

# Modelli evolutivi

differentiali lineari semplici nella Fisica

claudio magno

<https://www.cm-physmath.net/>

revisione  
03 gennaio 2025



**Harry Bateman (1882-1946)**

## INDICE

<b>INTRODUZIONE</b>	P. III
<b>A. MODELLI EVOLUZIONISTICI ELEMENTARI</b>	
A.1 IL MODELLO EVOLUZIONISTICO DI <b>MALTHUS</b> (T. R., 1766-1834)	P. 1
A.2 IL MODELLO EVOLUZIONISTICO DI <b>VERHULST</b> (P. F., 1804-1849)	P. 2
A.3 IL MODELLO PREDA-PREDATORE DI <b>LOTKA</b> (A. J., 1880-1949)- <b>VOLTERRA</b> (V., 1860-1940)	P. 3
<b>B. IL CIRCUITO ELETTRICO IN SERIE R-C</b>	
B.1 IL CARICAMENTO DI UN CONDENSATORE	P. 9
B.2 LA SCARICA DI UN CONDENSATORE	P. 10
<b>C. IL CIRCUITO ELETTRICO IN SERIE R-L</b>	
C.1 L'AUMENTO DI CONDUZIONE ATTRAVERSO UN INDUTTORE	P. 11
C.2 LA DIMINUZIONE DI CONDUZIONE ATTRAVERSO UN INDUTTORE	P. 12
<b>D. IL CIRCUITO ELETTRICO IN SERIE L-C (OSCILLANTE)</b>	P. 13
<b>E. IL CIRCUITO ELETTRICO IN SERIE R-L-C</b>	P. 15
E.1 CASO: $R < 2(LC)^{1/2}$	P. 15
E.2 CASO: $R = 2(LC)^{1/2}$	P. 16
E.3 CASO: $R > 2(LC)^{1/2}$	P. 17
<b>F. LA LEGGE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO NATURALE</b>	P. 18
F.1 DECADIMENTO RADIOATTIVO BINARIO IN CASCATA	P. 19
F.2 DECADIMENTO RADIOATTIVO MULTIPLO IN CASCATA - LE EQUAZIONI DI (CAUCHY)-BATEMAN	P. 21
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	P. 22

## INTRODUZIONE

Il modello sintetico Newtoniano di un Universo fenomenologico causalistico, congruente con la rappresentazione nello SpazioTempo 4-dim euclideo(-hilbertiano) *uniformemente continuo*, trova svariate realizzazioni attraverso quello strumento formidabile di indagine e di calcolo che è l'ANALISI MATEMATICA. Ne discendono tutti i *modelli operativi lineari* ben noti espressi, principalmente, da equazioni differenziali, sia ordinarie che a derivate parziali, da trasformate differenziali e, in parte rilevante, da equazioni e da trasformate integrali.

Essendo questo phys-notebook inteso come una sintesi *ridottissima* (tascabile) di esempî elementari, ho pensato di affrontare la loro soluzione semi-qualitativa con procedimenti classici che rimandano al 'Problema di Cauchy' delle *condizioni iniziali*. Altre applicazioni fisiche e ingegneristiche e metodi alternativi di soluzione sono contenuti nei testi (mi rincresce per le *troppe* omissioni) elencati nella **Bibliografia**. Il riferimento, in particolare, va all'impiego delle Trasformate *di Fourier* e *di Laplace* (v. [15], ..., [22]).

C M

## A. Modelli evolucionistico-temporali elementari

### A.1 Il modello evolucionistico di Malthus (T. R., 1766-1834)

Si consideri una popolazione *isolata* di individui *identici*, i cui unici fattori di evoluzione sono la *fertilità* e la *mortalità*. In tal senso, siano

- $N(t)$  una funzione derivabile che rappresenta il numero di individui *viventi* al tempo  $t$ ,
- $\nu$  il numero di nuovi individui nati *per individuo vivente e per unità di tempo*,
- $\mu$  il numero di nuovi individui morti *per individuo vivente e per unità di tempo*.

Allora, in un intervallo di tempo *variabile*  $\Delta t$ , il numero di nuovi *nati* e il numero di nuovi *morti* sono, rispettivamente,  $\nu \Delta t N(t)$  e  $\mu \Delta t N(t)$ , così che, rispetto a un certo tempo  $t$  di *riferimento*, la variazione del numero di individui nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  *adiacente*, nel passato o nel futuro *immediati*, è

$$\Delta N(t) \equiv N(t + \Delta t) - N(t) = (\nu - \mu) \Delta t N(t). \quad (1)$$

Dividendo i membri dell'Eq. (1) per  $\Delta t$  e prendendo il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si ha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{dN(t)}{dt} = (\nu - \mu)N(t),$$

i.e., in *notazione-punto* per la derivata temporale,

$$\dot{N}(t) = (\nu - \mu)N(t). \quad (2)$$

L'equazione differenziale (2), del 1° ordine e in *forma normale*, è del tipo sia *a variabili separabili* sia *lineare omogenea*.

La costante  $\lambda := \nu - \mu$  definisce il *potenziale biologico* della popolazione. L'Eq. (2), riscritta come *derivata logaritmica* di  $N(t)$ ,

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \lambda,$$

esprime il *tasso relativo* (e.g., come *percentuale*) *costante* ( $\nu - \mu \equiv \lambda$ ) di variazione (aumento o diminuzione) temporale della popolazione.

Se si conosce il numero  $N_0 \equiv N(0)$  di individui viventi al tempo iniziale  $t = 0$ , il numero di individui viventi al tempo  $t > 0$  è data dalla soluzione particolare dell'Eq. (2)

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}. \quad (3)$$

Per  $t \rightarrow +\infty$ , la popolazione evolverà aumentando esponenzialmente senza limite o diminuendo verso la sua estinzione asintotica secondo che sia  $\lambda \gtrless 0$ .

■

A.2 Il modello evolucionistico di **Verhulst** (P. F., 1804-1849)

Il *modello evolucionistico di MALTHUS* si dimostra, chiaramente, troppo semplicistico e irrealistico nella maggioranza dei casi. Infatti, all'aumento di una popolazione corrisponde, quanto meno, una diminuzione della disponibilità (finita!) di risorse ambientali. Questo fatto, a sua volta, innesca un processo di decrescita temporale del numero  $N(t)$  degli individui.

VERHULST propose, al posto di quella espressa dall'Eq. (2), la legge differenziale di *evoluzione*

$$\dot{N}(t) \equiv N'(t) = \lambda N(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{\kappa} \right), \quad (4)$$

con  $\{\lambda, \kappa\} \subset \mathbb{R}^+$  parametri empirici di evoluzione.

