+1) = (x-y) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)};$$

$$5.2 \quad \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{\psi(x+1) - \psi(y+1)}{x-y} = \frac{\pi^2}{6} \equiv \zeta(2).$$

**Esercizio 6** Si verifichino gli  $\psi$ -valori numerici seguenti:

$$6.1 \quad \psi(1/3) = -\gamma - 3^{1/2} \pi/6 - (3 \ln 3)/2; \quad 6.2 \quad \psi(1/4) = -\gamma - \pi/2 - 3 \ln 2;$$

$$6.3 \quad \psi(1/6) = -\gamma - 3^{1/2} \pi/2 - 2 \ln 2 - (3 \ln 3)/2.$$

**Esercizio 7** L'espansione in *Serie di Legendre* di  $\ln \Gamma(x+1)$  (v. [15])

7.1 Sommando la quantità *nulla*  $0 \equiv -\ln(1+x) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((-1)^{n+1}/n)x^n$  alla quantità a destra nell'Eq. (97), si stabilisca l'espansione *formale* generale

$$\ln \Gamma(x+1) = (1-\gamma)x - \ln(x+1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\zeta(n) - 1)}{n} x^n.$$

Si provi che tale espansione è convergente per  $x \in [-2, 2]$  e che, risultando equivalente, per  $x \in (-1, 1]$ , all'espansione (97), costituisce di questa, pertanto, un *prolungamento analitico* (in senso *reale*);

7.2 mediante l'espansione di  $\ln \Gamma(x+1)$  precedente, si ottenga la differenza *formale*

$$\ln \Gamma(x+1) - \ln \Gamma(x-1) = \ln \frac{1-x}{1+x} + 2(1-\gamma)x - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n+1) - 1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Poi, sommando membro a membro tale differenza con l'identità

$$\ln \Gamma(x+1) + \ln \Gamma(x-1) \equiv \ln(\pi x \operatorname{csc} \pi x),$$

ottenuta mediante le *Proprietà Iterativa*, Eq. (9), e di *Riflessione*, Eq. (16), si determini l'espansione in *Serie di Legendre*,

$$\ln \Gamma(x+1) = (1-\gamma)x + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi x(1-x)}{(1+x) \sin \pi x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1} x^{2n+1},$$

valida per  $|x| < 1$  e convergente *molto rapidamente*.

**Esercizio 8** Espansioni di  $\gamma$  mediante la *Funzione  $\zeta$  di Riemann*

8.1 Sostituendo  $x \equiv 1/2$  nell'Eq. (97), si determini l'espansione in serie

$$\gamma = \ln \frac{4}{\pi} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{2^n n};$$

8.2 sostituendo  $x \equiv 1/2$  nell'espansione in *Serie di Legendre*, v. **Esercizio 7**, sopra, si deduca l'espansione in serie

$$\gamma = 1 - \ln(3/2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n+1)-1}{2^{2n}(2n+1)}.$$

Data la sua convergenza molto rapida, questa espansione fu utilizzata da Stieltjes [45] per approssimare  $\gamma$  con la precisione di 32 cifre decimali (v. P. 26).

Si provi che il termine generale della serie,  $a_n$ , ha il comportamento asintotico

$$a_n \sim 2^{-(4n+1)}.$$

**Esercizio 9** Derivando  $\ln \Gamma(x+1)$ , rispettivamente, nella rappresentazione dell'Eq. (97) e in quella dell'**Esercizio 7.1**, qui sopra, si determinino, per  $|x| < 1$ , le espansioni

9.1 
$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n;$$

9.2 
$$\psi(x+1) = 1 - \gamma - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\zeta(n+1) - 1) x^n.$$

**Esercizio 10**

10.1 Si dimostri che

$$\psi(1) = \pi^2/6 \equiv \zeta(2);$$

10.2 tenendo conto del Teorema a P. 3 e riscritta l'Eq. (8) nella  $\psi$ -forma

$$\psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - (\psi(x))^2,$$

si deduca il valore del 2° *Integrale di Euler-Mascheroni*, vs. l'Equazione  $x$ -parametrica generale (7),

$$\Gamma''(1) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^2 dt = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 \equiv \zeta(2) + \gamma^2;$$

10.3 calcolati i valori  $\psi''(1)$ ,  $\psi'''(1)$  e  $\psi^{(4)}(1)$  delle prime tre derivate successive di  $\psi'(x)$  e assunta nella  $\psi$ -forma 10.2, si ottengano iterativamente il 3°o, il 4°o e il 5°o *Integrale di Euler-Mascheroni*, dedotti dall'Eq. (7), ordinati come combinazioni lineari di potenze decrescenti di  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma'''(1) &\equiv \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^3 dt = -\gamma^3 - \frac{1}{2} \pi^2 \gamma - 2 \zeta(3), \\ \Gamma^{(4)}(1) &\equiv \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^4 dt = \gamma^4 + \pi^2 \gamma^2 + 8 \zeta(3) \gamma + \frac{3}{20} \pi^4, \\ \Gamma^{(5)}(1) &\equiv \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^5 dt = -\gamma^5 - \frac{5}{3} \pi^2 \gamma^3 - 20 \zeta(3) \gamma^2 - \frac{3}{4} \pi^4 \gamma - 24 \zeta(5) - \frac{10}{3} \pi^2 \zeta(3). \end{aligned}$$

Per la verifica, sono riportati, qui di seguito, i valori numerici (approssimati)

$$\begin{aligned} \zeta(3) &\approx 1.20205\ 69031\ 59594\ 28540, \\ \zeta(5) &\approx 1.03692\ 77551\ 43369\ 92633, \end{aligned}$$

si veda [9], P. 811, peraltro, ottenibili prontamente, e.g., con il CAS *Maxima*<sup>fr-sftw</sup> (v. [71]).

**Esercizio 11** Si dimostri che,  $\forall p \in \mathbb{Z}^+$ , vale l'identità (cf/c Eq. (75))

$$\psi(px) \equiv \ln p + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \psi(x + k/p).$$

L'identità (84.1) ne costituisce il caso corrispondente a  $p \equiv 2m + 1 \wedge x \equiv 1/2$ .

**Esercizio 12** Mediante le Eq.i (87), (85) e (68), si verifichi che, per  $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$12.1 \quad \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq \kappa)}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \kappa^2} = \frac{3}{4\kappa^2}; \quad 12.2 \quad \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq \kappa)}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \kappa^2} = \frac{2 + (-1)^\kappa}{4\kappa^2}.$$

**Esercizio 13** Si consideri la funzione  $(t; x) \mapsto \phi(t, x) \equiv f(tx) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty))$ , tale che  $\int_0^{+\infty} f(tx) dx$  è uniformemente convergente a  $F(t)$  in  $\mathbb{R}^+$ . Allora, poiché

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+), \text{ i.e., } \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \equiv \int_0^{+\infty} (\lim_{t \rightarrow t_0} f(tx)) dx, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \\ \text{II.} \quad & \int_a^b F(t) dt = \int_a^b dt \int_0^{+\infty} f(tx) dx \equiv \int_0^{+\infty} dx \int_a^b f(tx) dt, \text{ con } \{a, b\} \subset \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

si verifichi la validità della rappresentazione integrale di *Frullani*, Eq. (100), ponendo  $u := tx$  nell'Idn. II precedente.

Alcune applicazioni classiche sono proposte nell'esercizio seguente:

**Esercizio 14** Si dimostri che, con  $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^+ \wedge a \neq b$ , risultano

$$14.1 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(x/b) - \tan^{-1}(x/a)}{x} dx \equiv \int_0^{+\infty} \frac{\cot^{-1}(x/a) - \cot^{-1}(x/b)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln(a/b);$$

$$14.2 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x} dx = \ln(a/b) \quad (\text{cf/c Eq. (100.1)}).$$

**Esercizio 15** Si dimostri che

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + x^2)} = \gamma + \frac{1}{2x} + \ln x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

Da questa, è immediato dedurre la rappresentazione

$$\gamma = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + 1)},$$

il cui *termine integrale* vale, chiaramente,  $\gamma - 1/2 \approx 0.0772156649$ .

**Esercizio 16** Si verifichino l'equivalenza e il valore indicato degli integrali seguenti:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1} t}{e^{2\pi t} - 1} dt &\equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{t^2 + 1} dt \\ &\equiv (1 - C_2)/2 \equiv N/2 = 1/2 - (1/4)\ln(2\pi) \approx 0.04053. \end{aligned}$$

**Esercizio 17** La somma  $\sigma_{n,k} := \psi(k+1) + \psi(n+k+1)$  compare nella rappresentazione in serie di potenze delle *Funzioni di Bessel Ordinarie* di 2° tipo e di rango  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

17.1 Posto  $x \equiv n \in \mathbb{Z}^+$  nell'Eq. (87), si verifichi, per iterazione, che

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k};$$

17.2 tenendo conto delle Eq.i (65.1), (103) e (87), si provi che,  $\forall \{n, k\} \subset \mathbb{Z}^+$ , risulta

$$\sigma_{n,k} = -2\gamma + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r+k};$$

17.3 circa i tre casi particolari *non deducibili* dalla somma formale 17.2, si verifichi che

$$\sigma_{0,0} = -2\gamma, \quad \sigma_{0,k \geq 1} = 2 \left( -\gamma + \sum_{r=1}^k \frac{1}{r} \right), \quad \sigma_{n \geq 1, 0} = -2\gamma + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r}.$$

**Esercizio 18**

Si verifichino le identità simmetriche seguenti:

$$18.1 \quad \frac{\partial}{\partial x} B(x, y) = B(x, y)(\psi(x) - \psi(x+y)),$$

$$18.2 \quad \frac{\partial}{\partial y} B(x, y) = B(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y)).$$

■■■

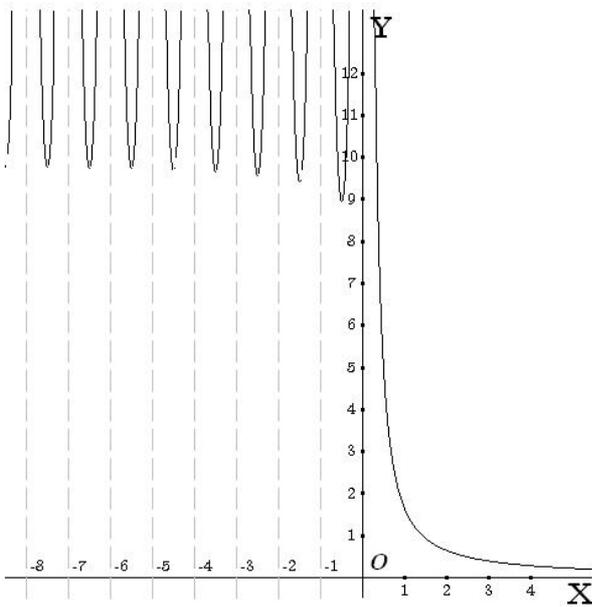


Fig. 4.1 – Grafico della *Funzione Trigamma* (†),

$$x \mapsto \psi'(x) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \equiv \zeta_H(2, x),$$

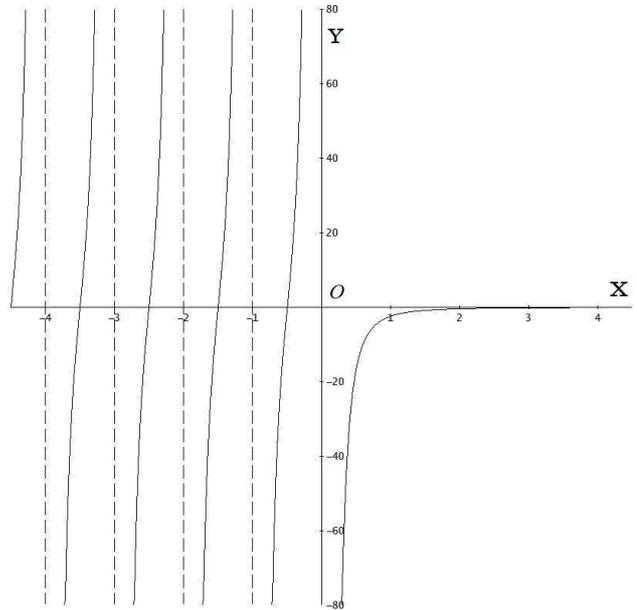


Fig. 4.2 – Grafico della *Funzione Tetragamma* (†),

$$x \mapsto \psi''(x) \equiv -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^3} := -2 \zeta_H(3, x).$$



*Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)*

(†) Una discussione essenziale della *Funzione di Hurwitz*  $\zeta_H$  si trova, e.g., nel math-notebook: *Determinazione di serie di potenze in  $\mathbb{R}$  dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler*, etc. Si vedano anche [6] e [11].



*Pierre-Simon Laplace (1749-1827)*

capitolo VI

**La Funzione GAMMA  
in regime asintotico**

**6.1 Il Criterio di Laplace**

La necessità del calcolo di  $\ln \Gamma(x)$  per  $x \in \mathcal{U}(+\infty)$ , i.e., per  $1 \ll x$  (e.g., in molte questioni di Meccanica Statistica), rimanda, storicamente, alla serie *divergente* che James Stirling ricavò [46] per  $\ln(n!)$ , di sorprendente precisione già sommandone i primi pochi termini ma *priva* di giustificazioni teoriche rigorose: una serie puramente *formale* (l'assetto fondamentale dell'Analisi, emerso dall'opera di Cauchy, Gauss, Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Cantor, Méray, etc., è posteriore di almeno un secolo).

Nel 1820, P. S. Laplace (v. [47], [48]) scoprì la proprietà *integrale* seguente (*Criterio di Laplace*):

*Se  $u \mapsto f(u)$  è una funzione generalmente continua in  $(a, b)$  e  $u \mapsto \psi(u) \in \mathcal{C}^2((a, b))$  è una funzione avente un numero finito di massimi locali in  $[a, b]$ ,  $u = u_k$ , stazionari o no, tali che  $\lim_{u \rightarrow u_k} f(u) \neq 0 \ \forall u_k$ , allora,*

*l'andamento della funzione  $\mathcal{L}(x) := \left| \int_a^b f(u) e^{x\psi(u)} du \right|$  nell'intorno  $\mathcal{U}_\delta(u_k)$  di ciascuna delle ascisse massimanti*

*( $\mathcal{U}_\delta$  unilaterale se  $u_k \equiv a$  e/o  $u_k \equiv b$ ) è dominato dall'andamento definitivo locale di  $\psi$  quando  $|x| \rightarrow +\infty$ .*

*$\mathcal{L}(x)$  può avere forma integrale propria o impropria.*

Laplace estrapolò questa proprietà in *criterio analitico sufficiente*, che utilizzò nell'approssimazione numerica della funzione  $x \mapsto \Phi(x) \equiv x!$  di Euler, Eq. (3), riuscendo a dare plausibilità al risultato formale di Stirling. Peraltro, già A. de Moivre (v. [49]) aveva osservato la tendenza progressiva di  $(2\pi)^{1/2} n^{n+1/2} e^{-n}$  verso  $n!$  per valori crescenti di  $n$ .

In seguito, dall'analisi accurata del *Criterio di Laplace*, ebbe origine il metodo del *pendio più ripido* ( $\therefore$  *the steepest descent method*, v. [5], [8], [48], [61], [62]), appoggiato al *Lemma di Watson* (v. [4], [5], [6], [48]; qui, p. 71), per la valutazione *asintotica* di molte funzioni integrali, e.g., la rappresentazione di Legendre (4), in corrispondenza di valori *molto grandi* dell'argomento parametrico  $x$  (i.e., per  $x \gg 1$ ).

La problematica che ne emerge conduce direttamente alla Teoria delle cosiddette *Serie Asintotiche*. Queste, il più delle volte divergenti (!), sono riconosciute, nel *regime dei grandi numeri*, come strumenti potenti e rapidi di valutazione sia qualitativa che quantitativa di integrali e di serie difficilmente trattabili o confrontabili altrimenti.

■

### 6.2 L'espansione asintotica di Stirling-De Moivre (S-DM)

L'espansione S-DM asintotica della Funzione  $\Gamma$ , troncata al 4° ordine *negativo*, è espressa dalla

**Proposizione**

Sia  $x \gg 1$ . Allora, vale l'espansione *asintotica* del 4° ordine (cf/c l'Eq. (121.1))

$$\Gamma(x+1) \sim (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x} \left( 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + O(x^{-5}) \right) \quad (138)$$

$$\equiv h(x) \sum_{n=0}^4 c_n/x^n + O(x^{-9/2}e^{-x}), \quad \text{dove } h(x) := (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x}. \blacktriangle$$

**Dimostrazione costruttiva in  $\mathbb{R}$**

Mediante il cambiamento di variabile di integrazione  $w := x(1+u)$ , che porta alle trasformazioni differenziale  $dw \mapsto x du$  e operatoriale integrale  $\int_0^{+\infty} (dw) \mapsto \int_{-1}^{+\infty} (x du)$ , si scrive

$$\Gamma(x+1) \equiv \int_0^{+\infty} w^x e^{-w} dw \mapsto \int_{-1}^{+\infty} (x(1+u))^x e^{-x(1+u)} x du \equiv x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{+\infty} e^{x(-u+\ln(1+u))} du$$

$$\equiv x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{+\infty} e^{x\psi(u)} du. \quad (139)$$

*Abraham de Moivre (1667-1754)*

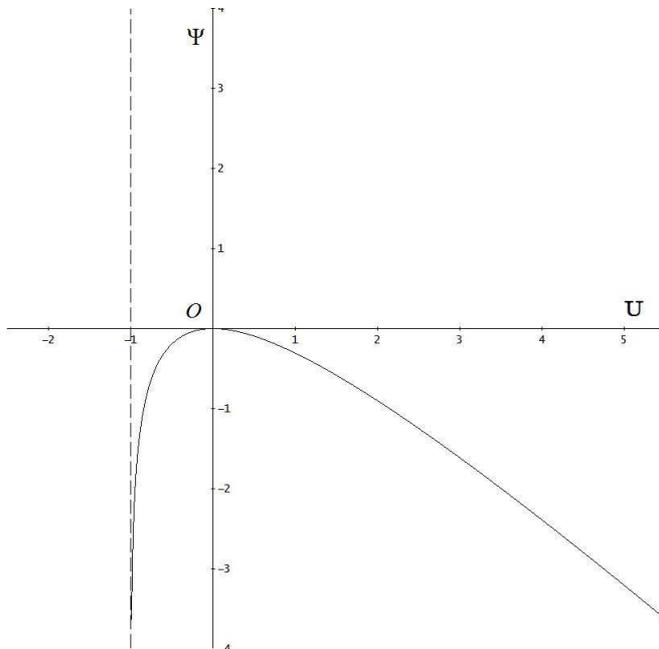


Fig. 5 – Il grafico della funzione  $u \mapsto \psi(u)$

La funzione  $u \mapsto \psi(u) \equiv -u + \ln(1+u)$ , v. Eq. (139), il cui grafico appare nella Fig. 5, è definita e continua nel suo dominio  $\mathcal{D} = \{u : u \in (-1, +\infty)\}$ . Essa possiede un *unico* massimo locale (stazionario e assoluto) in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento e, dunque, risulta *limitata superiormente* ( $\psi(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}$ ).

La convergenza della rappresentazione integrale (139) è confermata immediatamente osservando che per  $u \rightarrow -1^+$ , si ha  $e^{x\psi(u)} = o(1)$  e che, per  $u \rightarrow +\infty$ , pure risulta  $e^{x\psi(u)} \sim e^{-xu} = o(1)$ .

Ora, il *Criterio di Laplace* garantisce che quanto maggiore è il valore del parametro  $x$  tanto più il contributo *dominante* al valore *finito* della rappresentazione integrale (139) confluisce in quello generato da  $u \in \mathcal{U}_\delta(0)$ , i.e., tale che  $|u| \ll 1$ , introducendo un errore *esponenzialmente piccolo*.

Quindi, si può assumere che l'  $\mathcal{M}$ -espansione – valida *solo* per  $u \in (-1, 1]$  –

$$-u + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} u^k = -\frac{u^2}{2} + \left( \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \dots \right) \equiv -\frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad (140)$$

*approssimi* la funzione  $\psi$  in modo *soddisfacente in tutto* (!) l'intervallo d'integrazione  $(-1, +\infty)$ ; non solo, ma che, per  $|u| \ll 1$ , una somma ridotta *appropriata* della serie (140) costituisca – già di per sé – un'approssimazione accettabile di  $\psi(u)$  ai fini dell'integrazione.

Anticipando il fatto che la *somma ridotta* di ordine 10 risulta quella *minore sufficiente* a generare correttamente i primi *cinque* termini della serie *S-DM* asintotica (138), è evidente che i termini successivi proverranno da troncamenti appropriati della serie (140) eseguiti oltre  $u^{10}/10$ .

Così, dopo aver definito

$$\sigma(u) := \sum_{k=3}^{10} \frac{(-1)^{k+1}}{k} u^k, \quad (141)$$

si scrive (si confronti la serie (140) con la somma (141), di indice *iniziale*  $k = 3$ )

$$\Gamma(x+1) \approx x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{+\infty} e^{-xu^2/2} e^{x\sigma(u)} du. \quad (142)$$

D'altra parte, in regime di *dominanza*  $u \in \mathcal{U}_\delta(0) \wedge x \gg 1$ , per il fattore esponenziale  $e^{x\sigma(u)}$  vale definitivamente l'approssimazione ulteriore

$$e^{x\sigma(u)} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(x\sigma(u))^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{x^k}{k!} \left( \sum_{\nu=3}^{10} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} u^\nu \right)^k \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \frac{x^k u^{2k}}{k!} \left( \sum_{\nu=1}^8 \frac{(-u)^\nu}{\nu+2} \right)^k, \quad (143)$$

dove,  $N+1$  è il numero *minore* di addendi della  $k$ -somma finita *esterna* (143) sufficiente per la determinazione dei primi *cinque* termini della serie *S-DM* asintotica.

Per conoscere  $N$ , è conveniente legare il parametro  $x (\rightarrow +\infty)$  alla variabile  $u$  di integrazione mediante una trasformazione 'adattata' all'effetto di *dominanza* integrale espresso dal *Criterio di Laplace*. Con la riparametrizzazione definita da

$$u := (2/x)^{1/2} t, \quad (144)$$

le espansioni polinomiali  $(x\sigma(u))^k$  diventano somme di frazioni della forma  $a_{ks} (2^{s/2}/x^{s/2-k}) t^s$ . Ciascuna frazione risulta specificata dalla coppia ordinata di indici  $\{s, s/2 - k\} \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$  e dal coefficiente polinomiale  $a_{ks}$  appropriato.

Pertanto, il problema consiste nel riconoscere *quali* e *quante* di tali frazioni siano necessarie per la determinazione *completa* dei termini della serie *S-DM* asintotica arrestata all'ordine  $n$  desiderato corrispondente alla potenza  $n$ -sima del parametro  $x$ . In altri termini, si tratta di ricostruire i coefficienti  $c_n$  di una serie asintotica della forma specifica *divergente*  $h(x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n/x^n$ .

Il controllo preventivo *minuzioso* degli effetti cumulativi sulle potenze  $u^\nu$  in  $\sigma(u)$ , v. Eq. (141),

generati dalle varie potenze  $k$ -esime di  $\sigma(u)$ , v. Eq. (143), richiede, per il calcolo esatto di  $c_4 \equiv -571/2488320$  nell'Eq. (138), che sia, almeno,  $N = 8$  nell'espansione doppia ridotta (143). Applicando la *formula polinomiale di Leibniz* (v. **Appendice 3**, Eq. (A.14)), si inizia a scrivere, in regime di *dominanza*  $u \in \mathcal{U}_s(0) \wedge x \gg 1$ ,

$$\begin{aligned}
 e^{x\sigma(u)} &\approx 1 + \sum_{k=1}^N \frac{x^k}{k!} \left( \sum_{\nu=3}^{10} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} u^\nu \right)^k = 1 + x \left( \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^7}{7} - \frac{u^8}{8} + \frac{u^9}{9} - \frac{u^{10}}{10} \right) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^2}{2} \left( \frac{u^6}{9} + \frac{u^8}{16} + \frac{u^{10}}{25} + \frac{u^{12}}{36} + \dots + 2 \left( \left( -\frac{u^7}{12} + \frac{u^8}{15} - \frac{u^9}{18} + \frac{u^{10}}{21} - \frac{u^{11}}{24} + \frac{u^{12}}{27} + \dots \right) \right) + \downarrow \right. \\
 &\quad \quad \quad \downarrow + \left( -\frac{u^9}{20} + \frac{u^{10}}{24} - \frac{u^{11}}{28} + \frac{u^{12}}{32} + \dots \right) + \left( -\frac{u^{11}}{30} + \frac{u^{12}}{35} + \dots \right) + \dots \left. \right) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^3}{6} \left( \frac{u^9}{27} - \frac{u^{12}}{64} + \dots + 3 \left( -\frac{u^{10}}{36} + \frac{u^{11}}{45} - \frac{u^{12}}{54} + \frac{u^{13}}{63} - \frac{u^{14}}{72} + \dots + \frac{u^{11}}{48} + \frac{u^{13}}{80} - \frac{u^{14}}{96} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \quad \quad \downarrow + \frac{u^{13}}{75} - \frac{u^{14}}{100} + \dots \left. \right) + 6 \left( -\frac{u^{12}}{60} + \frac{u^{13}}{72} - \frac{u^{14}}{84} + \dots - \frac{u^{14}}{90} + \dots \right) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^4}{24} \left( \frac{u^{12}}{81} + \frac{u^{16}}{256} + \dots + 4 \left( -\frac{u^{13}}{108} + \frac{u^{14}}{135} - \frac{u^{15}}{162} + \frac{u^{16}}{189} + \dots - \frac{u^{15}}{192} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \quad \quad \downarrow + 6 \left( \frac{u^{14}}{144} + \frac{u^{16}}{225} + \dots \right) + 12 \left( -\frac{u^{15}}{180} + \frac{u^{16}}{216} + \dots + \frac{u^{16}}{240} + \dots \right) + \dots \left. \right) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^5}{120} \left( \frac{u^{15}}{243} + \dots + 5 \left( -\frac{u^{16}}{324} + \frac{u^{17}}{405} - \frac{u^{18}}{486} + \dots \right) + 10 \left( \frac{u^{17}}{432} + \dots - \frac{u^{18}}{576} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \quad \quad \downarrow + 20 \left( -\frac{u^{18}}{540} + \dots \right) + \dots \left. \right) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^6}{720} \left( \frac{u^{18}}{729} + \dots + 6 \left( -\frac{u^{19}}{972} + \frac{u^{20}}{1215} + \dots \right) + 15 \left( \frac{u^{20}}{1296} + \dots \right) \right) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^7}{5040} \left( \frac{u^{21}}{2187} + \dots + 7 \left( -\frac{u^{22}}{2916} + \dots \right) + \dots \right) + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^8}{40320} \left( \frac{u^{24}}{6561} + \dots \right) \\
 &\approx 1 + \frac{x}{3} u^3 - \frac{x}{4} u^4 + \frac{x}{5} u^5 + \left( \frac{x^2}{18} - \frac{x}{6} \right) u^6 - \left( \frac{x^2}{12} - \frac{x}{7} \right) u^7 + \left( \frac{47}{480} x^2 - \frac{x}{6} \right) u^8 + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \left( \frac{x^3}{162} - \frac{19}{180} x^2 + \frac{x}{9} \right) u^9 - \left( \frac{x^3}{72} - \frac{153}{1400} x^2 + \frac{x}{10} \right) u^{10} + \left( \frac{31}{1440} x^3 - \frac{31}{280} x^2 \right) u^{11} + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \left( \frac{x^4}{1944} - \frac{493}{17280} x^3 + \frac{3349}{30240} x^2 \right) u^{12} - \left( \frac{x^4}{648} - \frac{1751}{50400} x^3 \right) u^{13} + \left( \frac{77}{25920} x^4 - \right. \\
 &\quad \quad \quad \downarrow - \frac{4049}{100800} x^3 \left. \right) u^{14} + \left( \frac{x^5}{29160} - \frac{727}{155520} x^4 \right) u^{15} - \left( \frac{x^5}{7776} - \frac{190261}{29030400} x^4 \right) u^{16} + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{23}{77760} x^5 u^{17} + \left( \frac{x^6}{524880} - \frac{503}{933120} x^5 \right) u^{18} - \frac{x^6}{116640} u^{19} + \frac{107}{4665600} x^6 u^{20} + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + \frac{x^7}{11022480} u^{21} - \frac{x^7}{2099520} u^{22} + \frac{x^8}{264539520} u^{24} + \dots \quad (145)
 \end{aligned}$$

Ora, ritornando all'Eq. (142), la ri-parametrizzazione (144) genera la trasformazione integrale

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-(x/2)u^2} e^{x\sigma(u)} du \mapsto (2/x)^{1/2} \int_{-(x/2)^{1/2}}^{+\infty} e^{-t^2} e^{x\Sigma(t)} dt, \quad (146)$$

nella quale,  $\sigma(u) \mapsto \Sigma(t)$ . Sostituendo a  $e^{x\Sigma(t)}$  l'espressione ottenuta trasformando l'espansione (145) con la posizione (144), appropriata al regime di *dominanza*  $u \in \mathcal{U}_\delta(0) \wedge x \gg 1$ , e, inoltre, sostituendo  $t = -(x/2)^{1/2} \mapsto -\infty$  come estremo inferiore di integrazione, si determina soltanto un cambiamento *trascurabile* nel valore dell'integrale (146) *in forza del Criterio di Laplace*.

Così, l'approssimazione (142) conduce alla rappresentazione integrale *asintotica*

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &\sim 2^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \left( 1 - \frac{t^4}{x} + \left( \frac{4}{9x} - \frac{4}{3x^2} \right) t^6 + \left( \frac{47}{30x^2} - \frac{2}{x^3} \right) t^8 - \downarrow \right. \\ &\quad \downarrow - \left( \frac{4}{9x^2} - \frac{612}{175x^3} + \frac{16}{5x^4} \right) t^{10} + \left( \frac{8}{243x^2} - \frac{493}{270x^3} + \frac{6698}{945x^4} \right) t^{12} + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \left( \frac{154}{405x^3} - \frac{8098}{1575x^4} \right) t^{14} - \left( \frac{8}{243x^3} - \frac{190261}{113400x^4} \right) t^{16} + \left( \frac{32}{32805x^3} - \frac{1006}{3645x^4} \right) t^{18} + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \frac{428}{18225x^4} t^{20} - \frac{32}{32805x^4} t^{22} + \frac{32}{2066715x^4} t^{24} + \downarrow \\ &\quad \downarrow + \sum_{j=13}^{40} \eta_j(x) t^{2j} + \sum_{j=1}^{39} \lambda_j(x) t^{2j+1} \Big) dt. \end{aligned} \quad (147)$$

Le due  $j$ -somme nell'Eq. (147) raccolgono gli addendi trascurati nell'Eq. (145), e *trascurabili* per l'approssimazione prefissata.

L'integrazione (147) si può eseguire termine-a-termine una volta calcolato l'*Integrale Gaussiano* (uniformemente convergente in  $\mathbb{R}^+$ )

$$G_n(\alpha) := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t^2} dt \equiv \int_0^{+\infty} f(t, n, \alpha) dt, \quad (148)$$

$$\forall (n, \alpha) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{R}^+.$$

□

Per  $n = 0$ , l'Eq. (148) fornisce l'*Integrale di Gauss-Poisson* (25.1.2),  $G_0(\alpha)$ , mentre, per  $n = 1$ , un'integrazione *per parti* dà  $G_1(\alpha) = 1/(2\alpha)$ .

In generale, sia  $f(t, n, \alpha) \equiv t^n e^{-\alpha t^2}$  che la sua derivata parziale 1<sup>a</sup>  $f'_\alpha(t, n, \alpha) \equiv -t^2 f(t, n, \alpha)$  sono continue in  $[0, +\infty) \times [\alpha_1, \alpha_2]$ ,  $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ ; inoltre, in  $\mathcal{U}(+\infty)$ , entrambe diventano infinitesime di ordine superiore a ogni numero assegnato  $\mu > 0$  rispetto all'infinitesimo principale  $1/t$ ,  $\forall \{n, \alpha\}$ .

Pertanto, sia  $f(t, n, \alpha)$  che  $f'_\alpha(t, n, \alpha)$  sono  $\mathcal{R}$ -integrabili (Riemann) in senso generalizzato vs.  $t \in [0, +\infty)$  e si ha, *uniformemente* vs.  $\alpha$ , che

$$\frac{dG_n(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^{+\infty} f'_\alpha(t, n, \alpha) dt = - \int_0^{+\infty} t^{n+2} e^{-\alpha t^2} dt \equiv -G_{n+2}(\alpha),$$

i.e., con la traslazione indiciale  $n \mapsto n-2$ , che

$$G_n(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} G_{n-2}(\alpha). \quad (149)$$

Iterando l'Eq. (149)  $n$  volte su sé stessa e tenendo conto che  $G_0(\alpha) = (1/2)(\pi/\alpha)^{1/2}$ , risulta:

- per  $n$  pari,

$$\begin{aligned} G_n(\alpha) &= (-1)^{n/2} \frac{d^{n/2}}{d\alpha^{n/2}} G_0(\alpha) = (-1)^{n/2} (\pi^{1/2}/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2) \dots (-(n-1)/2) \alpha^{(n+1)/2} \\ &= \frac{(n-1)!!}{2^{n/2+1} \alpha^{(n+1)/2}} \pi^{1/2} \equiv \frac{1}{2\alpha^{(n+1)/2}} \frac{(n-1)!!}{2^{n/2}} \pi^{1/2} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{2\alpha^{(n+1)/2}}, \end{aligned} \quad (150.1)$$

dall'Eq. (14.1), nella quale, si esegua la sostituzione  $n \mapsto n/2$ ;

- per  $n$  dispari,

$$\begin{aligned} G_n(\alpha) &= (-1)^{(n-1)/2} \frac{d^{(n-1)/2}}{d\alpha^{(n-1)/2}} G_1(\alpha) \\ &= (-1)^{(n-1)/2} (1/2)(-1)(-2)(-3) \dots (-(n-1)/2) \alpha^{-(n+1)/2} \\ &= \frac{((n-1)/2)!}{2\alpha^{(n+1)/2}} \equiv \frac{\Gamma((n-1)/2 + 1)}{2\alpha^{(n+1)/2}} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{2\alpha^{(n+1)/2}}. \end{aligned} \quad (150.2)$$

Si noti che le Eq.i (150.1) e (150.2) coincidono formalmente *solo* nelle loro  $\Gamma$ -rappresentazioni.

Nell'Eq. (147), l'intervallo di integrazione è  $\mathbb{R}$  e gli addendi integrandi sono tutti proporzionali a  $f(t, n, \alpha)$ , funzioni o pari o dispari di  $t$ . Quindi, per simmetria evidente, si conclude che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\alpha t^2} dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(2\alpha)^{n/2}} (\pi/\alpha)^{1/2}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \quad (151)$$

□

Chiaramente, la  $t$ -integrazione di  $e^{-t^2} \sum_{k=13}^{40} \eta_j(x) t^{2j}$  dà un risultato *trascurabile*, tenuto conto sia del numero di termini  $S$ - $DM$  richiesti, cinque, sia dell'effetto di smorzamento su cui si fonda il *Criterio di Laplace*. Inoltre,  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sum_{j=1}^{39} \lambda_j(x) t^{2j+1} dt \equiv 0, \forall j$ , essendo  $2j+1 (\equiv n)$  dispari,

v. Eq. (151). Quindi, se  $x \gg 1$  (i.e., definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ ), con  $h(x) \equiv (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x}$  nell'Eq. (147), si calcola

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &\sim h(x) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt + \downarrow \right. \\ &\quad \left. \downarrow + \left( \frac{4}{9x} - \frac{4}{3x^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt + \dots + \frac{32}{2066715x^4} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{24} e^{-t^2} dt \right) \\ &\sim h(x) \left( 1 - \frac{3}{4x} + \left( \frac{4}{9x} - \frac{4}{3x^2} \right) \frac{15}{8} + \left( \frac{47}{30x^2} - \frac{2}{3x^3} \right) \frac{105}{16} - \left( \frac{4}{9x^2} - \downarrow \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \downarrow - \frac{612}{175x^3} + \frac{16}{5x^4} \right) \frac{945}{32} + \left( \frac{8}{243x^2} - \frac{493}{270x^3} + \frac{6698}{945x^4} \right) \frac{10395}{64} + \downarrow \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \downarrow + \left( \frac{154}{405x^3} - \frac{8098}{1575x^4} \right) \frac{135135}{128} - \left( \frac{8}{243x^3} - \frac{190261}{113400x^4} \right) \frac{2027025}{265} + \downarrow \\ & \downarrow + \left( \frac{32}{32805x^3} - \frac{1006}{3645x^4} \right) \frac{34459425}{512} + \frac{428}{18225x^4} \frac{654729075}{1024} - \downarrow \\ & \downarrow - \frac{32}{32805x^4} \frac{13749310575}{2048} + \frac{32}{2066715x^4} \frac{316234143225}{4096} \Big). \end{aligned}$$

La semplificazione algebrica conclusiva dà

$$\Gamma(x+1) \sim (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x} \left( 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} \right). \quad (152)$$

L'espansione ridotta (152) coincide con la Proposizione (138) a meno di un errore prevedibile  $R_4(x) = O(x^{-9/2} e^{-x})$ , i.e., dello stesso ordine di grandezza del primo termine omesso, secondo la scelta fissata del numero di addendi *S-DM* da determinare.

La *dimostrazione costruttiva* esplicita in  $\mathbb{R}$  della rappresentazione asintotica (138) è terminata. □

Tutti i programmi di calcolo numerico migliori sono progettati anche per il calcolo *simbolico* (e.g., *Maxima*<sup>fr-sfwr</sup> [68], *EMT*<sup>fr-sfwr</sup> [69], *SciLab*<sup>fr-sfwr</sup> [70], *Octave*<sup>fr-sfwr</sup> [69], *Mathematica*<sup>TM</sup>, *Maple*<sup>TM</sup>, *Matlab*<sup>TM</sup>). Un raffinamento, ottenuto con *Maxima* (CM, 2005), dell'Eq. (138) dà l'espansione *S-DM* di ordine 8 a coefficienti *esatti* seguente:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) \sim (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x} \Big( & 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{13.9}{5184x^3} - \frac{57.1}{248832x^4} + \downarrow \\ & \downarrow + \frac{16387.9}{20901888x^5} + \frac{52468.19}{752467968x^6} - \frac{5347035.31}{9029615616x^7} - \frac{44831312.59}{866843099136x^8} + O(x^{-9}) \Big). \end{aligned} \quad (152.1)$$

□

Non è nota a chi scrive (2023) alcuna regola iterativa generale, salvo quella del *segno*, per  $n \geq 1$ ,

$$\text{sgn}(c_n) \equiv \frac{c_n}{|c_n|} = \begin{cases} (-1)^{n/2-1}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \quad (153)$$

Sebbene il valore assoluto dei primi coefficienti decresca (moderatamente), esso prende a crescere definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ . Ad esempio,  $c_{15} \approx 2.9 \cdot 10^{-2}$ ,  $c_{25} \approx -2.2 \cdot 10^3$ ,  $c_{35} \approx -1.1 \cdot 10^{10}$ .

Infatti, si può verificare (v. [50]) che, quando  $n \rightarrow +\infty$ , risulta

$$c_n \sim \begin{cases} (-1)^{n/2-1} \frac{(n-2)!}{6(2\pi)^n}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ (-1)^{(n-1)/2} \frac{2(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \quad (153.1)$$

Pertanto, smentendo ogni conclusione affrettata basata sul controllo dei soli primi addendi, la *S-DM*-serie  $h(x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n/x^n$  *diverge*  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ , passando attraverso somme parziali  $S_n(x)$  e  $S_{n+2}(x)$  di segni *opposti* tra loro definitivamente. Tuttavia, se si esegue un troncamento della serie *S-DM prima* che i valori assoluti dei suoi coefficienti incomincino a crescere in modo catastrofico, si determina una approssimazione *molto soddisfacente* di  $\Gamma(x+1)$ , dominata sostanzialmente dal primo termine  $h(x) \equiv (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x}$ . Questo fenomeno spiega il carattere  $O(x^{-9/2} e^{-x})$  del

resto  $R_4(x)$  della rappresentazione (138): esso riflette il livello di *straordinaria* approssimazione di  $\Gamma(x+1)$  eseguita per  $x \gg 1$ , *non* il carattere intrinseco di un'espansione asintotica, peraltro *divergente*, utilizzata come approssimante!

In altre parole, la serie *S-DM* asintotica *non costituisce* un'espansione analitica di  $\Gamma(x+1)$  in alcun intervallo del suo dominio, come è, invece, la Serie di Taylor. D'altra parte, rispetto a quest'ultima, la serie *S-DM* asintotica approssima *molto meglio*  $\Gamma(x+1)$  in  $\mathcal{U}(+\infty)$  quando se ne consideri un numero *finito* opportuno di termini.

Per rendere il senso della precisione notevole già delle prime due somme *S-DM* ridotte, è riportata, qui di seguito, una tabella dei valori relativi a  $\Gamma(x+1)$ , esatti alla 50-esima cifra decimale in  $^{[51]}$ , di  $S_0(x)$  e, rispettivamente, di  $S_1(x)$ :

$x$	$\frac{S_0(x)}{\Gamma(x+1)} \equiv \frac{(2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x}}{\Gamma(x+1)}$	$\frac{S_1(x)}{\Gamma(x+1)} \equiv \frac{(2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} e^{-x} (1 + 1/(12x))}{\Gamma(x+1)}$
1	0.92213	0.99898
2	0.95950	0.99949
3	0.97270	0.99972
4	0.97942	0.99983
5	0.98349	0.99988
6	0.98621	0.99992
7	0.98817	0.99994
8	0.98964	0.99995
9	0.99078	0.99996
10	0.99170	0.99998

Si verifica che, per  $x = 10$ , il valore assoluto dell'errore relativo al valore esatto  $\Gamma(11) \equiv 10! = 3628800$  della somma dei soli primi due termini della serie *S-DM* risulta  $< 3.18 \cdot 10^{-5}$ .

■

**Esempio**

I calcoli in Elettrodinamica, sia Classica che Quantistica, in Astrofisica e in Meccanica Statistica conducono, sovente, a *integrali ellittici* o a *funzioni di Bessel sferiche* che incorporano serie nelle quali compaiono combinazioni di fattoriali doppi.

La stima di quantità quali la potenza radiata o l'ampiezza di diffusione (*scattering amplitude*) sia a distanza breve (*short-range*) che intermedia (*Fresnel*) dalla sorgente è affrontata con un'analisi *à-la Fourier-Bessel* in regimi asintotici specifici in cui sono coinvolti i vari termini di propagazione.