L'equazione differenziale (4) è del tipo di *Bernoulli* in forma normale. Riscritta nella forma più convenzionale dell'Analisi,

$$N'(t) - \lambda N(t) = -\frac{\lambda}{\kappa} N^2(t), \quad (5)$$

una sua *soluzione particolare* è  $N(t) \equiv 0$ . Per  $N(t) \neq 0$ , definita  $N(t) := (z(t))^{1/(1-2)} \equiv 1/z(t)$ , si calcola  $N' = d(z^{-1})/dt = -z'/z^2$ .

Pertanto, l'Eq. (5) assume la forma  $-z'/z^2 - \lambda/z = \lambda/(\kappa z^2)$ , i.e.,  $z' + \lambda z = \lambda/\kappa$ , quella di una equazione differenziale *lineare non-omogenea* del 1° ordine, il cui integrale generale è dato da

$$z(t; c) = e^{-\int \lambda dt} \left( \bar{c} + \int (\lambda/\kappa) e^{\int \lambda dt} dt \right) = \dots = \frac{1 + ce^{-\lambda t}}{\kappa}.$$

Segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale originaria si scrive

$$N(t; c) = \frac{\kappa}{1 + ce^{-\lambda t}} \equiv \frac{\kappa e^{\lambda t}}{c + e^{\lambda t}}. \quad (6)$$

Dalla famiglia di soluzioni particolari (6), si può, ora, determinare quella soluzione corrispondente

alla condizione *iniziale*  $N(0; c) \equiv \frac{\kappa e^{\lambda t}}{c + e^{\lambda t}} \Big|_{t=0} = N_0 (> 0)$ . Essa è tale che

$$c = \kappa/N_0 - 1. \quad (7)$$

Introducendo il valore (7) di  $c$  nell'Eq. (6), si ottiene l'*unica* soluzione del problema *specifico*,

$$N(t) \equiv \frac{\kappa N_0 e^{\lambda t}}{\kappa + N_0 (e^{\lambda t} - 1)}. \quad (8)$$

È interessante analizzare, per  $\kappa$  assegnata, l'andamento di *graf*( $N$ ) al variare di  $t (\in \mathbb{R}^+)$  nei tre casi possibili  $N_0 \leq \kappa$ : si trova che risulta sempre  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \kappa$ .

La costante  $\kappa$  è la cosiddetta *capacità* (o *disponibilità di risorse* dell'ambiente).

Le soluzioni particolari  $N(t) = 0$  e  $N(t) = \kappa$  sono le cosiddette *soluzioni di equilibrio*: la prima è quella banale; l'altra, detta *asintoticamente stabile* o *di equilibrio asintotico*, implica restrizioni precise e pianificate (sostenibilità) alla richiesta di risorse da parte degli individui.

Il *Modello di Malthus* discusso in precedenza corrisponde a una condizione irrealistica di *capacità illimitata* dell'ambiente nella soluzione (8) del *Modello di Verhulst*, i.e., a quando  $\kappa \rightarrow +\infty$ .

■

### A.3 Il modello preda-predatore di Lotka (1880-1949)-Volterra (V., 1860-1940)

Quello noto comunemente come il *modello differenziale preda-predatore* di LOTKA-VOLTERRA fu sviluppato (1910) dal lavoro iniziale del biofisico ucraino, naturalizzato US, di Leopoli (città, a quel tempo, appartenente alla zona polacca dell’Impero Austro-Ungarico), LOTKA, A. J., per lo studio delle reazioni di auto-catalisi chimica. Il modello ricevette (1920) l’attenzione del grande matematico russo KOLMOGOROV (A. N., 1903-1987) che lo applicò all’evoluzione di certi ‘sistemi organici’ di specie animali erbivore in un ambiente di specie vegetali di cui quegli erbivori si nutrono.

Lo stesso set di equazioni differenziali fu ricavato (1926), in modo indipendente, da VOLTERRA, V., nell’analisi dei tassi *relativi*, o percentuali, di variazione della fauna ittica nel Mare Adriatico.

In tempi più recenti, il modello ha subito estensioni applicative, approfondimenti e raffinamenti, con diramazioni fin dentro le teorie economiche e la Dinamica Cosmologica, diventando, peraltro, un caposaldo ormai classico negli studi di *stabilità* globale intorno a *punti fissi* o *attrattori* (Teoria dei Sistemi, autonomi e non-, e Meccanica Analitica). □

Nella sua forma più semplice, quella originaria, il sistema di equazioni differenziali lineari del 1° ordine *accoppiate* di Lotka-Volterra descrive un modello ecologico ‘preda-predatore’ (o, in modo equivalente, ‘ospite-parassita’) attraverso la quaterna parametrica ordinata  $\{a, b, p, q\} \subset \mathbb{R}^+$ , dove:

- $a$  è il tasso *relativo* (†) di *aumento naturale* del numero  $x(t)$  di *prede* (per disponibilità di risorse),
- $b$  è il tasso *relativo* di *diminuzione* del numero delle *prede* a causa della loro decimazione,
- $p$  è il tasso *relativo* di *diminuzione* del numero  $y(t)$  di *predatori* per diminuzione di prede,
- $q$  è il tasso *relativo* di *aumento naturale* del numero dei *predatori* per disponibilità di prede.

Il modello rispecchia, *almeno*, le condizioni seguenti  $\forall$  tempo  $t$ :

- la popolazione delle prede dispone di *risorse illimitate* dall’ambiente, come per il modello di Malthus, *crescendo* a un tasso relativo *proporzionale* al numero  $x(t)$  dei suoi individui ma, al tempo stesso, viene decimata dagli incontri (*totalmente*) *casuali* con i predatori, pertanto, a un tasso proporzionale al *prodotto* dei numeri delle prede e dei predatori *coesistenti*:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t); \tag{9}$$

- la popolazione dei predatori, dipendendo *esclusivamente* dalla disponibilità di prede, *diminuisce* a un tasso relativo *proporzionale* al numero  $y(t)$  dei suoi individui ma, contemporaneamente, aumenta grazie agli incontri (*totalmente*) *casuali* con le prede, pertanto, a un tasso proporzionale al *prodotto* dei numeri delle prede e dei predatori *coesistenti*:

$$\dot{y}(t) = -py(t) + qx(t)y(t). \tag{10}$$

Dall’accoppiamento delle Eq.i (9) e (10), si determina il *sistema-modello di Lotka-Volterra*,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = -py(t) + qx(t)y(t) \end{cases}. \tag{11}$$

Un procedimento standard di soluzione del sistema (11) consiste nella moltiplicazione ‘incrociata’ delle sue equazioni, la prima per  $(-p + qx)$  e, rispettivamente, la seconda per  $(a - by)$ ,

$$\begin{cases} (-p + qx)\dot{x}/x = a(-p + qx) - b(-p + qx)y \\ (a - by)\dot{y}/y = -p(a - by) + qx(a - by) \end{cases}, \quad \text{ottenendo}$$

$$\begin{cases} -p\dot{x}/x + q\dot{x} = -ap + aqx + bpy - bqxy \\ a\dot{y}/y - q\dot{y} = -ap + bpy + aqx - bqxy \end{cases}. \tag{12}$$

(†) In un problema di analisi di dati, va distinto attentamente il *tasso* (o variazione *temporale*) dal *tasso relativo* (o variazione temporale *percentuale* o *logaritmica*), i.e., il tasso *diviso* per il numero *totale* dei dati, o valori, di campionamento (dipendenti dal tempo).

Sottraendo membro-a-membro i termini del sistema equivalente (12), si trova la forma differenziale risolvente

$$-p\dot{x}/x + q\dot{x} - a\dot{y}/y + q\dot{y} = 0,$$

dalla cui integrazione immediata vs.  $t$  risulta l'espressione

$$-p \ln x + qx - a \ln y + qy = \lambda \quad (\equiv \text{costante}) \quad (13)$$

L'uguaglianza (13) implica in modo evidente che

$$z(x, y) := -p \ln x + qx - a \ln y + qy \equiv z(x(t), y(t)) \quad (14)$$

è un *integrale primo* del sistema (11) e poiché  $\dot{z} = 0$  dall'Eq. (13), allora,  $z(x, y)$  equivale a una *costante del moto*. Nel linguaggio della Meccanica Analitica, dunque, il piano  $X \times Y$  può essere interpretato come *piano delle fasi*, in cui, l'Eq. (13) rappresenta la famiglia di *curve di livello* di  $z$ .

Procedendo con uno studio della funzione  $(x; y) \mapsto z$ , si calcolano, dall'Eq. (14),

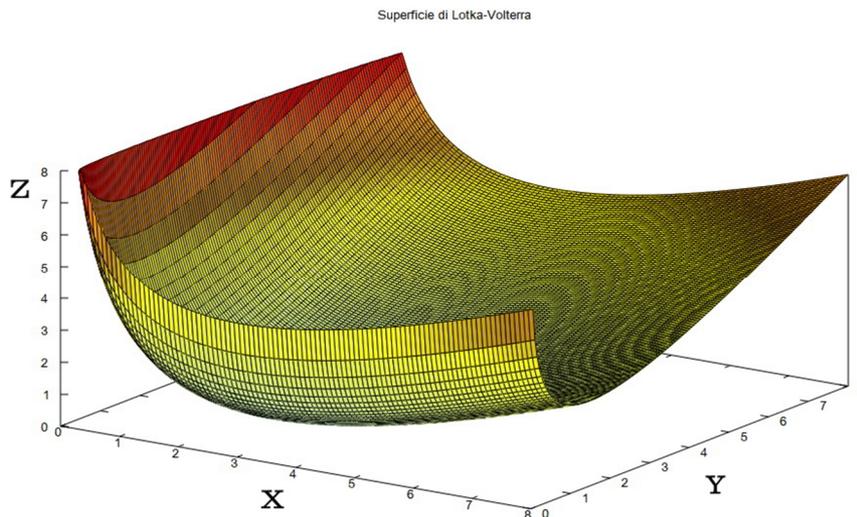
$$\begin{cases} z'_x = -p/x + q \\ z'_y = -a/y + b \end{cases}$$

con  $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^+$ , dato il loro significato 'assoluto', dalle quali, si trova che  $P \equiv (p/q; a/b)$  è un estremo stazionario, l'*unico*, di  $z$ . Poi, dal controllo del determinante *hessiano* di  $z$ ,

$$\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p/x^2 & 0 \\ 0 & a/y^2 \end{vmatrix} = \frac{ap}{(xy)^2} > 0,$$

si conclude che  $P \equiv (p/q; a/b)$  è un punto di *minimo globale (assoluto)* per  $z$ . Pertanto, risulta

$$0 < z(p/q, a/b) = a(1 - \ln(a/b)) + p(1 - \ln(p/q)) \leq \lambda. \quad (15)$$



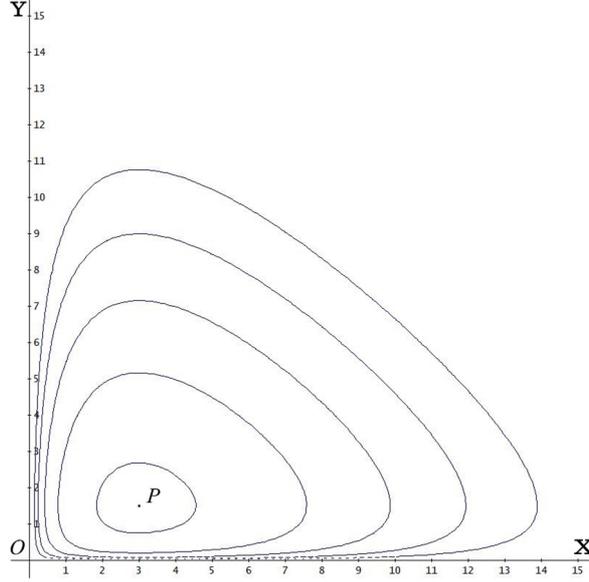
Superficie di Lotka-Volterra per  $\{a, b, p, q\} \equiv \{1.5, 1, 3, 1\}$

Peraltro, come *graf*( $z$ ) stesso suggerisce, si verifica immediatamente che

$$\lim_{x \vee y \rightarrow 0^+} z(x, y) = \lim_{x \vee y \rightarrow +\infty} z(x, y) = +\infty.$$

Quindi, in  $\mathcal{U}_\delta((p/q; a/b))$ , con  $\delta = o(1)$ , si ha definitivamente che le linee di livello (*ritratti di fase*) che la superficie  $z$  proietta sul piano  $X \times Y$  sono curve regolari *chiuse*, nel cui interno, è contenuto il *punto fisso* di equilibrio o di *stabilità* regolare  $P \equiv (p/q; a/b)$ .

Inoltre, l'*evoluzione temporale* della coppia  $\{x(t), y(t)\}$ , vincolata su una linea (traiettoria) *isoclina* chiusa, risulta necessariamente *periodica* e dipendente da  $\lambda$ .



Traiettorie isocline di Lotka-Volterra per  $\{a, b, p, q\} \equiv \{1.5, 1, 3, 1\}$

□

Circa la determinazione della periodicità orbitale, è opportuno richiamare alcuni risultati dal Calcolo Differenziale Vettoriale in versione specifica:

Siano, in generale,  $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\mathcal{C}_f \subseteq \mathbb{R}^n$  insiemi *aperti*; inoltre, sia  $f: \mathcal{D}_f \mapsto \mathcal{C}_f$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_f)$ .

Poi, siano assegnate  $d\xi/dt := f(\xi, t)$ , con  $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , e  $\xi_0 \equiv (\xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \dots, \xi_{0,n})$ .