Tali circostanze, possono richiedere espressioni asintotiche ( $n \gg 1$ ) per i coefficienti binomiali

$$\binom{-1/2}{n} \text{ e } \binom{1/2}{n} \text{ durante passaggi o controlli computazionali.}$$

Dividendo tra loro i membri della coppia di identità seguenti, di verifica immediata,

$$\begin{cases} (2n-1)!! \equiv \frac{(2n)!}{2^n n!}, \\ (2n)!! \equiv 2^n n! \end{cases} \quad (154)$$

si ottiene

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \equiv \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1} n ((n-1)!)^2}, \quad (155)$$

$$\equiv \frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi^{1/2} n!}, \quad (155.1)$$

quest'ultima dall'Eq. (14.1).

Incidentalmente, l'uguaglianza dei due membri destri nelle Eq.i (155) e (155.1) fornisce una forma equivalente, talvolta preferibile, all'Eq. (14.1):

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \pi^{1/2}. \quad (156)$$

Ora, poiché

$$\begin{cases} \binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \\ \binom{1/2}{n} = (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \equiv (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n-1)(2n)!!} \equiv -\frac{1}{2n-1} \binom{-1/2}{n}, \end{cases}$$

il problema si riduce al controllo asintotico del rapporto  $(2n-1)!!/(2n)!!$ .

Mediante la espansione *S-DM* ridotta, la rappresentazione (155) assume l'andamento

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &\equiv \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \equiv \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n} (\Gamma(n+1))^2} \\ &\sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} (2\pi(2n))^{1/2}}{2^{2n} (n^n e^{-n} (2\pi n)^{1/2})^2} \frac{1 + \frac{1}{12(2n)} + \frac{1}{288(2n)^2} - \frac{139}{51840(2n)^3} - \frac{571}{2488320(2n)^4}}{\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4}\right)^2} \\ &= \frac{155520}{\pi^{1/2}} \frac{n^{7/2} (39813120n^4 + 1658880n^3 + 34560n^2 - 13344n - 571)}{(2488320n^4 + 207360n^3 + 8640n^2 - 6672n - 571)^2} \\ &\sim O(n^{-1/2}). \end{aligned} \quad (157)$$

Già con  $n = 7$ , l'errore del valore asintotico (157) rispetto al valore esatto è  $< 1.024 \cdot 10^{-7}$ , i.e.,  $< 1.024 \cdot 10^{-5} \%$ .

Nella programmazione numerica, la *forma di RUFFINI-HORNER* dell'Eq. (157) risulta, senza dubbio, da preferirsi per la sua rapida eseguibilità. Essa si scrive

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{155520}{\pi^{1/2}} \frac{n^{7/2} (96n(360n(48n(24n+1)+1) - 139) - 571)}{(48n(180n(24n(12n+1)+1) - 139) - 571)^2}, \quad (158)$$

con  $155520/\pi^{1/2} \approx 8.77427\ 64033 \cdot 10^4$ .

■

### 6.3 I Numeri di Bernoulli (Jakob)

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} (B_n/n!)u^n$  l'espansione in serie di potenze *dalla* famiglia  $\alpha$ -parametrica di funzioni ( $\dagger$ )

$$u \mapsto \mathcal{G}_B(u; \alpha) \Big|_{\alpha=0} \equiv \frac{ue^{\alpha x}}{e^u - 1} \Big|_{\alpha=0} \equiv \frac{u}{2} \left( \coth \frac{u}{2} - 1 \right) := g_B(u). \quad (159)$$



*Jakob Bernoulli* (1655-1705)

Le costanti  $B_n$  sono dette *Numeri di Bernoulli* mentre  $u \mapsto g_B(u)$  è la loro *funzione generatrice*. Probabilmente, il metodo più agevole per determinarle è quello iterativo eseguito sulla forma equivalente dell'Eq. (159)

$$1 \equiv \frac{e^u - 1}{u} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{(n+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} u^n,$$

ricordando che il prodotto *à-la* Cauchy di due serie di potenze convergenti, *almeno una* delle quali anche *assolutamente*, in uno *stesso* intervallo centrato in  $u = u_0$  è dato da (Teorema di MERTENS)

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u - u_0)^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (u - u_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (u - u_0)^n, \quad \text{con } c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Si trova immediatamente che  $B_0 = 1$  e  $B_1 = -1/2$ .

Poi, dall'Eq. (156), osservato che l'applicazione

$$u \mapsto g_B(u) - B_0 - B_1 u \equiv \sum_{n=2}^{+\infty} (B_n/n!)u^n \equiv \frac{u}{2} \left( \coth \frac{u}{2} - 1 \right) - 1 + \frac{u}{2} = \frac{u}{2} \coth \frac{u}{2} - 1$$

è una funzione *pari* (il termine variabile nell'ultimo membro destro è il prodotto di due funzioni *dispari*), segue che  $B_{2n+1} \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ .

È stato merito dell'intuito geniale di L. Euler (v. [28]) quello di aver scoperto la struttura generale dei *Numeri di Bernoulli* (di ordine pari), che si trovano essere proporzionali alle somme delle *Serie  $\zeta$  di Riemann* di argomento *pari* corrispondenti. Con notazione corrente, risulta,  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n). \quad (160)$$

La formula *fondamentale* (160) consente di determinare il raggio di convergenza  $\rho$  della serie di potenze rappresentativa di  $g_B(u)$ .

Tenuto conto che  $B_{2n+1} \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ , si ha

$$g_B(u) \equiv 1 - \frac{1}{2}u + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} u^{2n} \quad (161)$$

e, calcolando  $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2(n+1))! B_{2n}}{(2n)! B_{2(n+1)}} \right| = (2\pi)^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(2n)}{\zeta(2(n+1))} = (4\pi^2)^+$ , vs.  $u^2$  presa come

variabile indipendente, si conclude che l'espansione cercata di  $g_B(u)$  è *totalmente* convergente su ogni cerchio *chiuso* di raggio  $|u| < 2\pi$ , divergendo per  $|u| \geq 2\pi$ .

Allora, l'espansione della *Funzione di Binet* si scrive prontamente, verificando, dall'Eq. (112), che

$$g_B(u) \equiv u^2 \beta(u) - 1 + u/2 \tag{162}$$

e confrontando la rappresentazione (162) con l'Eq. (161). Si ha

$$\beta(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} u^{2(n-1)}, \tag{163}$$

valida per  $|u| < 2\pi$ . È evidente che  $\beta$  è una funzione *pari*. ■

### 6.4 L'espansione asintotica di Pringsheim-Bernoulli (PB)

In molte questioni che richiedono un'approssimazione numerica di asintotica di  $\Gamma(x)$ , il ricorso alternativo al calcolo di  $\ln \Gamma(x)$  si rivela *di gran lunga più conveniente*. Nell'espansione asintotica risultante in termini dei *Numeri di Bernoulli*, gli addendi contengono solo potenze *dispari* di  $x$ , non anche pari, come avviene nell'espansione *S-DM* (138). Di questa, s'è già detto, non è noto se esista né, se esiste, quale sia, una forma *chiusa* del termine generale. La *disparità* di tutte le potenze di  $x$  nell'espansione di  $\ln \Gamma(x)$  favorisce una maggiore stabilità algoritmica. Questa è una caratteristica particolarmente desiderabile, soprattutto, nella stima dei resti. □

La *Funzione di Binet*  $u \mapsto \beta(u)$  risulta generalmente continua in  $\mathbb{R}^+$ , presentando un punto di discontinuità eliminabile per  $u \equiv 0$ . Inoltre, la funzione  $\psi: u \mapsto -u$  ha un estremo superiore, l'unico, in corrispondenza di  $u \equiv 0$ , per il quale,  $\lim_{u \rightarrow 0^\pm} \beta(u) = (1/12)^- \neq 0$ , v. Eq. (112.1).

In tali circostanze, il valore della *trasformata di Laplace* di  $\beta$  (v. Eq. (137)), per  $x \gg 1$ ,

$$\mathcal{B}(x) := \mathcal{L}\{\beta(u)\} \equiv \int_0^{+\infty} \beta(u) e^{-xu} du,$$

è determinato in modo *dominante*, dal valore  $\psi(u) \equiv -u$  nell'intorno destro infinitesimo  $\mathcal{U}_\delta(0)$ , in conformità con il *Criterio di Laplace*. Allora, mediante la rappresentazione (163), la quale è *totalmente* (e, quindi, anche *uniformemente*) convergente per  $|u| \leq u_0 < 2\pi$ , segue che

$$\mathcal{B}(x) \sim \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} u^{2(n-1)} \right) e^{-xu} du \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} u^{2(n-1)} e^{-xu} du.$$

Integrando  $2(n-1)$  volte *per-parti* in  $\mathbb{R}^+$  la funzione  $u \mapsto u^{2(n-1)} e^{-xu}$  contenuta nel termine generale della serie, risulta

$$\mathcal{B}(x) \sim \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{n(2n-1)x^{2n}}. \tag{164}$$

L'espansione asintotica di  $PB$  per  $\ln \Gamma(x)$  è determinata immediatamente sostituendo l'espansione asintotica (164) nell'Eq. (119),

$$\ln \Gamma(x) \sim \ln((2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x}) + \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{n(2n-1)x^{2n}} . \quad (165)$$

La rappresentazione esponenziale  $PB$  equivalente si può scrivere nella forma

$$\Gamma(x) \sim (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x} \left( e^{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{n(2n-1)x^{2n}}} \right)^{x/2} . \quad (165.1)$$

La traslazione  $x \mapsto x + 1$  nell'Eq. (165.1), seguita dall' $\mathcal{M}$ -espansione del fattore esponenziale, riproduce la espansione asintotica  $S$ - $DM$  di  $\Gamma(x)$  (v. **Esercizio 5**, P. 72), come conferma della proprietà generale di *esistenza e unicità* di ogni espansione asintotica (v. [48]), indipendentemente dalla rappresentazione specifica. □

Confrontando, per  $x \gg 1$ , l'espressione (165.1) con l' $\mathcal{M}$ -espansione di  $\sinh(1/x)$  in  $\mathcal{U}(+\infty)$  ( $\ddagger$ ), R. H. Windschitl è risalito (2002) a una rappresentazione asintotica semplice e accurata di  $\Gamma(x)$ :

$$\Gamma(x) \sim (2\pi)^{1/2} x^{(3x-1)/2} e^{-x} (\sinh(1/x) + \xi_{(N)}(x) + O(x^{-(2N+9)}))^{x/2} . \quad (165.2)$$

Il termine  $\xi_{(N)}$  denota la somma *finita* di un numero  $N + 1$  *arbitrario* e appropriato di addendi razionali, proporzionali a potenze *negative pari* di  $x$ ; l'assegnazione di  $N$  determina il livello di precisione ottenibile (e viceversa). Una lettura attenta e critica richiederà una verifica della forma asintotica (165.2) e dell'espressione generale di  $\xi_{(N)}(x)$ :

$$\xi_{(N)}(x) \equiv \frac{1}{810 x^7} \left( 1 + \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{x^{2n}} \right) . \quad (165.2.1)$$

Per  $N = 5$ , con la *formula di MILLER* per il calcolo dei coefficienti dell'espansione di una potenza intera positiva di una *serie di potenze*, si determina (chi scrive (CM), 2006) la somma a coefficienti *esatti* di segno *alternato*:

$$x \mapsto \xi_{(6)}(x) \equiv \frac{1}{810 x^7} \left( 1 - \frac{16.3}{21 x^2} + \frac{101.9}{84 x^4} - \frac{1012783.21}{349272 x^6} + \frac{18637321.13}{1886976 x^8} - \frac{839102371.213}{18162144 x^{10}} \right) \quad \hookrightarrow (165.2.2)$$

La convenienza del modello generale (165.2) sta nella facilità della sua implementazione, anche su una calcolatrice scientifica programmabile. Se si arresta  $\xi_{(N)}(x)$  al solo suo primo termine, l'Eq. (165.2), per  $x > 10$ , fornisce esatte *almeno* le prime 8 cifre; usando  $\xi_{(5)}(x)$ , le cifre iniziali esatte nella stima di  $149! \equiv \Gamma(150)$  sono 28. Questo risultato supera sensibilmente le 14 e le 22 *prime cifre esatte* determinabili, rispettivamente, per la stessa stima, con le Eq.i (138) e (152.1), fissando con l'Eq. (165.2), secondo chi scrive, uno dei modelli asintotici più flessibili e 'robusti' disponibili attualmente (2023). Al tempo stesso, però, si consideri anche [81] molto attentamente. □

Infine, dalla proliferazione inarrestabile di rappresentazioni asintotiche di  $\Gamma(x)$  per  $x \gg 1$ , vale la pena di citare l'approssimazione di G. Nemes (2006), semplice e precisa, ottenuta da un'analisi in *frazioni continue*, la quale dà un termine di errore proporzionale a  $x^{-8}$ :

$$\Gamma(x) \sim (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x} e^{\frac{210x^2+53}{360x(7x^2+2)}} (1 + O(x^{-8})). \tag{165.3}$$

È quasi superfluo osservare che, con espressioni del tipo delle Eq.i (165.1) e (165.2), è norma imprescindibile eseguire il calcolo numerico in rappresentazione *logaritmica* allo scopo di evitare possibili *overflows* di memoria RAM. Questo è particolarmente necessario in presenza di iterazioni che dipendono, più o meno esplicitamente, dai *Numeri di Bernoulli*,  $B_{2n}$ , che, è noto, *divergono* molto rapidamente al crescere dell'indice  $2n$ .

■

---

(†) Se ne trova una discussione più dettagliata, e.g., nel math-notebook: **Determinazione di serie di potenze in  $\mathbb{R}$  dalle Funzioni generatrici di Bernoulli e di Euler** (v. Eq.i (7) e (9)).

(‡) Dalla rappresentazione asintotica (165.1), si definisca la *serie*

$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{n(2n-1)x^{2n}} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)x^{2(n+1)}}.$$

Dalla *seconda* forma in serie di  $S(x)$ , segue che

$$\Gamma(x) \sim (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x} (e^{S(x)})^{x/2} \equiv (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x} \left( \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{\nu!} (S(x))^\nu \right)^{x/2}.$$

Le potenze intere  $\nu \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$  della *serie*  $S(x)$  possono essere espanse, al grado desiderato, con la *formula di Miller* (v. sotto). Infine, il confronto che determina la rappresentazione asintotica (165.2) va condotto vs. l'  $\mathcal{M}$ -espansione nella variabile  $t := 1/x$  in  $\mathcal{U}(+\infty)$ ,

$$\sinh(1/x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)! x^{2n+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120x^5} + \frac{1}{5040x^7} + \frac{1}{362880x^9} + \frac{1}{39916800x^{11}} + \dots$$

### Algoritmi utilizzati

- a. Eccetto che per  $B_0 = 1, B_1 = -1/2$  e  $B_{2n+1} \equiv 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ , i *Numeri di Bernoulli* restanti, tutti di indice *pari*, sono calcolabili mediante la formula auto-iterativa (cf/c **Esercizio 2**, P. 72)

$$B_{2n} := \frac{1}{2} - (2n)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{2k}}{(2n-2k+1)!(2k)!};$$

- b. la *formula di Miller* (v. [42], [58]) per il calcolo dei termini dell'espansione di una potenza intera  $\nu \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$  di una serie di potenze è espressa dall'algoritmo

$$\mathfrak{A} : \begin{cases} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right)^\nu \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n : \downarrow \\ \downarrow c_0 = a_0^\nu \quad \wedge \quad c_{n \geq 1} = \frac{1}{n a_0} \sum_{k=1}^n ((\nu+1)k - n) a_k c_{n-k}. \end{cases}$$

### Richiami sulle Serie Asintotiche

Può essere di qualche utilità richiamare brevemente una definizione rigorosa di *serie asintotica* (in questo contesto, *divergente*), dovuta a POINCARÉ (J. H., 1854-1912) [52]:

La serie *formale*, *non necessariamente convergente*,

$$h(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{x^n} \tag{166}$$

costituisce un'espansione (o *serie*) *asintotica* rappresentativa di  $f(x)$  per  $x \in \mathcal{U}(\pm\infty)$ , associata alla successione asintotica  $\{h(x)c_n x^{-n}\}$ , e si scrive

$$f(x) \sim h(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{x^n}, \tag{167}$$

se, per  $|x| \rightarrow +\infty$  e  $\forall N$  fissato, risulta definitivamente

$$R_N(x) := f(x) - h(x) \sum_{n=0}^N c_n x^{-n} = o(h(x)x^{-N}).$$

D'altra parte, poiché

$$R_N(x) = h(x)c_{N+1}x^{-(N+1)} + o(h(x)x^{-(N+1)}),$$

ne consegue che la somma ridotta  $h(x) \sum_{n=0}^N c_n x^{-n}$  è una approssimazione di  $f(x)$  in  $\mathcal{U}(\pm\infty)$  caratterizzata da un *errore* corrispondente al resto  $N$ -simo della serie,  $R_N(x) \equiv O(h(x)x^{-(N+1)})$ , quindi, dello stesso ordine di grandezza del primo termine omissso.

Comunque,  $\forall x$  assegnato, va tenuto presente che si ha sempre  $\lim_{N \rightarrow +\infty} |R_N(x)| = +\infty$ .



*Jules Henri Poincaré*

Una tale espansione asintotica di  $f(x)$  in  $\mathcal{U}(\pm\infty)$ , se esiste, è *unica* e i suoi coefficienti sono determinabili iterativamente dal limite  $c_{N+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{N+1}R_N(x)/h(x))$ .

Però, *non vale* la proposizione inversa. Infatti, una serie asintotica è tale rispetto a un'intera classe di funzioni, le quali differiscono tra loro per funzioni sub-dominanti!

La somma parziale  $N$ -sima estratta dalla serie formale (166),  $h(x) \sum_{n=0}^N c_n x^{-n}$ , costituisce l'*approssimazione asintotica di  $f(x)$  all'ordine  $N$*  (è una somma di  $N+1$  termini). Il primo (*leading*) termine dell'espansione,  $c_0 h(x)$ , corrisponde al termine *dominante*.

In generale, se per  $|x| \in \mathcal{U}(+\infty)$ , si ha che  $R_N(x) = O(h(x)x^{-N-1})$  quando  $n \leq \bar{n}$ , si dice che la serie (166) è l'espansione asintotica di  $f(x)$  in  $\mathcal{U}(\pm\infty)$  fino al termine  $(\bar{n}+1)$ -esimo.

Se una funzione  $f(x)$  possiede lo sviluppo asintotico (167) e se  $h(x)$  resta definitivamente di segno uniforme in  $\mathcal{U}(\pm\infty)$ , allora

$$g(x) := \frac{f(x)}{h(x)} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad (167.1)$$

i.e.,  $g(x)$  possiede lo sviluppo asintotico (167), associato alla successione  $\{c_n x^{-n}\}$ , indicato come *serie asintotica di potenze reciproche* (positive).

Poi, basterà ricordare, che la serie asintotica (166) può essere integrata termine-a-termine se  $f(x)$  è integrabile in  $\mathcal{U}(\pm\infty)$  ma, in generale, *non* è derivabile termine-a-termine in  $\mathcal{U}(\pm\infty)$ , a meno che sia già garantita, in  $\mathcal{U}(\pm\infty)$ , la regolarità e la convergenza *uniforme* della serie formale. Solo in tale circostanza, è ammissibile scrivere

$$h(x) \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{d}{dx}(x^{-n}) \equiv -\frac{h(x)}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nc_n}{x^n}. \quad (168)$$

Infine, tra i risultati più significativi delle Serie Asintotiche, soprattutto in ambito applicativo, c'è il già citato, importante

**Lemma di Watson** (formulazione in  $\mathbb{R}^+$ ):

Sia  $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  una funzione *generalmente continua*, tale che

$$f(t) \sim t^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

definitivamente per  $t = o(1)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Inoltre, la funzione integrale (*à-la Laplace*)

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

sia, definitivamente, semplicemente convergente per  $x \rightarrow +\infty$ .

Allora, per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $F$  possiede il comportamento asintotico

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \Gamma(n + \lambda) x^{-(n+\lambda)}.$$

■

Una trattazione classica, fondamentale e completa dei processi asintotici, includente un'analisi quantitativa accurata dell'errore, è presentata in [5]. Si consultino anche [4] e [48].

**Esercizio 1**

Assegnata la terna ordinata  $\{\alpha, c \ln b, \mu\} \subset (\mathbb{R}^+)^3$ , si generalizzi l'Integrale Gaussiano (148), verificando (cf/c Esercizio 6, P. 19) che

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha b^{-ct^\mu} dt = \mu (c \ln b)^{-(\alpha+1)/\mu} \Gamma((\alpha+1)/\mu).$$

**Esercizio 2**

Si dimostri per induzione vs.  $n \in \mathbb{Z}^+$  che vale la formula auto-iterativa generale

$$B_n := -n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n+1-k)!}.$$

Con essa, si costruisca la tabella dei Numeri di Bernoulli da  $B_0$  a  $B_{20}$ .

**Esercizio 3** [alquanto impegnativo]

Si dimostri l'Eq. fondamentale (160).

[e.g., cf/c il math-notebook: Determinazione di serie di potenze in  $\mathbb{R}$  dalle Funzioni di Bernoulli e di Euler.]