Allora, mantenendo *inattiva* la variabile  $t$  – sia essa esplicita o no in  $f(\xi, t)$  – nell'operazione di derivazione vs.  $\xi$ , i.e., considerando  $t$  come un parametro *inerte*, si scrive, evidenziando gli  $n$  componenti vettoriali di  $f$  in  $\mathcal{C}_f$ ,

$$\begin{aligned} f(\xi, t) &= f(\xi_0, t) + \sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (\nabla f_\nu(\xi, t)|_{\xi_0} \cdot (\xi - \xi_0)) \right)^{(k)} \hat{\xi}_\nu \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \left( \sum_{\nu=1}^n (f'_\nu(\xi)|_{\xi_0} (\xi - \xi_{0,\nu})) \right)^{(k)} \hat{\xi}_\nu \right) \\ &\equiv f(\xi_0, t) + \mathbf{J}_f(\xi, t)|_{\xi_0} (\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \left( \sum_{\nu=1}^n (\xi - \xi_0)^\dagger \mathbf{H}_f(\xi, t)|_{\xi_0} (\xi - \xi_0) \right) \hat{\xi}_\nu + o(\|\xi - \xi_0\|^2), \end{aligned} \quad (16)$$

con  $\xi - \xi_0 \equiv d\xi = o(1)$ . La scrittura  $(\dots)^{(k)}$  indica la *potenza polinomiale simbolica*  $k$ -esima della somma *scalare*  $\nabla f_\nu(\xi, t)|_{\xi_0} \cdot (\xi - \xi_0)$ , data da  $n$  addendi. Dall'espansione *formale* di  $(\dots)^{(k)}$ , risulta una quantità *scalare*, secondo l'algoritmo *righe*  $\times$  *colonne* (v. [15], [17]).  $\mathbf{J}_f$  corrisponde alla *matrice jacobiana* di  $f$  calcolata in  $f = f_0$ ; lo stesso vale per la *matrice hessiana*  $\mathbf{H}_f$  di  $f$ . Infine,  $\dagger$  è il simbolo di *trasposizione coniugata* matriciale/vettoriale in  $\mathcal{C}$ .

In regime di *approssimazione lineare* (o di *linearizzazione*), la  $\mathcal{T}$ -serie (16) si riduce al polinomio

$$f(\xi, t) \approx f(\xi_0, t) + \mathbf{J}_f(\xi, t)|_{\xi_0} (\xi - \xi_0). \quad (16.1)$$

In regime di equilibrio vs. la variabile  $t$ , i.e., quando  $d\xi/dt = \mathbf{0}, \forall \xi$ , risulta  $f(\xi, t) \equiv f(\xi_0, t) = \mathbf{0}$ . Ne segue l'*equazione matriciale* (approssimata)  $n \times n$

$$\mathbf{J}_f(\xi, t)|_{\xi=\xi_0} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Ora, una matrice è definita *nulla* se sono nulli *tutti* i suoi elementi. Quindi, l'Eq. (17) si riduce all'equazione matriciale esplicita (i termini del primo e del terzo membro sono *matrici*  $n \times n$ )

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi_0, t) \\ \nabla f_2(\xi_0, t) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi_0, t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} f_1(\xi_0, t) & \frac{\partial}{\partial \xi_2} f_1(\xi_0, t) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \xi_n} f_1(\xi_0, t) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} f_2(\xi_0, t) & \frac{\partial}{\partial \xi_2} f_2(\xi_0, t) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \xi_n} f_2(\xi_0, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} f_n(\xi_0, t) & \frac{\partial}{\partial \xi_2} f_n(\xi_0, t) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \xi_n} f_n(\xi_0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17.1)$$

□

Circa il problema di Lotka-Volterra, si scrive, in forma esplicita estesa,

$$\dot{\xi} \equiv (\dot{x}(t, x, y), \dot{y}(t, x, y))^{\dagger}. \quad (18)$$

L'equilibrio *temporale* dei punti fissi nell'evoluzione delle popolazioni delle prede e dei predatori, si traduce, dall'Eq. (11), nel sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t, x, y) = 0 = x(a - by) \\ \dot{y}(t, x, y) = 0 = y(-p + qx) \end{cases}. \quad (19)$$

Questo possiede due soluzioni: una, banale,  $\{x(t), y(t)\} = \{0, 0\}$ , scartata inizialmente, ma che corrisponde all'*estinzione* completa e definitiva di entrambe le popolazioni; l'altra, ordinaria  $\forall t$ ,  $\{x(t), y(t)\} = \{p/q, a/b\}$ , com'è da attendersi dall'analisi precedente.

A sua volta, dall'Eq. (17.1) e (19), si determina il sistema lineare per la *stabilità delle orbite*, quindi, per la loro *periodicità* (vale il *Teorema di Schwarz*). Ne viene che

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \dot{x} = 0 = a - by \equiv (\nabla \dot{x})'_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \dot{y} = 0 = -p + qx \equiv (\nabla \dot{y})'_y \end{cases}. \quad (20)$$

Ancora, un richiamo brevissimo a un tema, questo, dell'Algebra Lineare:

Nel moto *stazionario* di un sistema, il *periodo*  $\tau$  è una *grandezza invariante* lungo una traiettoria *chiusa*. In generale, in rappresentazione matriciale, una trasformazione (*sesqui*-)lineare  $\mathbf{T} \equiv (\tau_{i,j})$  su  $\mathcal{C}^n$ , con  $\{i, j\} \in \{1, 2, \dots, n\}$ , che 'porta' un vettore  $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  in un vettore  $\eta \equiv (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ , viene espressa con l'equazione

$$\eta = \mathbf{T}\xi. \quad (21)$$

Ora, *possono* esistere dei vettori  $\eta$  *omotetici* ai vettori  $\xi$ , i.e., tali che

$$\mathbf{T}\xi = \lambda\xi, \quad (21.1)$$

dove,  $\lambda \in \mathcal{C}$ . È evidente che la trasformazione  $\mathbf{T}$  lascia *formalmente invariati* (i.e., 'paralleli' o proporzionali) questi vettori  $\xi$ , detti *auto-vettori*, nell'Eq. (21.1). Come tali, essi soddisfano l'*equazione caratteristica*

$$\lambda\xi - \mathbf{T}\xi = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T})\xi \equiv \begin{pmatrix} \lambda - \tau_{11} & -\tau_{12} & \cdots & -\tau_{1n} \\ -\tau_{21} & \lambda - \tau_{22} & \cdots & -\tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tau_{n1} & -\tau_{n2} & \cdots & \lambda - \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Il sistema di equazioni *omogenee* scalari associato all'Eq. matriciale (22) possiede  $n$  soluzioni non-banali in uno spazio

normale  $\mathbf{sse}$  è nullo il suo polinomio (determinante) caratteristico, i.e.,  $\mathbf{sse}$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}| \equiv \begin{vmatrix} \lambda - \tau_{11} & -\tau_{12} & \cdots & -\tau_{1n} \\ -\tau_{21} & \lambda - \tau_{22} & \cdots & -\tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tau_{n1} & -\tau_{n2} & \cdots & \lambda - \tau_{nn} \end{vmatrix} \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) = 0. \quad (23)$$