**Esercizio 4**

Si verifichino le espansioni in serie di potenze seguenti e i cerchi di convergenza rispettivi:

4.1  $\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| \in (0, \pi);$

4.2  $\cot x (\equiv i \coth ix) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| \in (0, \pi);$

4.3  $\tan x (\equiv \cot x - 2 \cot 2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| \in [0, \pi/2);$

4.4  $\tanh x (\equiv -i \tan ix) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| \in [0, \pi/2);$

4.5  $\csc x (\equiv \cot x + \tan(x/2)) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2(2^{2n-1} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| \in (0, \pi);$

4.6  $\operatorname{csch} x (\equiv i \csc ix) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2^{2n-1} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| \in (0, \pi).$

**Esercizio 5**

Si verifichi esplicitamente la proprietà generale di unicità di una rappresentazione asintotica in serie dall'identità tra quelle S-DM e PB di  $\Gamma$ , Eq.i (138) e (165.1), vs. l'argomento  $x$  o  $x+1$ .

**Esercizio 6**

Si verifichi il rapporto asintotico tra Simboli di Pochhammer, per  $n \rightarrow +\infty \wedge \{\alpha, \mu\} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ ,

$$\frac{(\alpha)_n}{(\mu)_n} \sim \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha)} e^{\mu-\alpha} \frac{(n+\alpha-1)^{n+\alpha-1/2}}{(n+\mu-1)^{n+\mu-1/2}}.$$

Quanto vale il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((\alpha)_n / (\mu)_n)$ ? Lo si determini per tutti i casi possibili.





*Augustin Louis Cauchy (1789-1857)*

## capitolo VII

# Applicazioni varie

Come strumenti di calcolo, le *Funzioni B* e, in particolare,  $\Gamma$  forniscono non solo rappresentazioni semplificatrici e sintetiche, da gran tempo organizzate, tabulate e programmate estesamente, ma, anche, ricorrono nelle caratterizzazioni di strutture simmetriche e/o iterative in popolazioni dense di individui *identici* o in insiemi di eventi di caratteristiche *identiche* e ricorrenti con frequenza elevata, i.e., di strutture che, in senso lato, manifestano *comportamenti stocastici*.

### Problema 1

Iniziando da uno studio dell'integrale *indefinito*

$$\Xi(x) := \int \frac{dx}{x^x}, \quad (169)$$

si determini una rappresentazione in serie equivalente del *numero*

$$\Xi(1) := \int_0^1 \frac{dx}{x^x}.$$

### Soluzione

Poiché è  $x \in \mathbb{R}^+$ , Eq. (1), la funzione integranda è rappresentabile, per il *Criterio di Weierstrass*, in serie convergente uniformemente in qualsiasi sotto-intervallo *compatto* (per prolungamento analitico a  $x = 0$ )  $\bar{\mathcal{K}} := [0, x] \equiv \bar{\mathcal{K}}(x)$ . Dall'*additività* integrale vs. l'intervallo di integrazione, la scelta di  $x = 0$  come punto iniziale di *propagazione* di  $\Xi(x)$  non pregiudica la generalità della discussione. Infatti,  $\forall \bar{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^+$ , essendo

$$1/x^x \equiv e^{-x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!},$$

risulta che  $(-x \ln x)^n / n! \leq e^{1/e} \equiv \max_{\mathbb{R}^+}(1/x^x)$ . Inoltre, la funzione  $x \mapsto (-x \ln x)^n$  è  $\mathcal{K}$ -integrabile in  $\bar{\mathcal{K}}$  in senso generalizzato  $\forall n$ . La commutabilità che *ne consegue* tra le operazioni di *integrazione* e di *somma di un numero infinito di addendi* rende identiche le scritture integrali *à-la Lagrange-Picard*

$$\Xi(x) = \int_{\bar{\mathcal{K}}(x)}^b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n (\ln t)^n dt + C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^n (\ln t)^n dt + C := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathfrak{J}_{n,n}(x) + C. \quad (170)$$

Espandendo  $\mathfrak{J}_{n,n}(x)$  con integrazioni *per-parti* e indicando con il simbolo  $\mathfrak{J}_{n,n-1}$  l'integrale iterato *discendente* vs. la *sola* (!) potenza  $(\ln t)^{n-1}$ , si osserva che il fattore integrando  $t^n$  *persiste* in  $\mathfrak{J}_{n,n-1}$ . Infatti,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{n,n}(x) &\equiv \int_0^x t^n (\ln t)^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^n \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} d((\ln t)^n) \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^n - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} \left( n (\ln t)^{n-1} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^n - \frac{n}{n+1} \int_0^x t^n (\ln t)^{n-1} dt \\ &\equiv \frac{1}{n+1} (x^{n+1} (\ln x)^n - n \mathfrak{J}_{n,n-1}(x)) = \dots = \frac{n!}{n+1} x^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k}}{k!(n+1)^{n-k}} (\ln x)^k. \end{aligned} \quad (171)$$

Sostituendo l'espansione (171) nell'Eq. (170), risulta, riducendo l'espressione integranda fino a  $t^n (\ln x)^0 \equiv t^n$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n+1)^{n-k}} (\ln x)^k + C = \dots \quad \text{e, dopo la traslazione indiciale } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}, \\ \dots &\equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \left( \frac{1}{\Gamma(n)} (\ln x)^{n-1} - \frac{1}{n\Gamma(n-1)} (\ln x)^{n-2} + \frac{1}{n^2\Gamma(n-2)} (\ln x)^{n-3} - \dots \right) \\ &\quad \mapsto \dots \pm \frac{1}{n^{n-3}\Gamma(3)} (\ln x)^2 \mp \frac{1}{n^{n-2}\Gamma(2)} \ln x + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{n-1}\Gamma(1)} \Big) + C. \end{aligned} \quad (172)$$

I segni alternativi degli addendi terminali della somma *interna* all'Eq. (172) corrispondono alla possibilità che  $n$  sia *pari* (-) o *dispari* (+), rispettivamente. Si ricordi che  $\Gamma(2) \equiv \Gamma(1) = 1$ .

Infine, poiché la convergenza uniforme della serie (172) implica che il valore assoluto del suo resto  $n$ -simo generale sia *infinitesimo*, tale rappresentazione di  $\mathfrak{E}(x)$  è sempre arrestabile a una somma *finita arbitraria* opportuna.

Quando  $x = 1$ , tutti i termini logaritmici nell'Eq. (172) sono nulli, così da determinare il numero-integrale

$$\mathfrak{E}(1) \equiv \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n^{n-1}} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \approx 1.2912859971. \quad (172.1)$$

### Problema 2

L'alta *simmetria fisica* di sistemi dinamici interagenti si caratterizza, spesso, in associazione con un'alta *simmetria geometrica*, azimutale-piana (cilindrica o sferica). In Meccanica Analitica, alcuni campi di *forza centrale*, con andamenti spaziali  $\propto \rho^{-\alpha}$  ( $\alpha \geq 2$ ), inducono moti lungo traiettorie *chiuse*, le cui lunghezze dipendono dal calcolo di integrali parametrici definiti della famiglia  $\mathcal{H}(p, q) := \int_0^q (q^p - u^p)^{-1/2} du$ , con  $\{p, q\} \subset \mathbb{R}^+$ .

Si calcoli la lunghezza  $\ell$  dell'orbita *polare-piana*  $(\lambda, \rho)$  del moto relativo di un sistema binario di corpi cosmici (puntiformi o sferico-omogenei), per la quale, il *prodotto* delle distanze dei corpi da due punti fissi, i *fuochi*, è una *costante* uguale al *quadrato* della semi-distanza tra i fuochi stessi.

### Soluzione

Riscritto, nella forma equivalente,  $\mathcal{H}(p, q) \equiv q^{-p/2} \int_0^q (1 - (u/q)^p)^{-1/2} du$ , la ridefinizione  $u := qt^{1/p}$  genera il cambiamento  $\int_0^q (du) \mapsto \int_{t=0}^1 (qt^{1/p-1} dt/p)$  dell'operatore integrale. Ne segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p, q) &= \frac{q^{1-p/2}}{p} \int_0^1 t^{1/p-1} (1-t)^{-1/2} dt \equiv \frac{q^{1-p/2}}{p} B(1/p, 1/2) \equiv \frac{q^{1-p/2}}{p} \frac{\Gamma(1/p)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/p+1/2)} \\ &= \frac{q^{1-p/2} \pi^{-1/2}}{p} \frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p+1/2)}. \end{aligned} \quad (173)$$

L'identificazione di  $(\lambda, \rho)$  discende direttamente dalla sua definizione geometrica. Collocati i fuochi in  $(\pm c; 0)$ , con  $c > 0$ , su un asse  $X$  prefissato (simmetria focale  $Y$ -assiale), si scrive

$$((x - c)^2 + y^2)^{1/2} ((x + c)^2 + y^2)^{1/2} = c^2. \quad (174)$$

Elevando al quadrato i membri dell'Eq. (174) e semplificando i termini, si ottiene

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0, \quad (175)$$

che è la rappresentazione canonica cartesiana della *Lemniscata di Bernoulli*. In coordinate polari-piane, tenendo conto del nodo semplice di  $(\lambda, \rho)$  nell'origine, l'Eq. (175) si riduce alla forma nota

$$\rho \equiv \rho(\varphi) = \kappa(\cos \varphi)^{1/2}, \quad (176)$$

dove  $\varphi \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$  e  $\kappa := 2^{1/2}c$  è la *semi-lunghezza dell'asse principale* di  $(\lambda, \rho)$ .

La *doppia* simmetria assiale della *Lemniscata* consente di scrivere, nella metrica euclideo-pitagorica,

$$\ell := 4 \int_0^{\pi/4} \|\rho'(\varphi)\| d\varphi \equiv 4 \int_0^{\pi/4} ((\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2)^{1/2} d\varphi. \quad (177)$$

In ogni intervallo angolare *compatto*  $\Delta_\varphi \subset (0, \pi/4)$ , la linea  $(\lambda, \rho)$  risulta *regolare*. Dall'Eq. (176), si calcola

$\rho'(\varphi) = -\kappa \frac{\sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi)^{1/2}} \equiv -2\kappa \frac{\tan \varphi}{(1 - (\tan \varphi)^4)^{1/2}} < 0 \quad \forall \varphi \in \Delta_\varphi$ . Quindi, se  $\varphi$  *cresce* in  $\Delta_\varphi$ , ne segue che, in  $\Delta_\varphi$ ,  $\rho(\varphi)$  *decregge* e, poiché,

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \Delta_\varphi, \exists! \frac{1}{\rho(\varphi)} \equiv \varphi(\rho) = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{\rho^2}{\kappa^2} \right), \\ \frac{1}{\rho'(\varphi)} = \varphi'(\rho) = -\frac{\rho}{(\kappa^4 - \rho^4)^{1/2}} \end{cases},$$

si può ricavare il valore dell'integrale (177) invertendo la variabile  $\varphi$  di integrazione in  $\Delta_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \ell &= 4 \int_0^{\pi/4} \left( 1 + \frac{(\rho(\varphi))^2}{\rho'(\varphi)^2} \right)^{1/2} |\rho'(\varphi)| d\varphi \equiv 4 \int_\kappa^0 (1 + \rho^2 (\varphi'(\rho))^2)^{1/2} |d\rho|, \\ &\hspace{15em} \text{in rappresentazione } \textit{inversa} \text{ di quella dell'Eq. (177),} \\ &= 4 \int_\kappa^0 \left( 1 + \rho^2 \left( -\frac{\rho}{(\kappa^4 - \rho^4)^{1/2}} \right)^2 \right)^{1/2} (-d\rho) = 4 \kappa^2 \int_0^\kappa \frac{d\rho}{(\kappa^4 - \rho^4)^{1/2}}, \quad (\rho \text{ decresce in } \Delta_\varphi). \end{aligned}$$

In tal modo, il risultato è ricondotto al calcolo dell'integrale  $4\kappa^2 \mathcal{H}(4, \kappa)$  e, con l'Eq. (173), si ottiene, ricordando anche la *Proprietà di Riflessione*, Eq. (16),

$$\begin{aligned} \ell &= 4\kappa^2 \frac{\pi^{1/2}}{4\kappa} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \equiv \kappa \pi^{1/2} \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\Gamma(1/4)\Gamma(1-1/4)} = \kappa \pi^{1/2} \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\pi / \sin(\pi/4)} \\ &= \frac{(\Gamma(1/4))^2}{(2\pi)^{1/2}} \kappa \equiv \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\pi^{1/2}} c, \quad \text{in unità arbitrarie di lunghezza.} \end{aligned}$$

Dunque, la lunghezza  $\ell \equiv \ell(\kappa)$  della *Lemniscata di Bernoulli* è proporzionale alla semi-lunghezza  $\kappa$  del suo asse principale di simmetria, i.e., alla distanza dei *fuochi* dal *nodo* della linea, con un *coefficiente geometrico* esprimibile in termini di *Funzione  $\Gamma$* . Con il polinomio di *aggiustamento ottimale* di Hastings, Eq. (15), o con l'*algoritmo di Lanczos*, v. **Appendice 1**, o altrimenti, si calcola  $\Gamma(1/4) \approx 3.6256099082$  e, quindi, il coefficiente geometrico di  $(\lambda, \rho)$ ,

$$\frac{(\Gamma(1/4))^2}{(2\pi)^{1/2}} \approx 5.2441151086. \quad \blacksquare$$

**Esempio 1**

In molti contesti fondamentali, le statistiche dei sistemi collettivi (di molte particelle) *fermionici* (a spin *semi-dispari*) e *bosonici* (a spin *intero*) dipendono, per il calcolo delle densità di probabilità rispettive di occupazione degli stati quantici (i.e., del numero di particelle specifiche per unità di energia o di frequenza), a *trasformate integrali di Mellin*.

Il nucleo (*kernel*) integrale *à-la* Mellin è rappresentato, in generale, dalla potenza  $x^{\lambda-1}$ , essendo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tali forme integrali *fermioniche* (+) \ *bosoniche* (-) si riconducono, frequentemente, alle due espressioni corrispondenti

$$\mathcal{M}_{\pm}(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{e^x \pm 1} dx. \quad (\dagger)$$

Per calcolare l'integrale parametrico  $\mathcal{M}_{\pm}(\lambda)$ , specificandone le condizioni analitiche appropriate di esistenza in  $\mathbb{R}$  vs. parametro  $\lambda$ , è necessario, prima di tutto, determinare l'insieme dei valori del parametro  $\lambda$ , per i quali,  $\mathcal{M}_{\pm}(\lambda) < +\infty$  (i.e., è convergente).

Definita per brevità  $\phi_{\lambda}(x) := x^{\lambda-1}/(e^x + 1)$  l'espressione integranda, si osserva che

- se  $x \in \mathcal{U}(+\infty)$  è  $\phi_{\lambda}(x) = o(1)$ , di ordine  $> \omega \in (1, +\infty)$  vs. l'infinitesimo principale  $1/x$  e, pertanto, che essa è integrabile in  $\mathcal{U}(+\infty) \forall \lambda$ ;
- se  $x \in \mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ , allora  $\phi_{\lambda}(x) \sim x^{\lambda-1}/2$ , che risulta integrabile solo se  $\lambda \in (1, +\infty)$ .

In conclusione,  $\mathcal{M}_{\pm}(\lambda) < +\infty$  solo per  $\lambda \in (1, +\infty)$ .

$\mathcal{M}_{\pm}(\lambda)$  non è rappresentabile *in termini finiti* mediante funzioni elementari. La sua integrazione *in serie* appropriata inizia dividendo sia il numeratore che il denominatore di  $\phi_{\lambda}(x)$  per  $e^x$ ,

$$\phi_{\lambda}(x) \equiv \frac{x^{\lambda-1} e^{-x}}{1 + e^{-x}} = x^{\lambda-1} e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kx} = x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} \equiv x^{\lambda-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} e^{-kx}.$$

Poiché  $[0, +\infty)$  è l'intervallo di integrazione, il fattore  $(1 + e^{-x})^{-1}$  corrisponde alla somma della *Serie Geometrica* di ragione variabile  $r(x) \equiv -e^{-x} \in [-1, 0)$ .

Essendo  $x^{\lambda-1} e^{-kx} \leq x^{\lambda-1} = o(1)$  in  $\mathcal{U}_{\delta^+}(0)$ , la rappresentazione (1) di  $\phi_{\lambda}(x)$  è uniformemente convergente in  $[0, +\infty)$  per il *criterio di Weierstrass* e, pertanto, è lecito scambiare l'ordine delle operazioni di somma infinita e di integrazione. Si scrive:

$$\mathcal{M}_{\pm}(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-kx} dx. \quad (178)$$

Con la sostituzione  $x := t/k$ , il cui elemento differenziale è  $dx = dt/k$ , si ha

$$\mathcal{M}_{\pm}(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\lambda}} \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt = \Gamma(\lambda) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\lambda}} \equiv \Gamma(\lambda) (-\eta(\lambda)).$$

Poiché, per  $\lambda \in (1, +\infty)$ , la *Serie numerica alternata di Riemann* di ordine  $\lambda$ ,  $\eta(\lambda)$ , converge *assolutamente* e, quindi, *incondizionatamente* (Teorema di DIRICHLET), vale il *riordinamento*

$$-\eta(\lambda) = 1 - \frac{1}{2^{\lambda}} + \frac{1}{3^{\lambda}} - \frac{1}{4^{\lambda}} + \dots \equiv \left( 1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \frac{1}{3^{\lambda}} + \frac{1}{4^{\lambda}} + \dots \right) - 2 \left( \frac{1}{2^{\lambda}} + \frac{1}{4^{\lambda}} + \frac{1}{6^{\lambda}} + \frac{1}{8^{\lambda}} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\lambda} - 2 \left( \frac{1}{2^\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \frac{1}{3^\lambda} + \frac{1}{4^\lambda} + \dots \right) \right) = (1 - 2^{1-\lambda}) \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\lambda} \\
 &\equiv (1 - 2^{1-\lambda}) \zeta(\lambda).
 \end{aligned}$$

Al solito, il simbolo  $\zeta$  indica la *Funzione Zeta di Riemann* di ordine (o argomento)  $\lambda \in (1, +\infty)$ . Pertanto, si ottiene

$$\mathcal{M}_+(\lambda) = (1 - 2^{1-\lambda}) \Gamma(\lambda) \zeta(\lambda) \equiv -\Gamma(\lambda) \eta(\lambda). \tag{179}$$

Con procedimento identico (esercizio utile), si trova che,  $\forall \lambda \in (1, +\infty)$ ,

$$\mathcal{M}_-(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\lambda) \zeta(\lambda) \equiv -\frac{\Gamma(\lambda) \eta(\lambda)}{1 - 2^{1-\lambda}} \equiv \frac{\mathcal{M}_+(\lambda)}{1 - 2^{1-\lambda}}. \tag{180}$$

(†) cf/c il math-notebook: **Logaritmi e Funzioni Integrali Logaritmiche Speciali, Problema 12.**

**Esempio 2**

La *famiglia integrale multi-parametrica di Dirichlet* dà luogo a una delle  $\Gamma$ -rappresentazioni più note. *Integrali di Dirichlet* si incontrano nei calcoli sia di masse sia di cariche diffuse sia di campi, tutti dedotti da densità proporzionali a potenze delle variabili dello spazio delle configurazioni o in quello delle fasi, sia di centroidi che di momenti di inerzia in Fisica Classica e Quantistica.