Le sue  $n$  radici (complesse)  $\lambda_\nu$  sono dette *autovalori* o *radici caratteristiche* o *invarianti* nella trasformazione  $\mathbf{T}$ . □

Nel problema di Lotka-Volterra, la determinazione di autovalori possibili del sistema (19) è di guida alla determinazione dell'*invariante*  $\mathcal{T}$ . Dall'Eq.-modello (11), si costruisce la matrice (jacobiana) di approssimazione lineare secondo l'Eq. (17.1),

$$\begin{pmatrix} \nabla \dot{x} \\ \nabla \dot{y} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \dot{x} & \frac{\partial}{\partial y} \dot{x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \dot{y} & \frac{\partial}{\partial y} \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x(a - by)) & \frac{\partial}{\partial y} (x(a - by)) \\ \frac{\partial}{\partial x} (y(-p + qx)) & \frac{\partial}{\partial y} (y(-p + qx)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -by \\ qy & -p + qx \end{pmatrix},$$

la si specifica nel punto di equilibrio ordinario  $(p/q; a/b)$  del piano delle fasi,  $\begin{pmatrix} 0 & -b p/q \\ aq/b & 0 \end{pmatrix}$ , e se ne determina l'equazione caratteristica,

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -b p/q \\ aq/b & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} \lambda & b p/q \\ -aq/b & \lambda \end{matrix} \right| = \lambda^2 + ap = 0. \quad (24)$$

L'equazione (24) è quella di un *moto armonico semplice* ( $\omega^2 \equiv ap (= \lambda_1 \lambda_2)$ ), avente autovalori-soluzione complessi coniugati ( $\lambda_{\pm} = \pm i(ap)^{1/2} \equiv \lambda_{1,2}$ ). Quindi, essendo il punto fisso *ellittico*, il moto risulta *periodico*. Segue, dalla definizione generale, che, in  $\mathcal{U}_s((p/q; a/b))$ , si ha il periodo

$$\mathcal{T} \equiv \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(ap)^{1/2}}. \quad (25)$$

Si osservi che  $\mathcal{T}$  non dipende dai parametri  $b$  e  $q$ , i.e., dalla *casualità degli incontri* tra prede e predatori, ma dalle *numerosità* delle popolazioni *in regime di stabilità* (parametri  $a$  e  $p$ ).

Inoltre, dalla *periodicità* di  $x(t)$  e di  $y(t)$ , seguono (v. Eq.i (11)),

$$\begin{cases} \int_0^{\mathcal{T}} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \ln \frac{x(\mathcal{T})}{x(0)} \equiv 0 \\ \int_0^{\mathcal{T}} \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = \ln \frac{y(\mathcal{T})}{y(0)} \equiv 0 \end{cases} \quad \text{i.e.,} \quad \begin{cases} 0 = \int_0^{\mathcal{T}} (a - by(t)) dt = a\mathcal{T} - b \int_0^{\mathcal{T}} y(t) dt \\ 0 = \int_0^{\mathcal{T}} (-p + qx(t)) dt = -p\mathcal{T} + q \int_0^{\mathcal{T}} x(t) dt \end{cases}$$

e, quindi,

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} y(t) dt = \frac{a}{b} \equiv \langle y(t) \rangle \\ \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} x(t) dt = \frac{p}{q} \equiv \langle x(t) \rangle \end{cases}. \quad (26)$$

In altri termini, le coordinate del punto di stabilità hanno anche i significati di valori di *aspettazione periodica* dei numeri di individui (per *qualsiasi* orbita chiusa e con gli *stessi*  $a$  e  $p$ ).

□

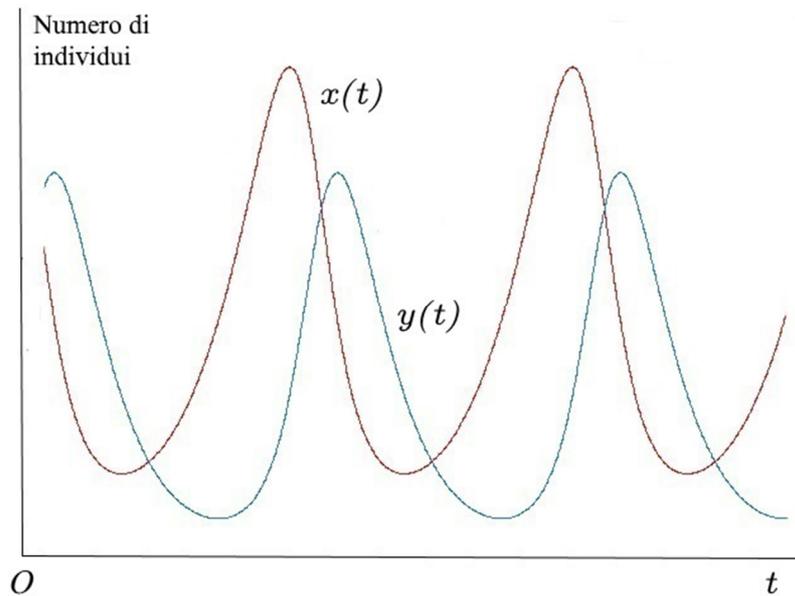
In generale, le soluzioni periodiche  $x(t)$  e  $y(t)$  *non* sono ricavabili esplicitamente per via analitica ma solo per via *numerica*. E.g., si può ricorrere al *metodo di Kutta-Runge del 4° ordine*, fissando il punto iniziale dell'orbita,  $(x_0; y_0)$ , ricavato dall'Eq. (13) specificando  $\lambda = \lambda_0$ , come una delle due intersezioni *reali* tra l'Eq. (13) e la retta  $y = mx$ , con  $m$  scelto in modo conveniente.

Il metodo, già implementato nei migliori programmi di calcolo, si applica al *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} \mapsto x(a - by) := f(x, y) \\ \dot{y} \mapsto y(-p + qx) := g(x, y) . \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (27)$$

Riapplicando il metodo con coppie di valori iniziali *diversi* o applicando altri metodi (di *Romberg*, di *Milne*, di *Hamming*) si otterranno correzioni, aggiustamenti e conferme grafiche.

Profili tipici di  $\text{graf}(x(t))$  e di  $\text{graf}(y(t))$  sono mostrati qui di seguito:



Profili tipici di  $\text{graf}(x(t))$  e di  $\text{graf}(y(t))$   
(generati da **Maxima**™ con il *metodo di Kutta-Runge del 4° ordine*)

L'assegnazione di una quaterna  $\{a, b, p, q\}$  di parametri produce una *sfasatura* costante specifica tra le popolazioni delle prede e dei predatori in regime di stabilità temporale (nei grafici di  $x(t)$  e di  $y(t)$  mostrati qui sopra, la popolazione dei predatori appare in 'ritardo' di circa il 17% per ciclo vs. quella delle prede, quindi è in fase di crescita).

■

## B. Il circuito elettrico in serie R-C

### B.1 Il caricamento di un condensatore

Quando il generatore di tensione *costante* ( $\therefore V$ ) viene chiuso sul circuito ( $t = 0$ ), il condensatore ( $\therefore C$ ) è ancora scarico e, quindi, la d. d. p. tra le sue armature è *nulla* mentre la d. d. p. attraverso il resistore ( $\therefore R$ ) ha il valore *massimo*  $V$ , quello del generatore, e conduce una corrente di intensità istantanea *massima*,

$$I \equiv i(0) = \frac{V}{R} = \left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=0} \equiv \dot{q}(0),$$

essendo  $q \equiv q(t)$  la quantità di carica elettrica presente nel condensatore all'istante  $t$ .

All'istante  $t$ , le differenze di potenziale attraverso, rispettivamente, il resistore e il condensatore valgono  $V_R(t) = i(t)R$  e  $V_C(t) = q(t)/C$ . Quindi,  $\forall t \geq 0$ , si ha

$$V \equiv V_R(t) + V_C(t) = i(t)R + q(t)/C, \quad (1)$$

i.e., in modo equivalente, la corrente

$$i(t) \equiv \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{q(t)}{RC}. \quad (2)$$

Rispetto alla carica elettrica, l'Eq. (2) è un'equazione differenziale del 1° ordine sia *lineare non-omogenea* che a *variabili separabili*. Sfruttando la prima rappresentazione,

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{V}{R}, \quad (3)$$

se ne scrive immediatamente l'integrale generale

$$q(t; k) = \left( k + \int (V/R) e^{\int \frac{1}{RC} dt} dt \right) e^{-\int \frac{1}{RC} dt} = k e^{-t/(RC)} + VC, \quad (4)$$

dove,  $VC \equiv Q$  è la carica massima (finale) nel condensatore, corrispondente a  $i(t) \big|_{t \rightarrow +\infty} \equiv 0$ .

La *soluzione fisica* – unica! – del processo di caricamento si determina dall'Eq. (4) imponendo la condizione iniziale  $0 \equiv q(0; k) = k + VC$ , i.e.,  $k = -VC$ . Pertanto, l'integrale generale espresso dall'Eq. (4) restituisce la soluzione particolare richiesta,

$$q(t) = Q(1 - e^{-t/(RC)}) \equiv VC(1 - e^{-t/(RC)}), \quad (5)$$

che rappresenta un *aumento* di carica nel condensatore.

A sua volta, l'andamento della corrente di caricamento deve risultare *decescente* nel tempo.

Infatti, derivando l'Eq. (5), si ottiene

$$i(t) \equiv \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/(RC)} = I e^{-t/(RC)}. \quad (6)$$

La costante temporale  $\tau \equiv RC$  è detta *tempo di rilassamento* del circuito R-C, i.e., quello necessario per ridurre il valore della corrente a  $1/e$  di quello iniziale. Il tempo  $t_{1/2} \equiv \tau \ln 2$  è quello di *dimezzamento* della corrente ovvero quello necessario per caricare il condensatore fino a *metà* della carica disponibile nel circuito,  $Q/2$ .

□

**B.2. La scarica di un condensatore**

Al tempo  $t = 0$ , una carica totale  $Q_0 \equiv q(t)|_{t=0}$  è contenuta nel condensatore. Non è necessario assumere che sia  $Q_0 \equiv Q$ , la carica di saturazione definita al Punto B.1 precedente.

All'apertura del circuito ( $t = 0$ ), il generatore di tensione viene escluso così che il condensatore incomincia scaricare attraverso il resistore.

Quindi, per  $t \geq 0$ , l'Eq. (1) diventa

$$0 = V_R(t) + V_C(t) = i(t)R + \frac{q(t)}{C}, \text{ da cui, si trova che } i(t) = -\frac{\dot{q}(t)}{RC}, \text{ i.e.,}$$

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0, \quad (7)$$

un'equazione differenziale *lineare omogenea* (trasformabile in una *a variabili separabili*), il cui integrale generale è dato da

$$q(t; k) = k e^{-t/(RC)}. \quad (8)$$

La soluzione fisica, corrispondente alla condizione iniziale  $Q_0 \equiv q(0; k) = k$ , è

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \equiv V_C(0) C e^{-t/(RC)}. \quad (9)$$

Derivando l'Eq. (9), si determina l'andamento temporale della *corrente di scarica*,

$$\dot{q}(t) \equiv i(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/(RC)} \equiv -\frac{V_C(0)}{R} e^{-t/(RC)}. \quad (10)$$

Il segno '−' davanti a  $Q_0/RC$  rende conto del verso della *corrente di scarica*, opposto a quello relativo al processo di caricamento.

■

## C. Il circuito elettrico in serie R-L

### C.1 L'aumento di conduzione attraverso un induttore

Quando il generatore di tensione  $V = costante$  viene chiuso sul circuito ( $t = 0$ ), l'intensità della corrente non sale istantaneamente al suo valore finale ma, a causa della f. e. m. auto-indotta, cresce a un tasso che dipende dall'*auto-induttanza*  $L$  e dalla *resistenza*  $R$  del circuito. Le differenze di potenziale attraverso l'induttore e attraverso il resistore sono, rispettivamente,  $V_L(t) = L di(t)/dt$  e  $V_R(t) = i(t)R$ , da cui, per *sovrapposizione*, risulta

$$V = V_L(t) + V_R(t) = L di(t)/dt + Ri(t).$$

Quindi, il *tasso di aumento* della corrente è

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} i(t). \quad (11)$$

Alla chiusura del circuito, è ancora  $i(0) \equiv 0$ , così che la corrente incomincia a crescere al tasso  $i'(t)|_{t=0} = V/L$ : quanto maggiore è l'*auto-induttanza*  $L$  del circuito tanto *meno rapido* risulta l'aumento iniziale della corrente.

Mentre la corrente cresce, anche il termine  $(R/L)i(t)$  cresce e, quindi, il tasso di crescita della corrente diminuisce progressivamente. Quando la corrente raggiunge il suo valore *stazionario* finale  $I$ , il suo tasso di aumento è 0, i.e., l'Eq. (11) si riduce alla forma  $0 = V/L - RI/L$ . questo dà  $I = V/R$ , corrispondente alla conduzione *puramente resistiva*.