Come riferimento, si consideri la famiglia degli *Integrali Tripli di Dirichlet*

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu, \nu) := \iiint_{\Omega} f((x/a)^p + (y/b)^q + (z/c)^r) x^{\lambda-1} y^{\mu-1} z^{\nu-1} dx dy dz, \tag{181}$$

dove,  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ ,  $\forall \{\lambda, \mu, \nu\} \subset \mathbb{R}^+$  e il dominio di integrazione è la regione 3-dim

$$\Omega = \{(x; y; z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 : (x/a)^p + (y/b)^q + (z/c)^r - 1 \leq 0 \wedge \{a, b, c, p, q, r\} \subset \mathbb{R}^+\}$$

contenuta nel 1° *ottante* cartesiano, per la quale, la frontiera  $\partial\Omega$  è costituita dai quadranti delle coordinate positive e dalla superficie  $(\Sigma, \mathbf{r})$ . La rappresentazione implicita di questa è

$$(x/a)^p + (y/b)^q + (z/c)^r - 1 = 0.$$

La trasformazione delle variabili di integrazione

$$\begin{cases} x := au^{1/p} \equiv x(u, v, w) \\ y := bv^{1/q} \equiv y(u, v, w) \\ z := cw^{1/r} \equiv z(u, v, w) \end{cases},$$

corrispondente al (*valore assoluto* del) determinante *jacobiano*

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \frac{abc}{pqr} u^{1/p-1} v^{1/q-1} w^{1/r-1},$$

converte l'integrale (181) nell'integrale

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{a^\lambda b^\mu c^\nu}{pqr} \iiint_{\mathcal{Q}} f(u+v+w) u^{\lambda/p-1} v^{\mu/q-1} w^{\nu/r-1} du dv dw, \quad (182)$$

per il quale, la regione *trasformata* di integrazione è costituita dal triedro retto  $\mathcal{Q}$  situato nel 1° ottante, con il vertice principale nell'origine e con la base sul piano di equazione  $w = 1 - u - v$ ,

$$\mathcal{Q} := \{(u; v; w) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 : u + v + w - 1 \leq 0\}.$$

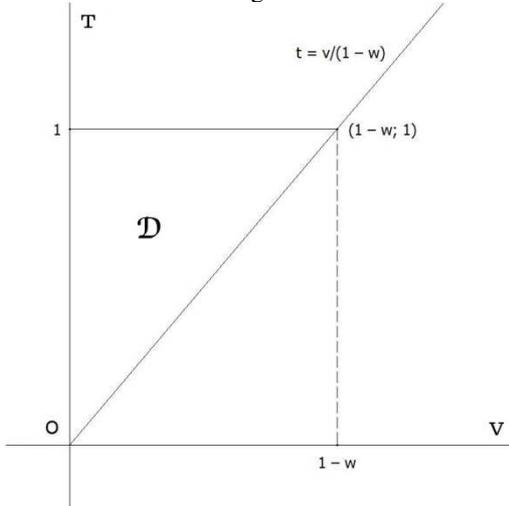
Procedendo con le riduzioni, dopo aver riscritto

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{a^\lambda b^\mu c^\nu}{pqr} \int_0^1 w^{\nu/r-1} dw \int_0^{1-w} v^{\mu/q-1} dv \int_0^{1-v-w} f(u+v+w) u^{\lambda/p-1} du, \quad (183)$$

si consideri, inizialmente, la sola  $u, v$ -integrazione doppia. Si ponga  $u \equiv u(t) := v(1/t - 1)$ , a cui corrisponde la trasformazione  $\int_0^{1-v-w} (du) \mapsto \int_1^{w/(1-w)} (-v dt/t^2)$  dell'operatore integrale. Così,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &:= \int_0^{1-w} v^{\mu/q-1} dv \int_0^{1-v-w} f(u+v+w) u^{\lambda/p-1} du \\ &= \int_0^{1-w} v^{\mu/q-1} dv \int_{v/(1-w)}^1 f(v/t+w) (v(1-t)/t)^{\lambda/p-1} (v dt/t^2) \\ &= \int_0^{1-w} v^{\lambda/p+\mu/q-1} dv \int_{v/(1-w)}^1 f(v/t+w) (1-t)^{\lambda/p-1} t^{-\lambda/p-1} dt. \end{aligned}$$

Fig. 6



Lo scambio *ammissibile* dell'ordine delle integrazioni dà

$$\int_{v/(1-w)}^1 (dt) \mapsto \int_0^1 (dt) \wedge \int_0^{1-w} (dv) \mapsto \int_0^{(1-w)t} (dv),$$

come si verifica prontamente dal controllo grafico del dominio  $\mathcal{D}$  di integrazione. Risulta l'integrale *doppio*

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \int_0^1 (1-t)^{\lambda/p-1} t^{-\lambda/p-1} dt \circ \\ &\quad \circ \int_0^{(1-w)t} f(v/t+w) v^{\lambda/p+\mu/q-1} dv. \end{aligned}$$

Ora, posto  $v \equiv v(t) := t\xi$ , che corrisponde all'identità operatoriale  $\int_0^{(1-w)t} (dv) \equiv \int_0^{1-w} (t d\xi)$ , segue che

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \int_0^1 (1-t)^{\lambda/p-1} t^{-\mu/q-1} dt \int_0^{1-w} f(\xi+w) \xi^{\lambda/p+\mu/q-1} d\xi \\ &\equiv B(\lambda/p, \mu/q) \int_0^{1-w} f(\xi+w) \xi^{\lambda/p+\mu/q-1} d\xi \\ &\equiv \frac{\Gamma(\lambda/p) \Gamma(\mu/q)}{\Gamma(\lambda/p + \mu/q)} \int_0^{1-w} f(\xi+w) \xi^{\lambda/p+\mu/q-1} d\xi. \end{aligned} \quad (184)$$

Sostituendo l'espressione (184) di  $\mathfrak{J}$  nell'Eq. (183), si ottiene

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{a^\lambda b^\mu c^\nu}{pqr} \frac{\Gamma(\lambda/p)\Gamma(\mu/q)}{\Gamma(\lambda/p + \mu/q)} \int_0^1 w^{\nu/r-1} dw \int_0^{1-w} f(\xi + w) \xi^{\lambda/p + \mu/q - 1} d\xi. \quad (185)$$

Allo stesso modo di quanto fatto per l'integrale  $\mathfrak{J}$ , si prosegue ponendo  $\xi \equiv \xi(\eta) := w(1/\eta - 1)$ , con la trasformazione conseguente,  $\int_0^{1-w} (d\xi) \mapsto \int_w^1 (-w d\eta/\eta^2)$ , dell'operatore integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \int_0^1 w^{\nu/r-1} dw \int_0^w f(\xi + w) \xi^{\lambda/p + \mu/q - 1} d\xi \\ &= \int_0^1 w^{\nu/r-1} dw \int_w^1 f(w/\eta) (w(1-\eta)/\eta)^{\lambda/p + \mu/q - 1} (w d\eta/\eta^2) \\ &= \int_0^1 f(w/\eta) w^{\lambda/p + \mu/q + \nu/r - 1} dw \int_w^1 (1-\eta)^{\lambda/p + \mu/q - 1} \eta^{-\lambda/p - \mu/q - 1} d\eta. \end{aligned}$$

Una permutazione successiva ammissibile (e attenta) dell'ordine delle integrazioni, mediante la quale, risulta  $\int_w^1 (d\eta) \mapsto \int_w^1 (d\eta)$  e  $\int_0^1 (dw) \mapsto \int_0^\eta (dw)$ , porta all'espressione

$$\mathcal{K} = \int_0^1 (1-\eta)^{\lambda/p + \mu/q - 1} \eta^{-\lambda/p - \mu/q - 1} d\eta \int_0^\eta f(w/\eta) w^{\lambda/p + \mu/q + \nu/r - 1} dw. \quad (186)$$

Quindi, con la sostituzione  $w \equiv w(\tau) := \eta\tau$ , cui compete la trasformazione  $\int_0^\eta (dw) \mapsto \int_0^1 (\eta d\tau)$  dell'operatore integrale, si arriva all'integrale *semplice*

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \int_0^1 (1-\eta)^{\lambda/p + \mu/q - 1} \eta^{\nu/r-1} d\eta \int_0^1 f(\tau) \tau^{\lambda/p + \mu/q + \nu/r - 1} d\tau \\ &= B(\lambda/p + \mu/q, \nu/r) \int_0^1 f(\tau) \tau^{\lambda/p + \mu/q + \nu/r - 1} d\tau \\ &\equiv \frac{\Gamma(\lambda/p + \mu/q)\Gamma(\nu/r)}{\Gamma(\lambda/p + \mu/q + \nu/r)} \int_0^1 f(\tau) \tau^{\lambda/p + \mu/q + \nu/r - 1} d\tau. \end{aligned} \quad (187)$$

Infine, introducendo l'espressione (187) di  $\mathcal{K}$  nell'Eq. (185), risulta

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{a^\lambda b^\mu c^\nu}{pqr} \frac{\Gamma(\lambda/p)\Gamma(\mu/q)\Gamma(\nu/r)}{\Gamma(\lambda/p + \mu/q + \nu/r)} \int_0^1 f(\tau) \tau^{\lambda/p + \mu/q + \nu/r - 1} d\tau. \quad (188)$$

Chiaramente, il completamento del calcolo di  $\mathcal{D}(\lambda, \mu, \nu)$  richiede la conoscenza dell'espressione specifica di  $f(\tau)$ , con  $\tau \equiv u + v + w$ .

Ad esempio, se  $f(\tau) \equiv \beta_0 \equiv \text{costante}$ ,  $\forall \tau \in (0, 1)$ , allora, si ha

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{\beta_0 a^\lambda b^\mu c^\nu}{\lambda q r + \mu p r + \nu p q} \frac{\Gamma(\lambda/p)\Gamma(\mu/q)\Gamma(\nu/r)}{\Gamma(\lambda/p + \mu/q + \nu/r)}. \quad (188.1)$$

Il procedimento mostrato, consistente in riduzioni sequenziali delle integrazioni parziali *doppie* che si determinano nell'integrale triplo (188), si generalizza *induttivamente* al caso della famiglia degli *Integrali n-Multipli di Dirichlet*, ottenendo il risultato generale formale

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &\equiv \int \int \dots \int_{\Omega} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)} \int_0^1 f(\tau) \tau^{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\right) - 1} d\tau. \end{aligned} \quad (189)$$

$\Omega := \{(x_1; x_2; \dots; x_n): x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1\} \subset (\mathbb{R}_0^+)^n$  è un dominio di integrazione *iper-triedrico* retto,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$ ,  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$  e  $\tau = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ .

Come esempio di *Integrale multiplo di Dirichlet*, si consideri il caso seguente di *Integrale Doppio*:

### Problema 3

Si calcoli l'area  $A_{\Sigma}$  della regione piana  $\Sigma$  bordata dalla linea *à-la Jordan* (astroide a 4 cuspidi)

$$((x; y), \partial\Sigma) = \left\{ \begin{array}{l} (x; y): \mapsto |x|^{k/m} + |y|^{k/m} = a^{k/m}, \\ \{a, k, m\} \equiv \{a, 2n, 2j-1\} \subset \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{Z}^+)^2 \\ \{n, j\} \subset \mathbb{Z}^+ \end{array} \right\}.$$

### Soluzione

Poiché  $k$  è pari, la frontiera  $\partial\Sigma$ , in rappresentazione implicita, è simmetrica rispetto a entrambi gli assi del riferimento cartesiano ed è *piana, semplice e chiusa* (la verifica è immediata), i.e., è *à-la Jordan*. Il centroide della superficie racchiusa da  $\partial\Sigma$  coincide, evidentemente, con l'origine.

Pertanto, l'area richiesta,  $A_{\Sigma}$ , corrisponde all'integrale doppio  $A_{\Sigma} \equiv 4 \iint_{\Omega} dx dy$ , essendo  $\Omega$  il quarto di  $\Sigma$  situato nel 1° quadrante cartesiano, nel quale l'equazione dell'arco di  $\partial\Sigma$  è data da  $(x/a)^{k/m} + (y/b)^{k/m} = 1$ . Appare subito evidente che si è condotti al calcolo dell'*Integrale Doppio di Dirichlet* e, quindi, a riferirsi alle Eq.i (181) e (189), i cui analoghi 2-dim generali sono

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) \equiv \iint_{\Omega} f((x/a)^p + (y/b)^q) x^{\lambda-1} y^{\mu-1} dx dy \quad (190.1)$$

e, rispettivamente,

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) \equiv \frac{a^{\lambda} b^{\mu}}{pq} \frac{\Gamma(\lambda/p) \Gamma(\mu/q)}{\Gamma(\lambda/p + \mu/q)} \int_0^1 f(\tau) \tau^{\lambda/p + \mu/q - 1} d\tau. \quad (190.2)$$

Quando  $f(\tau) = \beta_0 \equiv$  costante, l'Eq. (186.2) si riduce a

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) := \frac{\beta_0 a^{\lambda} b^{\mu}}{\lambda q + \mu p} \frac{\Gamma(\lambda/p) \Gamma(\mu/q)}{\Gamma(\lambda/p + \mu/q)} \equiv \frac{\beta_0 a^{\lambda} b^{\mu}}{\lambda q + \mu p} B(\lambda/p, \mu/q). \quad (190.2.1)$$

Ora, riguardo al problema del calcolo di  $A_{\Sigma}$  proposto, le identificazioni appropriate della funzione  $f$  e dei valori dei parametri  $\lambda, \mu, p, q$  sono

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\tau) \equiv 1, \quad \forall \tau \in (0, 1) \\ \lambda = \mu \equiv 1 \\ p = q \equiv k/m \end{array} \right\}.$$

Quindi, applicando direttamente l'Eq. (10.2.1) e riducendo il terzo membro di questa per mezzo della *Formula di Duplicazione* della *Funzione  $\Gamma$* , Eq. (45), si ottiene

$$A_{\Sigma} = 4 \frac{a^2}{2k/m} \frac{(\Gamma(m/k))^2}{\Gamma(2m/k)} = \frac{a^2 m \pi^{1/2}}{2^{2(m/k-1)} k} \frac{\Gamma(m/k)}{\Gamma(m/k + 1/2)}. \quad (191)$$

Ad esempio, dall'Eq. (187), l'area della superficie racchiusa dall'*ipocicloide*, caratterizzata dalla coppia di valori parametrici  $\{k, m\} \equiv \{2, 3\}$ , si calcola prontamente, ottenendo

$$A_{\Sigma;2,3} = (3/8) \pi a^2. \quad (191.1)$$

Nella *Teoria della Probabilità*, la  $\Gamma$ -distribuzione ( $\Gamma$ -densità di probabilità) normalizzata a 1 è definita, secondo la Legge generale di Gauss, da

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , \text{ per } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 0 & , \text{ per } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}. \quad (192)$$

La costante di normalizzazione  $(\beta^\alpha \Gamma(\alpha))^{-1}$  è scelta in modo tale che la probabilità totale (i.e., integrata) valga 1. Le identificazioni  $x \equiv E_K \equiv mv^2/2$  ( $\equiv$  energia cinetica *media* delle particelle),  $\alpha \equiv 3/2$  e  $\beta \equiv k_B T$  ( $k_B \equiv$  costante di Boltzmann e  $T \equiv$  temperatura assoluta), danno luogo alla *Statistica Classica di Maxwell-Boltzmann* per un gas molto rarefatto di particelle identiche non-interagenti (*gas ideale*).

Pertanto, l'elemento infinitesimo di probabilità di occorrenza di una particella classica libera con energia cinetica di valore compreso nell'intervallo  $(E_K, E_K + dE_K)$ , si scrive

$$g(E_K) dE_K = \frac{1}{\pi^{1/2} (k_B T)^{3/2}} E_K^{1/2} e^{-E_K/(k_B T)} dE_K. \quad (192.1)$$

La frazione del numero totale di particelle di un tale gas, l'energia cinetica di ciascuna delle quali *non* sia superiore a un certo valore di soglia  $E_{K,0}$ , è data da

$$\Phi(E_{K,0}) = \int_0^{E_{K,0}} g(E_K) dE_K.$$

Ciò porta al calcolo di un integrale  $(x, \zeta)$ -parametrico del tipo

$$\gamma(x, \zeta) := \int_0^\zeta t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (193)$$

noto come la *Funzione  $\Gamma$  Incompleta* (v. [5], [6], [50], [61]) e riconducibile alla classe delle cosiddette *Funzioni di Laplace* (cf/c Eq. (148), nella quale, si estenda  $n \mapsto \xi \in \mathbb{R}^+$ ).

#### Problema 4

Si determini, dalla  $\Gamma$ -distribuzione normalizzata (188), il *valore atteso*,  $\langle x \rangle_\Gamma$ , e la *varianza*, o *scarto quadratico medio*,  $\sigma_\Gamma^2$ , della variabile casuale continua  $x \in \mathbb{R}^+$ .

**Soluzione**

I calcoli sono elementari:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_{\Gamma} &= \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x (x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}) dx \equiv \frac{1}{\cancel{\beta^{\alpha}} \Gamma(\alpha)} \beta^{\cancel{\alpha}+1} \int_0^{+\infty} (-x/\beta)^{\alpha} e^{-x/\beta} d(-x/\beta) \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) = \alpha\beta.\end{aligned}\quad (194)$$

Quindi, procedendo in modo identico, dopo aver determinato

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle_{\Gamma} &= \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^2 (x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}) dx \\ &= \dots = \frac{1}{\cancel{\beta^{\alpha}} \Gamma(\alpha)} \beta^{\cancel{\alpha}+2} \Gamma(\alpha+2) \equiv \frac{\beta^2 \alpha(\alpha+1) \cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} = \alpha(\alpha+1)\beta^2,\end{aligned}\quad (195)$$

si ottiene immediatamente, dalle Eq.i (194) e (195),

$$\sigma_{\Gamma}^2 := \langle x^2 \rangle_{\Gamma} - \langle x \rangle_{\Gamma}^2 = \alpha\beta^2.\quad (196)$$

Come applicazione della  $\Gamma$ -distribuzione alla *Statistica di Maxwell-Boltzmann* per il *Gas Ideale*, le Eq.i (190) e (192) danno, rispettivamente,

$$\langle E_K \rangle = (3/2)k_B T, \quad \sigma_{E_K}^2 = (3/2)(k_B T)^2.$$

■

La definizione della  $B$ -distribuzione ( $B$ -densità di probabilità) normalizzata a 1 è analoga a quella della  $\Gamma$ -distribuzione di probabilità (normalizzata a 1):

$$b(x) := \begin{cases} \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{1-q}, & \text{per } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{per } x \notin [0, 1]. \end{cases}\quad (197)$$

Procedendo come per le equazioni (194), (195) e (196), si ottengono le espressioni parametriche per le grandezze statistiche

$$\begin{cases} \langle x \rangle_B = \frac{p}{p+q}, \\ \langle x^2 \rangle_B = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q-1)}, \\ \sigma_B^2 := \langle x^2 \rangle_B - \langle x \rangle_B^2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q-1)}. \end{cases}\quad (198)$$

■

**Esempio 3**

Nel calcolo della densità degli stati di particella singola non-interagente, come nel caso del gas classico (Boltzmann) di ‘sfere rigide’, si presenta la necessità di calcolare l’*iper-volume*,  $V_n(R)$ , e l’*area dell’iper-superficie*,  $S_n(R)$ , di una regione sferica  $n$ -dim di raggio  $R$ .

Il procedimento più semplice e geometricamente intuitivo è il seguente:

Si consideri uno spazio di configurazioni euclideo  $n$ -dim, nel quale, la posizione del punto generico è denotata dal vettore cartesiano  $\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . In questo spazio, l'elemento *infinitesimo* di volume si può esprimere come l'iper-parallelepipedo elementare

$$d\mathbf{r} \equiv dV_n = \prod_{k=1}^n dx_k, \quad (199)$$

così che, l'iper-volume di una sfera  $n$ -dim di raggio  $R = \max_{\{x_k\}} \|\mathbf{r}\| \equiv \max_{\{x_k\}} \left\| \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \right\|$ , vale

$$V_n(R) = \int \int \dots \int_{\|\mathbf{r}\| \leq R} \prod_{k=1}^n dx_k. \quad (200)$$

Ovviamente, risultando  $V_n(R)$  proporzionale a  $R^n$ , si può scrivere anche

$$V_n(R) = C_n R^n, \quad (201)$$

dove,  $C_n$  è una costante che dipende unicamente dal numero  $n$  di dimensioni dello spazio.

Quindi, l'elemento infinitesimo di iper-volume, Eq. (199), possiede la rappresentazione alternativa

$$dV_n(R) = nC_n R^{n-1} dR \equiv S_n(R) dR, \quad (202)$$

nella quale,

$$S_n(R) \equiv nC_n R^{n-1} \equiv dV_n(r)/dr \Big|_{r=R} \quad (203)$$

esprime l'area dell'iper-superficie dell'iper-sfera  $n$ -dim.

Per calcolare  $C_n$ , si può iniziare dall'integrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \equiv 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}, \quad (204)$$

ricorrendo all'*Integrale di GAUSS-POISSON* (25.1.2), con  $\alpha \equiv 1$ .

Dall'integrale (204) e dalle Eq.i (199) e, quindi, (202), segue la riduzione del prodotto di  $n$  fattori integrali identici a un integrale semplice,

$$\begin{aligned} \pi^{n/2} &= \prod_{k=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_k^2} dx_k \right) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2} \prod_{k=1}^n dx_k \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2} dV_n \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-R^2} nC_n R^{n-1} dR \equiv nC_n \int_0^{+\infty} R^{n-1} e^{-R^2} dR \\ &\equiv nC_n \int_0^{+\infty} R^{n-1} e^{-R^2} dR. \end{aligned} \quad (205)$$

La sostituzione prevedibile  $R := t^{1/2}$  modifica l'Eq. (205) in termini di *Funzione  $\Gamma$* ,

$$\pi^{n/2} = nC_n \int_0^{+\infty} t^{n/2-1} e^{-t} dt = (nC_n/2) \Gamma(n/2). \quad (206)$$

Poi, la ricombinazione dell'Eq. (206) determina l'espressione di  $C_n$ ,

$$C_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}, \quad (207)$$

che, introdotta nelle Eq.i (201) e (203), fornisce i risultati cercati:

$$\begin{cases} V_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n \\ S_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} R^{n-1} \equiv \frac{n}{R} V_n(R) \end{cases}. \quad (208)$$

□

Nel caso 3-dim ordinario, le Eq. (208) riproducono le relazioni elementari e ben note

$$\begin{cases} V_3(R) = 4\pi R^3/3 \\ S_3(R) = 4\pi R^2 \equiv 3V_3(R)/R \end{cases}. \quad (208.1)$$

D'altra parte, al caso 2-dim ordinario, corrispondono le espressioni elementari

$$\begin{cases} V_2(R) = \pi R^2 \\ S_2(R) = 2\pi R \equiv 2V_2(R)/R \end{cases}, \quad (208.2)$$

per le quali l'interpretazione geometrica è anch'essa evidente.

□

Nel caso 1-dim, si trova

$$\begin{cases} V_1(R) = 2R \\ S_1(R) = 2 \equiv V_1(R)/R \end{cases}. \quad (208.3)$$

Quest'ultimo risultato è interessante poiché  $V_1$  rappresenta la *lunghezza* del segmento di estremi corrispondenti alle ascisse  $-R$  e  $R$  mentre  $S_1$  si riduce al *numero* di tali estremi.