L'Eq. (11) può essere riscritta nelle forme alternative di un'equazione differenziale sia *a variabili separabili* sia *lineare non-omogenea del 1° ordine*. Sfruttando, e.g., la prima rappresentazione,  $-\frac{di}{i - V/R} = \frac{R}{L} dt$ , e integrandone completamente i membri, si trova

$$-\ln\left(\frac{V}{R} - i(t)\right) = \frac{R}{L} t + k. \quad (12)$$

La soluzione del *problema fisico* di aumento conduttivo in regime lineare R-L corrisponde all'introduzione della condizione iniziale  $i(t)|_{t=0} \equiv 0$  nell'Eq. (12). Si ottiene  $k = -\ln(V/R)$  che, sostituito nell'Eq. (12), dà

$$\ln\left(1 - \frac{Ri(t)}{V}\right) = -\frac{R}{L} t. \quad (13)$$

Quindi, esponenziando i membri dell'Eq. (13), si determina la corrente,

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \equiv I(1 - e^{-(R/L)t}), \quad (14)$$

il cui tasso di crescita vale

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V}{L} e^{-(R/L)t} \equiv \frac{IR}{L} e^{-(R/L)t}. \quad (15)$$

Il modello matematico differenziale lineare descrive le previsioni fisiche in modo accettabile: le Eq. (14) e (15) danno, rispettivamente,  $i(0) = 0$  e  $i'(0) = V/L$ , mentre, per  $t \rightarrow +\infty$ , risulta in modo evidente che  $i(t) \rightarrow V/R \equiv I$  e  $i'(t) \rightarrow 0$ .

La costante  $\tau := L/R$  si definisce *costante temporale* o *di decadimento* del circuito  $R-L$ . Essa corrisponde al tempo necessario affinché, dalla chiusura del circuito, la corrente aumenti in intensità da 0 fino a  $(1 - 1/e) \approx 63\%$  del suo valore finale  $I$ .

Invece, il tempo  $t_{1/2}$  richiesto affinché la corrente raggiunga metà del suo valore finale si ottiene ponendo  $e^{-(R/L)t} = 1/2$ . Si ottiene  $t_{1/2} = \tau \ln 2$ , come per il circuito  $R-C$ .

#### Osservazione

L'Eq. (14) può essere scritta nella forma  $dq(t) = I(1 - e^{-(R/L)t})dt$  e, quindi, integrata rispetto al tempo tra 0 e  $t$ , assumendo che  $q(0) = q_0$ :

$$q(t) = q_0 + I \int_0^t (1 - e^{-(R/L)u}) du = q_0 + I \left( t + \frac{L}{R} e^{-(R/L)t} \right) \sim It \equiv \frac{V}{R} t. \quad (16)$$

L'andamento asintotico ( $t \rightarrow +\infty$ ) della quantità di carica che fluisce nel circuito  $R-L$  porta alla conclusione ovvia che essa, in assenza di un condensatore, *non può* essere accumulata fino a un valore di saturazione ma aumenta (linearmente) senza limite. □

#### C.2. La diminuzione di conduzione attraverso un induttore

Se il generatore di tensione (costante) viene aperto bruscamente ( $V \equiv 0$ ) sul circuito  $R-L$  in regime di conduzione stazionaria, l'Eq. (11) indica che la corrente diminuisce al tasso

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t). \quad (17)$$

L'integrale generale dell'Eq. Differenziale (17), sia *a variabili separabili* che *lineare omogenea del 1° ordine*, è immediato,

$$i(t; k) = k e^{-(R/L)t}. \quad (18)$$

La soluzione (particolare) *fisica* è ottenuta imponendo la condizione iniziale  $i(0; k) \equiv I$ , che specifica il valore  $k \equiv I$  per la costante di integrazione. Ne risulta la corrente

$$i(t) = I e^{-(R/L)t}, \quad (19)$$

infinitesima per  $t \rightarrow +\infty$ . ■

## D. Il circuito elettrico in serie **L-C** (oscillante)

Un circuito  $L-C$  ideale è costituito da un induttore perfettamente conduttivo ( $R_L \equiv 0$ ) e da un condensatore *carico* connessi *in serie*. Un circuito  $L-C$  sia inizialmente aperto e una carica (in eccesso)  $Q \equiv V_{C,0}C$ , con  $V_{C,0} \equiv V_C(t)|_{t=0}$ , sia presente nel condensatore.

All'istante  $t = 0$  di chiusura del circuito, il condensatore incomincia scaricare attraverso l'induttore finché, persa tutta la carica accumulata, le differenze di potenziale sia tra le sue armature che tra i terminali dell'induttore diventano nulle.

Nel frattempo, la corrente di scarica che ha attraversato l'induttore ha generato un campo variabile di induzione magnetica  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ , concatenato con l'induttore.  $\mathbf{B}$  si attenua progressivamente (nel tempo) a causa dell'insorgenza di una f. e. m. nell'induttore polarizzata nello *stesso* senso della corrente (*Legge di Faraday-Neumann-Lenz-Maxwell*).

Si ricordi che si definisce f. e. m. il *lavoro per-unità-di-carica-positiva* necessario per spostare cariche elettriche *positive*. La corrente che queste costituiscono è orientata in senso *opposto* a quello della f. e. m. generatrice. Pertanto, se si induce in un circuito una f. e. m. ulteriore diretta nello *stesso* senso di una corrente preesistente, questa viene *contrastata* dalla corrente prodotta dalla f. e. m. *indotta*. L'attenuazione conseguente della corrente nel circuito  $L-C$  annulla il campo  $\mathbf{B}$  mentre si completa il ricaricamento del condensatore con una polarità *opposta* a quella iniziale.

A questo punto, il processo si inverte e, in assenza (ideale) di perdite di energia, le cariche (dello stesso segno) fluiscono avanti e indietro indefinitamente da un'armatura all'altra del condensatore, generando il fenomeno delle *oscillazioni elettriche* (stazionarie).

L'analogia con le oscillazioni meccaniche di una *molla lineare ideale* ('di Hooke') è evidente.

A ogni istante, in regime *stazionario*, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore,  $V_C(t) = q(t)/C$ , deve uguagliare quella tra i terminali dell'induttore,  $V_L(t) = L di(t)/dt$ . Inoltre, poiché,  $\forall t$ , il valore della corrente attraverso l'induttore è uguale all'*opposto* della variazione temporale della carica presente nel condensatore, si ha che  $i(t) = -dq(t)/dt \equiv \dot{q}$ .

Combinando queste relazioni nell'equazione di conservazione dell'energia per tale sistema isolato (i.e., la *2<sup>a</sup> legge di Kirchhoff* per la maglia  $L-C$  in serie), si scrive, vs.  $q(t)$  nel condensatore,

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (20)$$

L'Eq. (20) è del 2° ordine, *lineare a coefficienti costanti e omogenea*. La sua forma e, quindi, il procedimento per la sua soluzione, sono identici a quelli per il modello dell'*oscillatore armonico libero*. L'integrale generale e la sua derivata 1<sup>a</sup> risultano, rispettivamente,

$$q(t; k_1, k_2) = k_1 \cos \frac{t}{(LC)^{1/2}} + k_2 \sin \frac{t}{(LC)^{1/2}}, \quad (21)$$

$$\dot{q}(t; k_1, k_2) = -\frac{k_1}{(LC)^{1/2}} \sin \frac{t}{(LC)^{1/2}} + \frac{k_2}{(LC)^{1/2}} \cos \frac{t}{(LC)^{1/2}}, \quad (22)$$

definendo, con  $\omega := 1/(LC)^{1/2}$ , la *frequenza ciclica naturale* delle *oscillazioni elettriche*.