Per  $n \gg 1$  (i.e.,  $n \rightarrow +\infty$ ), il ricorso alla *Formula di Stirling-de Moivre*, Eq. (138), evidenzia l'andamento asintotico comune (*condensazione stocastica* alla frontiera)

$$V_n(R) \sim S_n(R) \sim (2\pi e R^2/n)^{n/2}. \quad (208.4)$$

■

### Problema 5

La rappresentazione in  $\mathcal{C}$  della Funzione  $\Gamma$  corrisponde, formalmente, al prolungamento analitico in  $\mathcal{C}^* := \mathcal{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$  della variabile indipendente,  $x \mapsto z$ , così che  $\Gamma(x) \mapsto \Gamma(z)$ .

Il calcolo delle ampiezze di diffusione (*scattering*) nucleare non-polarizzata, sia coulombiana pura protone-protone che di decadimento  $\beta$  del neutrone, richiede la valutazione del parametro empirico  $\rho(u, v) \equiv |\Gamma(u + iv)|$  di ampiezza di probabilità, nel quale,  $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .

$\rho(u, v)$ , fattorizzato vs. alla parte *irregolare* delle funzioni (complesse) d'onda *distorta*, soluzioni dell'equazione non-relativistica di *Schrödinger-Born*, produce una *modulazione probabilistica* delle sezioni d'urto rispettive.

5.1 Si ricavi un'espressione generale esatta per  $|\Gamma(u + iv)|$  in termini di *prodotto infinito*;

5.1 si determinino forme chiuse per i parametri di *dispersione d'onda*, definiti da

$$\kappa(v) := |\Gamma(1/2 + iv)|^2 \quad \text{e} \quad \sigma(v) := |\Gamma(1 + iv)|^2.$$

**Soluzione**

Generalizzando formalmente l'Eq. (59) nel semi-piano destro di Argand-Gauss ( $u \in \mathbb{R}^+$ ), risulta

$$\begin{aligned} |\Gamma(u + iv)| &= \left| \frac{e^{-\gamma(u+iv)}}{u + iv} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{(u+iv)/n}}{u + iv + n} \right| = \frac{e^{-\gamma u}}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{u/n}}{((u+n)^2 + v^2)^{1/2}} \\ &= \frac{e^{-\gamma u}}{u(1 + v^2/u^2)^{1/2}} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{u/n}}{(u+n)(1 + v^2/(u+n)^2)^{1/2}} \\ &= \left( \frac{e^{-\gamma u}}{u} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{u/n}}{u+n} \right) \prod_{n=0}^{+\infty} \left( 1 + \frac{v^2}{(u+n)^2} \right)^{-1/2} \\ &\equiv \frac{\Gamma(u)}{\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + v^2/(u+n)^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (209)$$

avvalendosi, ancora, nell'ultimo passaggio, dell'Eq. (59). □

Dal prodotto infinito *assolutamente* convergente nell'Eq. (209), avente la forma generale del tipo  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n)$  e il cui carattere coincide (condizione *necessaria e sufficiente*) con quello della serie *assolutamente* convergente  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  (per una giustificazione di questo, v. e.g., [1], CAP. II, P. 32-36, o [54], CAP. I, P. 13-19 (<sup>†</sup>)), si determinano i risultati immediati seguenti (v. **Esercizio 5**, P. 15):

$$\begin{aligned} \kappa(v) &= \frac{(\Gamma(1/2))^2}{\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + v^2/(1/2 + n)^2)} \equiv \frac{\pi}{\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + 4(\pi v)^2/(2n-1)^2 \pi^2)} \\ &= \frac{\pi}{\cosh \pi v} \equiv \pi \operatorname{sech} \pi v; \end{aligned} \quad (209.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= \frac{(\Gamma(1))^2}{\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + v^2/(1+n)^2)} \equiv \frac{1}{\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + (\pi v)^2/n^2 \pi^2)} \\ &= \frac{\pi v}{\sinh \pi v} \equiv \pi v \operatorname{csch} \pi v. \end{aligned} \quad (209.2)$$

■

Rimanendo nell'ambito della diffusione quantistica di particelle quantistiche *non-relativistiche*, si consideri il seguente

### Esercizio 1

Sia  $\psi(r, \varphi)$  la funzione d'onda non-polarizzata associata a una particella portatrice di carica elettrica  $z_1 q_e$  diffusa elasticamente nel piano azimutale  $\{(\varphi; r)\}$  da un potenziale coulombiano puro di intensità  $z_2 q_e$  ( $q_e > 0$  indica la carica del protone), a un angolo  $2\varphi_0$  rispetto al verso di incidenza. Nel centro di forza, la funzione d'onda incidente assume il valore

$$\psi(0, \varphi_0) = e^{-\pi\alpha/2} \Gamma(1 + i\alpha),$$

essendo  $\alpha = z_1 z_2 q_e^2 / (\hbar v)$  l'analogo non-relativistico della *costante di struttura fine*, dove  $\hbar$  è la *costante di PLANCK-FOURIER* ( $\equiv h/(2\pi)$ ) mentre  $v$  è il valore assoluto della velocità istantanea (non-relativistica) della particella ancora 'lontana' dalla regione di interazione efficace.

- Si verifichi che la *densità* di probabilità di diffusione dal punto di collisione è data da

$$\psi^*(0, \varphi) \psi(0, \varphi_0) = \pi \alpha e^{-\pi \alpha} \operatorname{csch} \pi \alpha .$$

■

(<sup>†</sup>) Una presentazione classica molto succinta dei metodi di fattorizzazione infinita è contenuta in [<sup>55</sup>], CAP. 10, P. 267. Per una discussione degli aspetti fondamentali, v. [<sup>8</sup>], P. 70-73 e 97-98. Questi rimandano, più o meno direttamente, al *Teorema di Fattorizzazione* di Weierstrass, importante nella *Teoria delle Funzioni Ellittiche*.

Per quanto riguarda compilazioni autorevoli (e reperibili) di risultati di prodotti infiniti, si vedano, e.g., [<sup>58</sup>], e, soprattutto, [<sup>59</sup>].

Il *Simbolo* (o *Funzione*) di *Pochhammer*, introdotto nell'Eq. (10), trova la sua rappresentazione in termini di funzioni  $\Gamma$  nell'Eq. (30.5); la sua connessione con la *Funzione B* è stata stabilita con l'Eq. (43). Inoltre, nella dimostrazione della *Proprietà di Moltiplicazione*, Eq. (75), il SIMBOLO DI POCHHAMMER è applicato utilmente nelle riduzioni formali successive (cf/c Eq. (77)).

Oltre all'identità, verificabile in modo elementare,

$$(p)_q \equiv \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!}, \tag{210}$$

con  $\{p, q\} \subset \mathbb{Z}^+$ , altre proprietà di possibile interesse operativo sono ricavate nelle applicazioni svolte ed esercizi proposti qui di seguito.

**Esempio 4**

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^- \wedge k \in \mathbb{Z}^+$ .

**4.1 Rappresentazioni di  $(\alpha)_k$  mediante coefficienti binomiali**

Poiché risulta

$$\begin{aligned} (\alpha)_k &:= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+k-1) \equiv \text{prodotto di } k \text{ fattori} \\ &\equiv (-1)^k (-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2) \dots (-\alpha-k+1) \\ &= (-1)^k \binom{-\alpha}{k} k!, \end{aligned} \tag{211}$$

dopo aver definito  $\mu := \alpha + k - 1$ , i.e., in modo equivalente,  $\alpha := \mu - k + 1$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} (\alpha)_k &= (\mu - k + 1)((\mu - k + 1) + 1)((\mu - k + 1) + 2) \dots \\ &\quad \dots ((\mu - k + 1) + k - 2)((\mu - k + 1) + k - 1) \\ &\equiv \mu(\mu - 1) \dots (\mu - k + 3)(\mu - k + 2)(\mu - k + 1) = \binom{\mu}{k} k! \equiv \binom{\alpha + k - 1}{k} k! \end{aligned} \tag{212}$$

Dal confronto tra le Eq.i (207), (208), (33), (34) e l'**Esercizio 2**, P. 21), segue la catena di identità

$$\frac{(\alpha)_k}{k!} \equiv (-1)^k \binom{-\alpha}{k} \equiv \binom{\alpha + k - 1}{k} \equiv \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k \Gamma(\alpha) \Gamma(k)} \equiv \frac{1}{k B(\alpha, k)} . \tag{213}$$

Quindi, la riflessione  $\alpha \mapsto -\alpha$ , dà luogo a rappresentazioni *alternative* per l' $\mathcal{M}$ -espansione binomiale generale ( $x \in (-1, 1)$  o  $x \in (-1, 1]$  o  $x \in [-1, 1]$ , secondo il valore di  $\alpha$ ):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{-\alpha+k-1}{k} x^k, \quad (214.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(-\alpha)_k}{k!} x^k, \quad (214.2)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)} x^k \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k B(-\alpha, k)} x^k. \quad (214.3)$$

Comunque, le rappresentazioni (214.3) valgono *solo* quando  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^+$ .

□

#### 4.2 Formule di Moltiplicazione

Sia  $\{n, k\} \in (\mathbb{Z}_0^+)^2$ . Allora,

$$\begin{aligned} (\alpha)_{n+k} &= (\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1))((\alpha+n)((\alpha+n)+1)\dots((\alpha+n)+k-1)) \\ &= (\alpha)_n (\alpha+n)_k, \end{aligned} \quad (215.1)$$

$$\equiv (\alpha)_k (\alpha+k)_n. \quad (215.2)$$

L'Identità (215.2) si giustifica per la simmetria di scambio indiciale  $n \rightleftharpoons k$  nell'Identità (215.1).

Ora, iterando  $n$  applicazioni dell'Identità (215.1), si scrive

$$\begin{aligned} (\alpha)_{nk} &\equiv (\alpha)_{(n-1)k+k} = (\alpha)_{(n-1)k} (\alpha+(n-1)k)_k \\ &\equiv (\alpha)_{(n-2)k+k} (\alpha+(n-1)k)_k = (\alpha)_{(n-2)k} (\alpha+(n-2)k)_k (\alpha+(n-1)k)_k \\ &\equiv (\alpha)_{(n-3)k+k} (\alpha+(n-2)k)_k (\alpha+(n-1)k)_k = \dots \\ &\dots = (\alpha)_k (\alpha+k)_k (\alpha+2k)_k (\alpha+3k)_k \dots (\alpha+(n-1)k)_k. \end{aligned}$$

Pertanto, valgono le identità equivalenti

$$(\alpha)_{nk} = \prod_{r=0}^{n-1} (\alpha+rk)_k \equiv \prod_{r=0}^{k-1} (\alpha+rn)_n, \quad (216)$$

ancora per effetto della simmetria nello scambio  $n \rightleftharpoons k$ .

□

#### 4.3 Formule di Iterazione

Ponendo  $k \equiv 1$  nella formula di moltiplicazione (215.1), si ottiene il risultato ovvio

$$(\alpha)_{n+1} = (\alpha+n)(\alpha)_n. \quad (217)$$

Inoltre, dopo aver riscritto la formula di moltiplicazione (215.2) come  $(\alpha+k)_n = (\alpha)_{n+k}/(\alpha)_k$ , prendendo  $k = 1$ , si ottiene prontamente, con l'Identità (217),

$$(\alpha+1)_n = (1+n/\alpha)(\alpha)_n. \quad (218)$$

Infine, nella formula di moltiplicazione (215.1), con la traslazione  $\alpha \mapsto \alpha+1$  e prendendo  $k = 1$ , si trova, dall'Idn. (218),

$$(\alpha+1)_{n+1} = (\alpha+n+1)(1+n/\alpha)(\alpha)_n. \quad (219)$$

Estensioni delle Identità (217), (218) e (219) al caso di traslazioni *intere positive* generali sia degli argomenti che degli indici sono deducibili facilmente per iterazione sulle stesse.

**4.4 Determinazione delle espressioni delle derivate 1° di  $(x)_n$  e di  $\ln((x)_n)$ , con  $n \in \mathbb{Z}^+$**

Per questo calcolo, un procedimento elegante è quello di operare direttamente sull'Eq. (30.5):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x)_n &\equiv \frac{d}{dx} \left( \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \right) \\ &= \frac{(x)_n}{\Gamma(x+n)} \frac{d}{dx} \Gamma(x+n) - \frac{(x)_n}{\Gamma(x)} \frac{d}{dx} \Gamma(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d}{dx} \Gamma(x+n) - \frac{\Gamma(x+n)}{(\Gamma(x))^2} \frac{d}{dx} \Gamma(x) \\ &= (x)_n \frac{d}{dx} (\ln \Gamma(x+n) - \Gamma(x)) \\ &= (x)_n (\psi(x+n) - \psi(x)) = \dots \end{aligned}$$

iterando  $n$  volte l'Eq. (87) su  $\psi(x+n) \equiv \psi((x+n-1)+1)$

$$\begin{aligned} \dots &= (x)_n \left( \left( \sum_{r=0}^{n-1} 1/(r+x) + \cancel{\psi(x)} \right) - \cancel{\psi(x)} \right) \\ &= (x)_n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r+x}. \end{aligned} \tag{221.1}$$

La *derivata logaritmica* di  $(x)_n$  segue, allora, immediatamente:

$$\frac{d}{dx} \ln((x)_n) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r+x}. \tag{221.2}$$

■

**Esercizio 2**

Si verifichino le identità

$$(n)_n = 2^{n-1} (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2(n)!}. \tag{220}$$

■

**Esercizio 3**

Sia  $x \gg 1$  (e.g., quando  $x \rightarrow +\infty$ ).

Si verifichi che,  $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ , vale l'andamento asintotico per il *Simbolo di Pochhammer*

$$(x)_n \sim \left( \frac{x}{e} \right)^n. \tag{222}$$

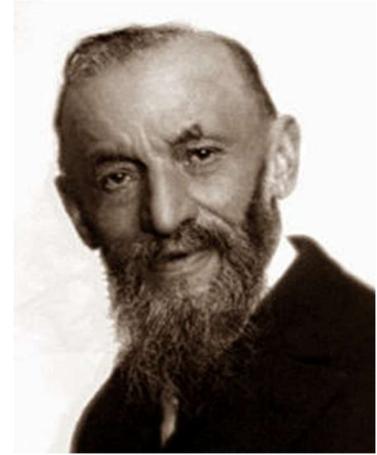
■

**Esercizio 4**

Sia  $\{p, q\} \subset \mathbb{Z}^+ \wedge k \leq p \leq q$ . Inoltre, sia  $\alpha \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ .

Si verifichino le uguaglianze seguenti:

- 4.1  $q! = (q-p)!(q-p+1)_p,$   
 $\equiv p!(p+1)_{q-p};$
- 4.2  $(\alpha-p+1)_p = (-1)^p(-\alpha)_p;$
- 4.3  $(2q-2p)! = 2^{2(q-p)}(1/2)_{q-p}(q-p)!;$
- 4.4  $(\alpha)_q = (-1)^p(\alpha)_{q-p}(-\alpha-n+1)_p,$   
 $\equiv (-1)^p(\alpha)_{q-p}(-\alpha-n+1)_p;$
- 4.5  $(-p)_{q-k} = (-p)_{q-p}(q-2p)_{p-k}.$



*Giuseppe Peano (1858-1932)*

■

**Esercizio 5**

Si verifichi,  $\forall \nu \in \mathbb{C}$ , che

$$\frac{(\nu+1/2)_k}{(2\nu+1)_k} \equiv \begin{cases} \frac{1}{2^{3k/2}} \prod_{r=1}^{k/2} \left( \frac{k-1}{r+\nu} + 2 \right), & \text{per } k \text{ pari } \wedge \geq 2 \\ \frac{1}{2^{(3k-1)/2}} \prod_{r=1}^{(k-1)/2} \left( \frac{k}{r+\nu} + 2 \right), & \text{per } k \text{ dispari } \wedge \geq 3 \end{cases}$$

□

**Problema 6**

Considerata la serie numerica,  $\sum_k u_k(p) \equiv \frac{1}{\Gamma(p+2)} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k+p}{k-1}^{-1}$ , parametrica in  $p \in \mathbb{Z}_0^+$ ,

- 6.1 se ne determini il *carattere* al variare di  $p$ ;
- 6.2 si dimostri che,  $\forall p \in \mathbb{Z}^+, \sum_k u_k(p)$  converge per difetto verso la *somma*

$$S(p) \equiv \left( \frac{1}{p^2 \Gamma(p)} \right)^- \equiv \left( \frac{1}{p(p!)} \right)^-; \tag{223}$$

- 6.3 si determini un'espressione approssimata di 'S(p) molto piccola'.

**Soluzione (dettagliata)**

- 6.1 L'espressione esplicita del termine generale della serie si scrive

$$u_k(p) \equiv \left( \binom{k+p}{k-1} \Gamma(p+2) \right)^{-1} = \frac{(k-1)!(k+p-(k-1))!}{(k+p)!} \frac{1}{(p+1)!}$$

$$= \frac{(k-1)!}{(k+p)!} \equiv \frac{1}{(k)_{p+1}} \equiv \begin{cases} 1/k, & \text{per } p = 0 \\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}, & \forall p \in \mathbb{Z}^+ \end{cases},$$

da cui, si conclude che  $\sum_k u_k(p) \begin{cases} \text{diverge} & \text{per } p = 0 \\ \text{converge} & \forall p \in \mathbb{Z}^+ \end{cases};$

6.2 È istruttivo eseguire una verifica preliminare di  $S(p)$  ai valori di  $p$  inferiori.

Per  $p = 1$ , si genera la *Serie di Mengoli*, ben nota (v. Eq. (68)),

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k)_2} \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)},$$

la cui somma può essere scritta come

$$S(1) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1^- \equiv \left(\frac{1}{1^2 \Gamma(1)}\right)^-, \quad (224)$$

nella forma (223).

Poi, quando  $p = 2$ , si ha la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k)_3} \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Scomponendo  $1/(k)_3$  in *frazioni parziali*, si trova facilmente che

$$S(2) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^- \equiv \left(\frac{1}{2^2 \Gamma(2)}\right)^-, \quad (225)$$

in conformità con il risultato generale (223).

Ancora, l'assegnazione  $p = 3$  corrisponde alla serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k)_4} \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)},$$

la quale, con una scomposizione analoga di  $1/(k)_4$  in frazioni parziali, si trova subito che converge verso la somma

$$\begin{aligned} S(3) &\equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}\right) \\ &= (1/18)^- \equiv \left(\frac{1}{3^2 \Gamma(3)}\right)^-. \end{aligned} \quad (226)$$

Anche questa soddisfa la rappresentazione generale (223).

La verifica successiva, con  $p = 4$ , riguarda la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k)_5} \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)},$$

per la somma della quale, il metodo delle frazioni parziali fornisce il valore (sembra ormai prevedibile dalla struttura generatrice)

$$\begin{aligned} S(4) &\equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(4) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{96} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right) \\ &= (1/96)^- \equiv \left( \frac{1}{4^2 \Gamma(4)} \right)^-. \end{aligned} \quad (227)$$

Per  $p \geq 5$ , i calcoli manuali diventano sempre più lunghi e pesanti. Già verificare che

$$\begin{aligned} S(5) &\equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(5) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{600} - \frac{1}{5(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \right) \\ &= (1/600)^- \equiv \left( \frac{1}{5^2 \Gamma(5)} \right)^-. \end{aligned} \quad (228)$$

richiede una certa attenzione e ... pazienza: il confronto fra le Eq.i (224), ..., (228) sembra suggerire che la generazione della somma  $S(j)$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}^+$ , segua lo schema

$$S(j) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( S(j) - \frac{1}{j(n+1)_j} \right) = \left( \frac{1}{j^2 \Gamma(j)} \right)^- \equiv \left( \frac{1}{j \cdot j!} \right)^-. \quad (229)$$

L'Eq. (229), quando sia verificata, renderebbe manifesta la struttura generativa della somma (223). Tentarne la dimostrazione *per induzione* è quasi ovvio:

l'Eq. (224) verifica l'Eq. (229) per  $j \equiv p = 1$ . Ora, *supponendo* che,  $\forall p \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\})$ , l'Eq. (229) valga per  $j \equiv p - 1$ , se ne deve *dimostrare* la validità per  $j = p$ . A tale scopo, la somma parziale  $n$ -sima  $s_n(p)$  può essere configurata come segue:

$$\begin{aligned} s_n(p) &\equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k)_{p+1}} \equiv \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(k)_p} \frac{1}{k+p} \right) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k)_p} \left( 1 - \frac{k+p-1}{k+p} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(k)_p} - \frac{k}{(k)_p(k+p)} - \frac{p-1}{(k)_p(k+p)} \right) \\ &\equiv s_n(p-1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)_p} - (p-1)s_n(p) \equiv s_n(p-1) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k)_p} - (p-1)s_n(p) \\ &\equiv s_n(p-1) - \left( \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k)_p} \right) - \frac{1}{(1)_p} + \frac{1}{(n+1)_p} \right) - (p-1)s_n(p) \\ &\equiv \cancel{s_n(p-1)} - \cancel{s_n(p-1)} + \frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)_p} - (p-1)s_n(p). \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a  $s_n(p)$  fra il primo e l'ultimo membro, si trova che

$$s_n(p) = \frac{1}{p(p!)} - \frac{1}{p(n-1)_p} \equiv \frac{1}{p^2 \Gamma(p)} - \frac{1}{p(n-1)_p}.$$

Lo schema dell'Eq. (229) e, nel limite  $n \rightarrow +\infty$ , il valore della somma (223) restano dimostrati;

- 6.3 l'espressione ' $S(p)$  molto piccola' – in sé alquanto vaga quando non ci si riferisca a un regime asintotico – implica che  $p$  sia, conseguentemente, '*molto grande*', e.g., tale che l'approssimazione  $S$ -DM di  $p!$ , arrestata all'ordine di espansione appropriato, stabilizzi l'errore introdotto nella valutazione di  $S(p)$  entro lo scarto desiderato.

Con la verifica eseguita arrestando l'espansione  $S$ -DM al suo 3° addendo, si scrive

$$\begin{aligned}
 S(p) &= \frac{1}{p^2 \Gamma(p)} \sim \frac{1}{p} \frac{1}{p^p e^{-p} (2\pi p)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2}\right)} \\
 &\equiv \frac{576}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^p}{p^{p-1/2} ((24p+1)^2 + 1)}. \tag{230}
 \end{aligned}$$

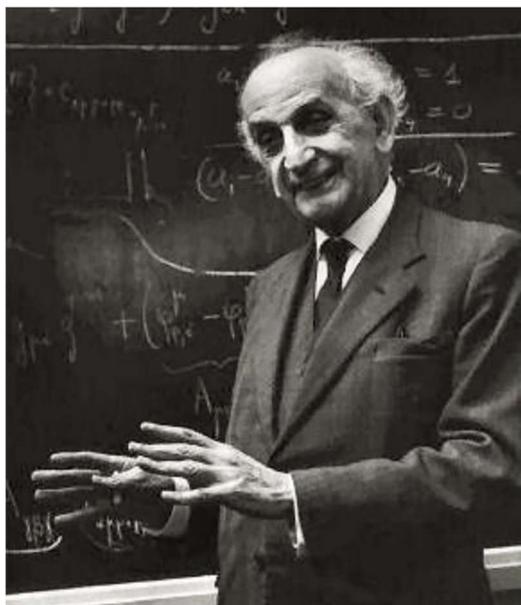
Per gli scopi numerici ordinari, il valore asintotico (230) fornisce un'approssimazione molto soddisfacente di  $S(p)$ . Infatti, è immediato verificare che, già con  $p = 4$ , esso dà un *errore assoluto*  $< 4.3 \cdot 10^{-7}$ , i.e., di soli 5 ordini di grandezza minore di  $S(p)$ . ■

**Osservazioni**

- a.  $\sum_k u_k(p)$  appare come una *generalizzazione* della *Serie di MENGOLI*. In Analisi Numerica, essa è utilizzata come acceleratore di convergenza nel calcolo delle somme di molte serie numeriche a termini razionali. Fra queste, c'è la *Funzione  $\zeta$  di RIEMANN* di argomento *dispari*,  $\zeta(2r+1) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^{2r+1}$ ,  $r \in \mathbb{Z}^+$ , per la quale, diversamente dalla *Funzione  $\zeta$*  di argomento *pari*, *nessuno* è mai riuscito ad applicare il metodo della *SERIE DI FOURIER*;
- b. per  $p \in \mathbb{Z}^+$ , l'Eq. (223) equivale alla determinazione della somma

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k+p}{k-1}^{-1} \equiv (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)!}{(k+p)!} \equiv \frac{\Gamma(p+2)}{p^2 \Gamma(p)} = 1 + \frac{1}{p}. \tag{231}$$

■■■



**Cornelius Lanczos** (1893-1974)

## Appendice 1

# L'Algoritmo di approssimazione di Lanczos

Per il calcolo numerico di  $\Gamma(z)$ , con  $z \in \mathcal{C}$ , l'*algoritmo di Lanczos* si rivela potente, piuttosto semplice da poter essere implementato anche su una calcolatrice scientifica in grado di eseguire prodotti tra matrici e notevolmente preciso già con i primi pochi termini dell'espansione pertinente. Resta sorprendente il fatto che la forma operativa generale dell'algoritmo si riduca a un prodotto di fattori di entità modesta. Le giustificazioni formali dell'algoritmo (v. [21]), qui omesse, richiedono sia capacità operativa in Analisi Complessa che abitudine all'astrazione.

□

1. Sia  $\Re z \equiv x \in \mathbb{R}^+$ .

L'*Algoritmo di Lanczos* di approssimazione di  $\Gamma(z)$  è esprimibile come

$$\Gamma(z) \approx \frac{(z + 1/2 + \eta)^{z+1/2}}{z e^{z+1/2+\eta}} \langle \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha} \rangle, \quad (\text{A.1})$$

dove,

$$\langle \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha} \rangle := \sum_{j=1}^N \zeta_j^* \alpha_j \quad (\text{A.1.1})$$

è il *prodotto interno* (sesqui-lineare) dei vettori  $N$ -dim  $\mathbf{Z}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  definiti in  $\mathcal{C}$ .

Il vettore  $\mathbf{Z}$  ha la rappresentazione-riga

$$\mathbf{Z} := (1 \quad (z+1)^{-1} \quad (z+2)^{-1} \quad \dots \quad (z+N-1)^{-1}), \quad (\text{A.1.2})$$

mentre  $\boldsymbol{\alpha}$  è il vettore-colonna  $N$ -dim generato dal prodotto righe  $\times$  colonne delle  $N \times N$ -matrici  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{L}$  in sequenza *ordinata* e del vettore-colonna  $\mathbf{g}$  (anch'esso  $N$ -dim)

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} := (\mathbf{D}\mathbf{U}\mathbf{L})\mathbf{g}. \quad (\text{A.1.3})$$

Le matrici  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{L}$  e il vettore-colonna  $\mathbf{g}$  hanno le definizioni rispettive seguenti:

1.1  $\mathbf{L}$  è la matrice *triangolare-bassa*

$$(l_{jk}) := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & \dots & l_{NN} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

i cui elementi sono definiti da

$$l_{jk} := \begin{cases} 1/2, & \text{per } j \equiv k = 1, \\ 0, & \text{per } 1 \leq j < k (\leq N), \\ (-1)^{j-k} 2 \sum_{\nu=1}^j \binom{j-1}{\nu-1} \binom{\nu-1}{\nu+k-j-1}, & \text{per } 1 \leq k \leq j (\leq N). \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

Gli elementi di matrice  $l_{jk}$  sono dedotti dai *Polinomi di Čebyšëv*. Si tenga presente che,

$\forall \{p, q\} \subset \mathbb{Z}$ , vale la condizione fondamentale:  $\binom{q}{p} \neq 0 \iff 0 \leq p \leq q$ ;

1.2  $\mathbf{U}$  è la matrice *triangolare-alta*

$$(u_{jk}) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & u_{NN} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

i cui elementi sono definiti da

$$u_{jk} := \begin{cases} 1, & \text{per } j = 1, \\ (-1)^{k-j} \binom{j+k-3}{k-j}, & \text{per } 2 \leq j \leq k (\leq N), \\ 0, & \text{per } 1 \leq k < j (\leq N); \end{cases} \quad (\text{A.3.1})$$

1.3  $\mathbf{D}$  è la matrice *diagonale*

$$(d_{jk}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & d_{44} & 0 & \dots \\ & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{NN} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

i cui elementi sono definiti da

$$d_{jk} := \begin{cases} 0, & \text{per } j \neq k, \\ 1, & \text{per } j \equiv k = 1, \\ -1, & \text{per } j \equiv k = 2, \\ \frac{2(2j-3)}{j-2} d_{j-1,j-1}, & \text{per } 3 \leq j \equiv k \leq N; \end{cases} \quad (\text{A.4.1})$$

1.4 la componente scalare generica  $j$ -esima del *vettore-colonna*  $\mathbf{g} \equiv (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N)^\dagger$ , con  $j = 1, 2, \dots, N$ , è data da

$$g_j := \frac{(2j-2)! e^{j-1/2+\eta}}{2^{2j-3} (j-1)! (j-1/2+\eta)^{j-1/2}}. \quad (\text{A.5})$$

In essa, ricompare il *parametro di aggiustamento*  $\eta \equiv \eta(N) \in \mathbb{R}$ , lo stesso presente nell'Eq. (A.1).

Due aspetti dell'*algoritmo di Lanczos* risultano degni di nota:

- a. l'algoritmo è applicabile  $\forall x \equiv \Re z \in \mathbb{R}^+$  e non solo per  $x \in (0, 1)$ , come avviene nel caso dell'*algoritmo di Hastings*, Eq. (15);
- b.  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  assegnato, la precisione dell'algoritmo cresce *molto rapidamente* con  $N$ . L'assegnazione appropriata del valore ottimale di  $\eta$ , dipendente dalla dimensione  $N$ , stabilizza l'*errore medio assoluto*  $|\langle \mathcal{E}(N) \rangle|$ , il cui valore può essere stimato mediante la formula

$$|\langle \mathcal{E}(N) \rangle| = (\pi/4)(2/e)^{1/2} \left| \pi^{1/2} e^\eta + \sum_{j=1}^N (-1)^j \mu_j \right|. \quad (\text{A.6})$$

Nell'Eq. (A.6),  $\mu_j$  è la componente generica del vettore-colonna  $N$ -dim

$$\boldsymbol{\mu} := \mathbf{L} \mathbf{g} \equiv (\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N)^\dagger. \quad (\text{A.6.1})$$

In linguaggio C++, mediante la libreria di multi-precisione GMP, si riesce a calcolare  $100! \equiv \Gamma(101)$  ottenendo *esatte* più di 158 delle prime cifre significative!

$\eta(6)$	5.15
$\alpha_0$	2.50662827563479526904
$\alpha_1$	225.525584619175212544
$\alpha_2$	-268.295973841304927459
$\alpha_3$	80.9030806934622512966
$\alpha_4$	-5.00757863970517583837
$\alpha_5$	0.0114684895434781459556

Quando venga ristretta a  $\mathbb{R}^+$ , l'Eq. (A.1) assume la forma a  $N$  termini

$$\Gamma(x) \approx \frac{1}{x} (x+1/2+\eta)^{x+1/2} e^{-(x+1/2+\eta)} \left( \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k}{x+k} \right) \quad \hookrightarrow (\text{A.7})$$

Nella ricerca di un algoritmo esplicito quanto più compatto e portabile, il Dr. V. T. Toth (<https://www.rskey.org/gamma.htm>) è riuscito a fissare a 6 il numero degli addendi di una somma approssimante che, pur essendo formalmente identica a quella dell'Eq. (A.7), possiede, però, i coefficienti  $\alpha_k$  e il parametro

$\eta$  ottimizzati secondo la tabella riportata qui sopra. Si trova che l'errore medio assoluto per questo set di parametri è  $|\langle \mathcal{E}(6) \rangle| \approx 3 \cdot 10^{-11}$ . È da notare che gli  $L$ -algoritmi ( $\therefore$  Lanczos), Eq.i (A.1) e (A.7), sono di *precisione arbitraria*, nel senso che la precisione della stima di

$\Gamma(z)$  (e, quindi, di  $\Gamma(x)$ ) aumenta al crescere di  $N$ , mentre  $|\langle \varepsilon(N) \rangle|$  diminuisce in modo conseguente. Gli  $L$ -algoritmi sono stati deprecati da P. Luschny come *poco efficienti* [81].

Il Dr. Toth è proseguito nell'esplicitazione della formula (A.7) di 'semi-polinomizzazione' ottimale della *Funzione  $\Gamma$* , determinando (comunicazione personale, sett. 2006) una somma di 11 addendi corrispondente a  $\eta(11) = 5.9$ , essendo  $|\langle \varepsilon(11) \rangle| < 3.762014 \cdot 10^{-15}$  l'errore medio assoluto. Con tale somma più specializzata, si riduce notevolmente la necessità di una implementazione, generalmente onerosa, dell'  $L$ -algoritmo. Infatti, per  $x > 50$ , il numero delle prime cifre significative *esatte* del valore  $\Gamma(x)$  risulta non-inferiore a 128 (!).

I valori dei vari parametri pertinenti sono riportati nella tabella sottostante:

$\eta(11)$	5.9
$\alpha_0$	2.506628274630988483155991468151847456247
$\alpha_1$	514.502017621370845591990450533203237222
$\alpha_2$	-751.7522473732607255228394806593015643455
$\alpha_3$	319.3511875003349899660656039935037577825
$\alpha_4$	-39.34548036587781759479893476015819047139
$\alpha_5$	0.7680279806478700204668335612362830476054
$\alpha_6$	$-7.810847890982798407498443242646594051086 \cdot 10^{-5}$
$\alpha_7$	$-8.640353424685219518294047975031252246272 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_8$	$4.96437721906591788545691706668624099008 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_9$	$-1.529077735549680951107920618853058460858 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_{10}$	$2.25495473049218566121948966533652015257 \cdot 10^{-7}$
$ \langle \varepsilon(11) \rangle $	$3.762013730533571957197311082953299300782 \cdot 10^{-15}$

□

Il *PFTV*-algoritmo [64] costituisce un'alternativa accettabile, per compattezza e precisione, all'  $L$ -algoritmo, essendo in grado di calcolare  $\Gamma(z)$  e  $\Gamma(x)$  con un errore medio assoluto  $|\langle \varepsilon(N) \rangle| \approx 2 \cdot 10^{-10}$ . La sua rappresentazione in  $\mathcal{C}$ , anch'essa valida per  $\Re z \equiv x \in \mathbb{R}^+$ , è data da

$$\Gamma(z) \approx (z + 11/2)^{z+1/2} e^{-(z+11/2)} \prod_{k=0}^N \frac{1}{(z+k)} \sum_{k=0}^N c_k z^k. \tag{A.8.1}$$

Imponendo  $\Im z \equiv 0 \ \forall z$ , se ne ottiene la restrizione a  $\mathbb{R}^+$ ,

$$\Gamma(x) \approx (x + 11/2)^{x+1/2} e^{-(x+11/2)} \prod_{k=0}^N \frac{1}{(x+k)} \sum_{k=0}^N c_k x^k. \tag{A.8.2}$$

Per entrambe le rappresentazioni (A.8.1) e (A.8.2) a 7 termini ( $N = 6$ ), il set di parametri ottimizzati è presentato nella tabella seguente:

$c_0$	75122.6331530
$c_1$	80916.6278952
$c_2$	36308.2951477
$c_3$	8687.24529705
$c_4$	1168.92649479
$c_5$	83.8676043424
$c_6$	2.50662827511

Talvolta, comunque, nel regime asintotico  $x \gg 1$ , l'implementazione delle Eq.i (165.2) o (165.3) può rivelarsi più semplice e rapidamente efficace. Però, anche qui, cf/c [81].

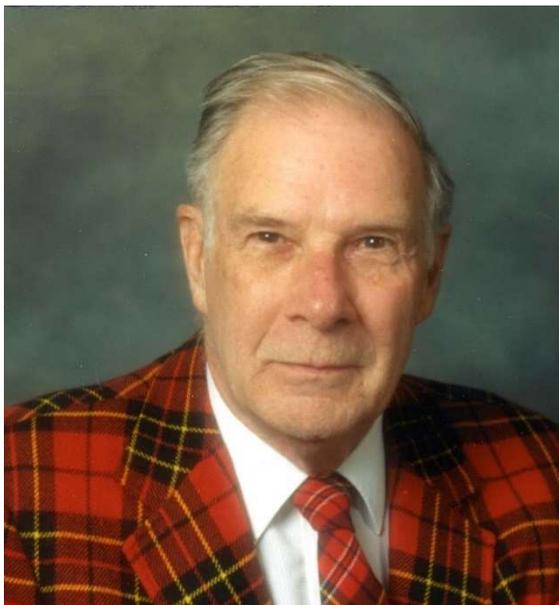
□

2. Sia  $\Re z \equiv x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}^+$ .

L'approssimazione asintotica di  $\Gamma(-z)$  è riconducibile a quella di  $\Gamma(z)$  *prolungando* l'Eq. (30.4) in  $\mathcal{C}$  (i.e.,  $x \mapsto z$ ) e introducendo la forma (A.1) direttamente in una qualsiasi delle rappresentazioni identiche seguenti, valide  $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(-z) &= -\frac{\pi}{z} \frac{(z)_n}{\Gamma(z+n) \sin(\pi z)} \equiv -\frac{\pi}{z} \frac{\cancel{(z)_n}}{\cancel{(z)_n} \Gamma(z) \sin(\pi z)} \\
 &= -\frac{\pi}{z \Gamma(z) \sin(\pi z)}.
 \end{aligned}
 \tag{A.9}$$

■



**Richard Wesley Hamming** (1915-1998)

(“The purpose of computing is insight, not numbers ...”)

## Appendice 2

### Un algoritmo per il calcolo degli estremanti stazionari locali della Funzione GAMMA

L’Eq. (85) indica chiaramente che le radici di  $\psi(x)$  e quelle di  $\Gamma'(x)$  coincidono. Tali valori estremanti, indicati come  $x_0, x_1, x_2, \dots$  alle P. 4 e 12, *non* sono algebrici ma corrispondono alle radici dell’equazione *trascendente*

$$\psi(x) \equiv -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Se non si dispone di un algoritmo ottimizzato che calcoli direttamente le radici di tale equazione, si può procedere, a causa dei vincoli computazionali evidenti, riducendo il problema esatto (A.8) alla determinazione ordinata delle prime radici dell’equazione *approssimante*

$$1 + \gamma x - x^2 \sum_{n=1}^M \frac{1}{n(n+x)} = 0. \quad (\text{A.9})$$

La scelta appropriata dell’indice estremo superiore  $M$  di troncamento dipende in modo cruciale dalla rapidità di convergenza della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n(n+x))$ .

L’idea più immediata è quella di trovare un’espansione di  $\psi(x)$  equivalente alla (85), per la quale, dopo  $M$  termini (pochi *relativamente*), risulti già  $|R_M(x)| \ll 1$  in modo ritenuto soddisfacente.

L’obiettivo richiede la disponibilità di un algoritmo già ottimizzato della somma della *Funzione  $\zeta$  di Riemann* di argomento  $\in \mathbb{Z}^+$ ). Esso è incluso in tutte le librerie dei programmi applicativi di calcolo (CAS) correnti.

Dunque, assegnato  $p \in \mathbb{Z}^+$ , si incomincia con lo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} &\equiv \sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+x)} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \\ &\equiv s_p(x) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

avendo definito

$$s_p(x) := \sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+x)} \equiv \frac{1}{x} \sum_{n=1}^p \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right). \quad (\text{A.10.1})$$

Ora, scelto l'intervallo  $(a, b) \subset \mathcal{D}_r$  tale che siano soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} b - a \leq 1, \\ x \in [\bar{a}, \bar{b}] \subset (a, b), \\ p = \lfloor |x| \rfloor + 1, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

dove  $\lfloor |x| \rfloor$  indica, com'è noto, la *parte intera* (*floor function*) di  $|x|$ , si può ricorrere all'espansione binomiale riscrivendo l'Eq. (A.10) nella forma

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} &= s_p(x) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x/n)^k \equiv s_p(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}} \\ &= s_p(x) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - x \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} + x^2 \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} - \dots + (-1)^k x^k \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}} + \dots \\ &= s_p(x) + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^2} \right) - x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3} \right) + x^2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^4} \right) - \dots \downarrow \\ &\quad \downarrow \dots + (-1)^k x^k \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^{k+2}} \right) + \dots \\ &\equiv s_p(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k (\zeta(k+2) - \zeta_p(k+2)) \\ &\equiv s_p(x) + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k x^{k-2} (\zeta(k) - \zeta_p(k)), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

avendo introdotto la definizione ovvia ulteriore

$$\zeta_p(k) := \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^k}. \quad (\text{A.12.1})$$

Pertanto, sotto le condizioni (A.11), l'Eq. (A.8) assume la rappresentazione *esatta*

$$1 + \gamma x - x^2 s_p(x) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k x^k (\zeta(k) - \zeta_p(k)) = 0, \quad (\text{A.13})$$

che, troncata in corrispondenza dell'indice estremo superiore  $M$  opportuno, si riduce a

$$1 + \gamma x - x^2 s_p(x) - \sum_{k=2}^M (-1)^k x^k (\zeta(k) - \zeta_p(k)) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Poiché algoritmi ottimizzati della *Funzione Zeta di Riemann* risultano acceleratori di convergenza efficaci della serie contenuta nell'Eq. (A.8), in pratica, si tratta di introdurre il numero *maggiore possibile* di *Funzioni*  $\zeta$  compatibile con l'espandibilità binomiale del fattore  $(1+x/n)^{-1}$  nell'Eq. (A.10). Chiaramente, questo implica la *minimizzazione* di  $p$  vs.  $x$  e, quindi, che l'assegnazione ottimale del valore di  $p$  sia  $p \equiv \lfloor |x| \rfloor + 1$  (<sup>†</sup>).

Determinazioni ottimali dei valori delle radici dell'Eq. (A.14) dipendono, almeno, dall'equilibrio delicato tra i parametri di calcolo seguenti:

- il numero  $n_M$  di cifre significative (precisione) richieste,
- il valore di  $M \leq n_M$ ,
- il numero di cifre significative di  $\bar{a}$  e di  $\bar{b}$ .

□

Come esempio di applicazione, si consideri il caso in cui è  $x \in (a, b) \equiv (-4, -3)$ . L'ascissa del minimo locale in tale intervallo (v. P. 11, Fig. 1) richiede che sia  $p = 4$ .

Quindi, l'Eq. (A.14) assume la forma specifica esplicita

$$\begin{aligned}
 0 &= 1 + \gamma x - x^2 s_4(x) - \sum_{k=2}^M (-1)^k x^k (\zeta(k) - \zeta_4(k)) \\
 &\equiv 1 + x \left( \gamma - \sum_{n=1}^4 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right) - \sum_{k=2}^M (-1)^k x^k \left( \zeta(k) - \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n^k} \right). \quad (\text{A.12.1})
 \end{aligned}$$

Con poche iterazioni successive, si arriva a raffinare l'intervallo  $[\bar{a}, \bar{b}] \equiv [-3.6353, -3.6352]$ , i cui estremi approssimano  $x_4$  esattamente alla 3<sup>a</sup> cifra decimale.

Le assegnazioni  $M \equiv n_M = 100$  migliorano il risultato, fornendo il valore

$$x_4 \approx -3.63529336643690 \dots ,$$

corretto alla 14<sup>a</sup> cifra decimale!

■

---

(†) L'utilizzo della *Funzione  $\zeta$  di Riemann* e, più in generale, della *Funzione  $\zeta_H$  di Hurwitz* come acceleratrici di convergenza numerica è accennato, e.g., nel math-notebook: *Determinazione di serie di potenze in  $\mathbb{R}$  dalle Funzioni Generatrici di Bernoulli e di Euler*, p. 15-17.



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

### Appendice 3

## Coefficienti polinomiali per l'espansione asintotica della Funzione GAMMA

La costruzione esplicita della somma asintotica  $S-dM$ , determinata a partire dalla somma doppia ridotta (143), richiede la determinazione dei coefficienti per le espansioni di potenze intere positive di polinomi. Si tratta di una generalizzazione dell'espansione della potenza di un binomio mediante il triangolo di Tartaglia, ben noto dall'algebra elementare.

□

La potenza  $k$ -esima di un polinomio di  $n$  addendi, con  $\{n, k\} \subset \mathbb{Z}^+ \wedge n \leq k$ , ha un'espansione generale espressa dalla *Formula Polinomiale di Leibniz* (v., e.g., [22], 1, P. 46-53),

$$\left( \sum_{v=1}^n q_v \right)^k = \sum_{\mu=1}^{\binom{n+k}{k}} a_{\mu} \left( \prod_{v=1}^n q_v^{j_v} \right)_{\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^{\binom{n+k}{k}} a_{\mu} Q_{\mu}, \quad (\text{A.13})$$

i.e., un po' più esplicitamente,

$$(q_1 + q_2 + \dots + q_n)^k = \sum_{\mu=1}^{\binom{n+k}{k}} \frac{\overset{\equiv a_{\mu}}{k!}}{(j_1! j_2! \dots j_n!)_{\mu}} \overset{\equiv Q_{\mu}}{(q_1^{j_1} q_2^{j_2} \dots q_n^{j_n})_{\mu}}. \quad (\text{A.14})$$

Nell'espansione della potenza polinomiale (A.13), il monomio generale  $a_{\mu} Q_{\mu}$  ha *sempre* grado  $k$  vs. il prodotto delle potenze  $q_v^{j_v}$ , con  $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Il numero dei termini di questa espansione è uguale al numero delle *combinazioni con ripetizione* degli elementi  $q_v$ , presi a  $k$  per volta, i.e.,

$$\frac{\binom{n+k}{k}}{k!} \equiv \frac{\binom{n+k}{k} (n-1)!}{k! (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! ((n+k-1) - k)!} \equiv \binom{n+k-1}{k}. \quad (\text{A.15})$$

A sua volta, il *coefficiente polinomiale generalizzato*  $\mu$ -simo dell'espansione (A.14),

$$a_{\mu} \equiv \frac{k!}{(j_1! j_2! \dots j_n!)_{\mu}} \quad (\equiv P_{j_1, j_2, \dots, j_n; k; \mu}^R) \quad (\text{A.16})$$

corrisponde alla  $\mu$ -esima *permutazione*, con  $\mu \in \{1, 2, \dots, \binom{n+k}{k}!\}$ , degli  $n$  esponenti  $j_v$  vs. la

sequenza *ordinata*  $\{q_1 q_2 \dots q_n\}$ ; la  $\mu$ -esima permutazione, *ripetuta*  $j_\nu$  volte ( $j_\nu \in \{0, 1, \dots, k\}$ ), deve rispettare,  $\forall k$  assegnato, il *vincolo di omogeneità*

$$\sum_{\nu=1}^n j_\nu = k. \tag{A.17}$$

A questo punto, l'esecuzione attenta, sistematica e organizzata dei calcoli relativi all'Eq. (149) suggerisce la costruzione, con le Eq.i (A.14) e (A.16), delle tabelle dei *Coefficienti Polinomiali*  $a_\mu$  che la scelta  $N \equiv 8$  nella somma doppia (143), p. 60 (‡),

$$1 - \sum_{k=1}^8 \frac{x^k u^{2k}}{k!} \left( \sum_{\nu=1}^8 \frac{(-u)^\nu}{\nu+2} \right)^k \equiv 1 - \sum_{k=1}^8 \frac{x^k u^{2k}}{k!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \frac{q_1^{j_1} q_2^{j_2} \dots q_n^{j_n}}{j_1! j_2! \dots j_n!}, \tag{A.18}$$

con  $j_1 + j_2 + \dots + j_n = 8 \wedge q_\nu = (-u)^\nu / (\nu + 2)$ , richiede come *minimi sufficienti*. Si osservi che, in queste tabelle, gli esponenti  $j_\nu$  sono allineati secondo valori decrescenti, a partire dal maggiore,  $k$  (accumulo *in un solo* addendo), fino a raggiungere l'equi-distribuzione maggiore possibile di  $k$  tra i valori  $j_\nu$  che risulti compatibile con il numero  $n$  degli addendi del polinomio  $\sum_{\nu=1}^n q_\nu$  (metodo del 'crivello'). Quindi, le tabelle sono costruite per il caso *generale*, i.e., per  $n \geq k$ ; in ogni caso, va inteso sempre che ogni *riga* di valori  $j_\nu$  contiene  $n$  numeri, siano essi, tutti o in parte, non-nulli. Nel caso in discussione, essendo  $N = 8 = n$ , ci si deve *arrestare*, durante lo scorrimento della colonna di *sinistra* nelle tabelle, alla riga contenente  $n (= 8)$  valori  $j_\nu$  *non-nulli*, sotto il vincolo (A.17). Il simbolo  $\therefore \mapsto 0$  indica, pertanto, che i  $k - n$  interi positivi  $j_\lambda$  rimanenti sono *tutti nulli*, i.e., tali che  $q_\lambda^{j_\lambda} \equiv q_\lambda^0 = 1$ .

□

Le tabelle dei *Coefficienti Polinomiali* sufficienti per la costruzione dell'espansione asintotica (138) sono riportate nelle P. 102-105 successive.

■

(‡) Il criterio descritto, facilmente programmabile, è un'applicazione dell'algoritmo di *somma multipla* (o *multi-somma*)

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \equiv \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n \equiv \sum_j$$

discusso nel math-notebook *math-crumbs*, p. 64-66. L'ultimo simbolo di somma, a destra, ha come indice l' $n$ -vettore sintetico  $j$ .

$k = 2$

$j_\nu$	$a_\mu$
$2 \therefore \mapsto 0$	$a_1 = 1$
$1, 1 \therefore \mapsto 0$	$a_2 = 2$

$k = 3$

$j_\nu$	$a_\mu$
$3 \therefore \mapsto 0$	$a_1 = 1$
$2, 1 \therefore \mapsto 0$	$a_2 = 3$
$1, 1, 1 \therefore \mapsto 0$	$a_3 = 6$

$k = 4$

$j_\nu$	$a_\mu$
$4 \therefore \mapsto 0$	$a_1 = 1$
$3, 1 \therefore \mapsto 0$	$a_2 = 4$
$2, 2 \therefore \mapsto 0$	$a_3 = 6$
$2, 1, 1 \therefore \mapsto 0$	$a_4 = 12$
$1, 1, 1, 1 \therefore \mapsto 0$	$a_5 = 24$

$k = 5$

$j_\nu$	$a_\mu$
5 $\therefore \mapsto 0$	$a_1 = 1$
4,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_2 = 5$
3,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_3 = 10$
3,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_4 = 20$
2,2,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_5 = 30$
2,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_6 = 60$
1,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_7 = 120$

$k = 6$

$j_\nu$	$a_\mu$
6 $\therefore \mapsto 0$	$a_1 = 1$
5,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_2 = 6$
4,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_3 = 15$
4,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_4 = 30$
3,3 $\therefore \mapsto 0$	$a_5 = 20$
3,2,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_6 = 60$
3,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_7 = 120$
2,2,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_8 = 90$
2,2,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_9 = 180$
2,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{10} = 360$
1,1,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{11} = 720$

$k = 7$

$j_\nu$	$a_\mu$
7 $\therefore \mapsto 0$	$a_1 = 1$
6,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_2 = 7$
5,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_3 = 21$
5,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_4 = 42$
4,3 $\therefore \mapsto 0$	$a_5 = 35$
4,2,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_6 = 105$
4,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_7 = 210$
3,3,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_8 = 140$
3,2,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_9 = 210$
3,2,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{10} = 420$
3,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{11} = 840$
2,2,2,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{12} = 630$
2,2,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{13} = 1260$
2,1,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{14} = 2520$
1,1,1,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{15} = 5040$

$k = 8$

$j_\nu$	$a_\mu$
8 $\therefore \mapsto 0$	$a_1 = 1$
7,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_2 = 8$
6,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_3 = 28$
6,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_4 = 56$
5,3 $\therefore \mapsto 0$	$a_5 = 56$
5,2,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_6 = 168$
5,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_7 = 336$
4,4 $\therefore \mapsto 0$	$a_8 = 70$
4,3,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_9 = 280$
4,2,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_{10} = 420$
4,2,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{11} = 840$
4,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{12} = 1680$
3,3,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_{13} = 560$
3,3,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{14} = 1120$
3,2,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{15} = 3360$
3,1,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{16} = 6720$
2,2,2,2 $\therefore \mapsto 0$	$a_{17} = 2520$
2,2,2,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{18} = 5040$
2,2,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{19} = 10080$
2,1,1,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{20} = 20160$
1,1,1,1,1,1,1,1 $\therefore \mapsto 0$	$a_{21} = 40320$





**Edmund Taylor Whittaker** (1873-1956)



**George Neville Watson** (1886-1965)

## Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: [https://www.cm-physmath.net/libr\\_page.html](https://www.cm-physmath.net/libr_page.html) .

### Riferimenti generali

- [1] WHITTAKER, E. T. - WATSON, G. N., *A Course of Modern Analysis*, 4<sup>TH</sup> ED., CH. XII, CAMBRIDGE UN. PRESS (1927; REPR., 1973);
- [2] TRICOMI, F. G., *Funzioni Speciali*, TIRRENIA (1959; RIST. 1965);
- [3] LEBEDEV, N. N., *Special Functions and their Applications*, CH. I, DOVER PUBL.S (1965; REPR. 1972);
- [4] GATTESCHI, L., *Funzioni Speciali*, CAP. I, U.T.E.T. (1973);
- [5] OLVER, F. W. J., *Asymptotics and Special Functions*, ACADEMIC PRESS (1974);
- [6] TEMME, N. M., *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);
- [7] ANDREWS, G. E. - R. ASKEY, R. - ROY, R., *Special Functions*, CAMBRIDGE UN. PRESS (1999);
- [8] CARRIER, G. F. - KROOK, M. - PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable*, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1966);
- [9] ABRAMOWITZ, M. - STEGUN, I. A., EDs., *Handbook of Mathematical Functions*, DOVER PUBLNS, INC. (1972); REF.: AMS-55 (versione senza tavole numeriche);
- [10] LUKE, Y. L., *Mathematical Functions and their Approximations*, ACADEMIC PRESS (1975);
- [11] OLVER, F. W. J. - LOZIER, D. W. - BOISVERT, R. F. - CLARK, C. W., EDs., *N.I.S.T. Handbook of Mathematical Functions*, CAMBRIDGE UN. PRESS (2012) (link: <https://dlmf.nist.gov/>).

### Fonti originali, articoli e monografie

- [12] Lettera di L. Euler a C. Goldbach (1729), riprodotta in:  
FUSS, P. H., *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIII<sup>ème</sup> siècle*, **II** (ST. PETERSBURG, 1843);
- [13] LEGENDRE, A. M., *Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut de France*, p. 477, 485, 490 (PARIS, 1809);
- [14] LEGENDRE, A. M., *Traité des Fonctions Elliptiques et des Integrales Eulériennes*, **I, II & SUPPL.**, DE HUZARD-COURCIER (1825-1828);
- [15] LEGENDRE, A. M., *Exercices de Calcul Integral*, **I**, DE HOUZARD-COURCIER (1817);
- [16] PRYM, F. E., *Zur Theorie der Gammafunktion*, J. REINE ANGEW. MATH., **82**, p. 165-172 (1877);

- [17] ARTIN, E., *The Gamma Function*, HOLT, RINEHART & WINSTON (1964);
- [18] GAUSS, J. F. K., *Werke*, **III**, (1828), RIST. GEORG OLMS VERLAG (1973);
- [19] POCHHAMMER, L., *Mathematische Annalen*, **XXXV**, 495 (1890);
- [20] HASTINGS, C., JR., *Approximations for Digital Computers*, PRINCETON UN. PRESS (1955);
- [21] LANCZOS, C., *A precision approximation of the Gamma Function*, J. SIAM NUM. ANALYSIS, **B**, **1**, p. 86-96 (1964);
- [22] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, **1** E **2**, ZANICHELLI (-MASSON) (1991; RIST. 1998);
- [23] GIUSTI, E., *Analisi Matematica*, **1** E **2**, 2<sup>A</sup> ED., BOLLATI-BORINGHERI (1989; RIST. 1995);
- [24] SIBAGAKI, W., *Theory and Applications of the Gamma Function*, IWANAMI SYOTEN (1952);
- [25] MITTAG-LEFFLER, M. G., *Acta Societatis Scientiae Fennicae*, **XI**, p. 273-293 (1880); per precisazioni ulteriori, si veda, dello stesso autore: *Acta Mathematica*, **IV**, p. 1-79 (1884);
- [26] CAUCHY, A. L., *Exercices de Mathématique*, II<sup>nde</sup> Année, p. 91-92 (1827);
- [27] SAALSCHÜTZ, L., *Bemerkungen über die Gammafunktionen mit Negativen Argument*, ZEITSCHRIFT FÜR MATH. UND PHYS., **32**, 246-250 (1887); **33**, 362-271 (1888);
- [28] EULER, L., *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali*, ST. PETERSBOURG (1736).
- [29] EULER, L., *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*, **XVI** (1772);
- [30] Lettera di Leonhard Euler a Johann Bernoulli (1740), riprodotta in FELLMANN, E. A., *Leonhard Euler, ein Essay über Leben und Werk*, BIRKHÄUSER VERLAG (1983);
- [31] SWEENEY, D. W., *Mathematics of Computation*, **17**, 170 (1963);
- [32] DE LA VALLÉE POUSSIN, C. J., *Annales de la Société des Sciences de Bruxelles*, **22**, 84-90 (1898);
- [33] NEWMAN, F. W., *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **III**, 60 (1848);
- [34] WEIERSTRASS, K. T. W., *Journal für Mathematik*, **LI** (1856);
- [35] MENGOLI, P., *Novae Quadraturae Arithmeticae* (BOLOGNA, 1651);
- [36] CATALAN, E. C., *Mémoires de la Société des Sciences de Liège*, (2) **XII** (1885);
- [37] FRULLANI, G., *Sopra la dipendenza fra i Differenziali delle Funzioni e gli Integrali definiti*, MEMORIE DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA, **XVIII**, p. 458-517 (MODENA, 1820);
- [38] WIDDER, D. V., *Advanced Calculus*, 2<sup>ND</sup> ED., p. 357-358, PRENTICE HALL, INC. (1961);
- [39] WREDE, R. C. - SPIEGEL, M. R., *Advanced Calculus*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, p. 266, 274 e SEGG.; p. 282, PROB. 60 E 65 (B) (1964), 3<sup>RD</sup> ED., MCGRAW-HILL (2010);
- [40] BINET, J. P. M., *Journal de l'École Polytechnique*, **XVI**, p. 123-143 (1839);
- [41] PRINGSHEIM, A., *Mathematische Annalen*, **XXXI**, p. 473 (1888);
- [42] HENRICI, P., *Applied and Computational Complex Analysis*, **I**, **II**, **III**, JOHN WILEY & SONS (1974, 1977, 1986).
- [43] PLANA, G. A. A., *Memorie della Regia Accademia di Torino*, **XXV**, p. 403-418 (1820);
- [44] KRONECKER, L., *Journal für Mathematik*, **CV**, p. 345-348 (1889);
- [45] STIELTJES, T. J., *Tables des valeurs des sommes  $\sum_{n=1}^N (1/n^k)$* , ACTA MATHEMATICA, **10**, 299-302 (1887);
- [46] STIRLING, J., *Methodus Differentialis: Sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum* (LONDINI, 1730);
- [47] LAPLACE, P. S. DE, *Oeuvres*, TOME **VII**, 104 (1820);
- [48] COPSON, E. T., *Asymptotic Expansions*, CAMBRIDGE UN. PRESS (1971);
- [49] MOIVRE, A. DE, *Miscellanea Analytica*, p. 135 (1730);
- [50] BENDER, C. M. - ORSZAG, S. A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, MCGRAW-HILL (1978);
- [51] WRENCH, J. W., JR., *Mathematics of Computations*, **22**, 103, 620 (1968);

- [52] POINCARÉ, J. H., *Acta Mathematica*, **8**, 295-344 (1886);
- [53] DIRICHLET, J. P. G. L., *Werke*, **I** (1839);
- [54] TITCHMARSH, E. C., *The Theory of Functions*, 2<sup>ND</sup> ED., OXFORD UN. PRESS, P. 13-19 (1939; REPR. 1978);
- [55] MARKUSHEVICH, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2<sup>A</sup> ED., VOL. **2**, CHELSEA PUBL. CO. (1977);
- [56] SPIEGEL, M. R., ET AL., *Complex Variables*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 2<sup>ND</sup> ED., MCGRAW-HILL CO. (2009);
- [57] BROWN, J. W. - CHURCHILL, R. V., *Complex Variables and Applications*, 8<sup>TH</sup> ED., MCGRAW-HILL BOOK CO. (2009);
- [58] GRADSHTEYN, I. S. - RYZHIK, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, 7<sup>TH</sup> ED., ACADEMIC PRESS (2007);
- [59] HANSEN, E. R., *A Table of Series and Products*, PRENTICE HALL, INC. (1975)  
(dall'autore (CM), su richiesta e-mail, è disponibile un ADDENDUM (2018) in allegato PDF gratuito);
- [60] HAIRER, E. - WANNER, G., *Analysis by its History*, SPRINGER VERLAG (1996);
- [61] JEFFREYS, H. S. - JEFFREYS, B. S., *Methods of Mathematical Physics*, 3<sup>RD</sup> ED., CAMBRIDGE UN. PRESS (1956);
- [62] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7<sup>TH</sup> ED., CH. 13, ACADEMIC PRESS (2013);
- [63] SPIEGEL, M. R., *ADVANCED MATHEMATICS for Scientists and Engineers*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1971);
- [64] BONONCINI, V. E., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. **2**, 10<sup>A</sup> ED., C.E.D.A.M. (1974);
- [65] ZWILLINGER, D., ED., *Standard Mathematical Tables*, 33<sup>RD</sup> ED., CRC PRESS (2018);
- [66] BRONSTEIN, I. N. - SEMENDJAJEW, K. A. - MUSIOL, G. - MÜLIG, H., *Taschenbuch der Mathematik*, 4<sup>TE</sup> AUFL., VERLAG HARRI DEUTSCH (1999);
- [67] PRESS, W. H. - FLANNERY, B. P. - TEUKOLSKY, S. A. - VETTERLING, W. T., *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*, 3<sup>RD</sup> ED., CAMBRIDGE UN. PRESS (2007);
- [68] HAVIL, J., *Gamma: Exploring Euler's Constant*, PRINCETON UN. PRESS (2003);
- [69] MOLLERUP, J. - BOHR, H., *Lärebog i Kompleks Analyse*, VOL. **III**, COPENHAGEN (1922);
- [70] JÄHNKE, E. - EMDE, F. - LÖSCH, *Tafeln höherer Funktionen*, 6<sup>A</sup> ED., TEUBNER (1975).

□

### Math freeware download links

(software rilasciati sotto la *GNU* (General Public License):

- [71] **Maxima** <sup>TM</sup>: <https://sourceforge.net/projects/maxima/files/> ;
- [72] **Octave** <sup>TM</sup>: <https://www.gnu.org/software/octave/#install> ;
- [73] **SciLab** <sup>TM</sup>: <https://www.scilab.org/download/> ;
- [74] **R** <sup>TM</sup>: <https://cran.r-project.org/bin/windows/base/> ;
- [75] **FreeMat** <sup>TM</sup>: <https://sourceforge.net/projects/freemat/files/> ;
- [76] **EMT** <sup>TM</sup> (**Euler Math Toolbox**): <http://euler.rene-grothmann.de/download.html> ;
- [77] **GeoGebra** <sup>TM</sup>: [https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra\\_Installation](https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation) ;
- [78] **EffeDiX** <sup>TM</sup>: <https://www.paololazzarini.it/effedix/> ;
- [79] **GNUplot** <sup>TM</sup>: <http://www.gnuplot.info/> .
- [80] LA COSTANTE  $\gamma$  DI EULER-MASCHERONI:  
<http://numbers.computation.free.fr/Constants/Gamma/gamma.html> ;
- [81] LA FORMULA DI STIRLING (confronti critici e raffinamenti computazionali più recenti)  
<http://www.luschny.de/math/factorial/approx/SimpleCases.html> .

□

■■■