Le condizioni iniziali per la determinazione della soluzione particolare rappresentativa del *problema fisico* definiscono il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} q(0; k_1, k_2) = Q \equiv V_{C,0}C \\ \dot{q}(0; k_1, k_2) \equiv i(0; k_1, k_2) = 0 \end{cases}.$$

Mediante le Eq.i (21) e (22), si trovano i valori  $k_1 = V_{C,0} C$  e  $k_2 = 0$  che, sostituiti nelle stesse, forniscono il *comportamento temporale periodico*, quindi, puramente *periodico*, sia della *carica* elettrica che della *corrente*,

$$q(t) = V_{C,0} C \cos \frac{t}{(LC)^{1/2}}, \quad (23)$$

$$\dot{q}(t) \equiv i(t) = -V_{C,0} \left( \frac{C}{L} \right)^{1/2} \sin \frac{t}{(LC)^{1/2}}, \quad (24)$$

in analogia completa con il modello formale per le oscillazioni meccaniche *libere* di Hooke. Infine, alle Eq.i (23) e (24), si possono aggiungere, per completezza, le espressioni esplicite (e attese) dei comportamenti oscillatorî delle d. d. p. ai capi del *condensatore* e dell'*induttore* in regime *L-C* stazionario, rispettivamente:

$$V_C(t) = V_{C,0} \cos \frac{t}{(LC)^{1/2}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} V_L(t) &= L \frac{d}{dt} \left( -V_{C,0} \left( \frac{C}{L} \right)^{1/2} \sin \frac{t}{(LC)^{1/2}} \right) = -L V_{C,0} \left( \frac{C}{L} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{(LC)^{1/2}} \cos \frac{t}{(LC)^{1/2}} \right) \\ &\equiv -V_{C,0} \cos \frac{t}{(LC)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

■

## E. Il circuito elettrico in serie **R-L-C**

Il modello del circuito  $L-C$  in serie mostra un'idealizzazione evidente, l'assenza di resistenza. Questa è presente sia negli avvolgimenti dell'induttore che nei collegamenti del circuito. L'effetto della resistenza è quello di dissipare energia elettromagnetica termicamente; in questo modo, la resistenza di un circuito elettrico ha un ruolo analogo a quello dell'attrito in un sistema meccanico.

Si supponga che un induttore di auto-induttanza  $L$  e un resistore di resistenza  $R$  siano connessi in serie con un condensatore carico, di capacità  $C \equiv Q/V_C(0) \equiv Q/V_{C,0}$ . Inizialmente, il sistema è aperto e isolato.

All'istante della chiusura del circuito ( $t = 0$ ), il condensatore incomincia a scaricare ma, a causa delle perdite-Joule ( $\propto Ri^2(t)$ ) nel resistore, l'energia dell'induttore, quando il condensatore è completamente scarico, è minore dell'energia presente inizialmente nel condensatore. A sua volta, l'energia contenuta nell'induttore diminuisce, come conseguenza della diminuzione del campo di induzione magnetica  $B(t)$  associato alla corrente decrescente, e così via.

Se la resistenza  $R$  è relativamente piccola, il circuito (i.e., i suoi parametri circuitali variabili, la corrente e la carica) oscilla con andamento temporale armonico sotto-smorzato.

Per valori di  $R$  crescenti, il comportamento oscillatorio si attenua fino a svanire nel limite dello smorzamento critico.

Per valori di  $R$  ancora più elevati, il circuito entra in regime di sovra-smorzamento, con la corrente quasi istantaneamente evanescente.

La descrizione quantitativa dello stato di chiusura del circuito in serie  $R-L-C$ , con il condensatore inizialmente carico, si esprime,  $\forall t \geq 0$ , attraverso la 2<sup>a</sup> legge di Kirchhoff, come

$$0 = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) \equiv i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}. \quad (27)$$

Rispetto alla carica accumulata nel condensatore, l'Eq. (27) diventa

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (28)$$

Questa, per  $R \equiv 0$ , si riduce all'Eq. differenziale (20). Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata all'Eq. differenziale (28) (del 2° ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti),

$$\lambda = -R/(2L) \pm ((R/(2L))^2 - 1/(LC))^{1/2} \equiv -R/(2L) \pm (\Delta/4)^{1/2}, \quad (29)$$

includono i vari contributi temporali al tempo di rilassamento circuitale. Il discriminante (ridotto)

$$\Delta = (R/L)^2 - 4/(LC) \equiv (R^2 - 4LC)/L^2$$

indica chiaramente che la forma dell'integrale generale dell'Eq. (28),  $q(t; k_1, k_2)$ , dipende dal confronto tra il valore di  $R$  e quello di  $2(L/C)^{1/2}$ .

Precisamente,

E.1 se  $\Delta < 0$ , i.e., se  $R < 2(L/C)^{1/2}$ , risulta

$$q(t; k_1, k_2) = e^{-(R/2L)t} (k_1 \cos(-\Delta/4)^{1/2}t + k_2 \sin(-\Delta/4)^{1/2}t), \quad (30)$$

dalla quale, si calcola la corrente (derivata 1<sup>a</sup>)

$$\dot{q}(t; k_1, k_2) = e^{-(R/2L)t} ((-k_1 R/(2L) + k_2 (-\Delta/4)^{1/2}) \cos(-\Delta/4)^{1/2}t - \dots)$$

$$\downarrow - (k_1(-\Delta/4)^{1/2} + k_2 R/(2L)) \sin(-\Delta/4)^{1/2} t). \quad (31)$$

Come per il circuito  $L-C$ , anche le soluzioni (particolari) *fisiche* appropriate per il circuito  $R-L-C$  si ricavano dalla soluzione del *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} q(0; k_1, k_2) = Q \equiv V_{C,0} C \\ \dot{q}(0; k_1, k_2) \equiv i(0; k_1, k_2) = 0 \end{cases}$$

Con le Eq.i (26) e (27), si trovano i valori  $k_1 = V_{C,0} C$  e  $k_2 = \frac{V_{C,0} RC}{(4L/C - R^2)^{1/2}}$ , i quali, sostituiti nelle stesse equazioni Eq.i (26) e (27), forniscono la dipendenza *temporale fisica* della carica elettrica e della corrente,

$$\begin{aligned} q(t) &= V_{C,0} C e^{-(R/2L)t} (\cos(1/LC - (R/2L)^2)^{1/2} t + \\ &\quad \downarrow + R/(4L/C - R^2)^{1/2} \sin(1/LC - (R/2L)^2)^{1/2} t), \quad (32) \\ \dot{q}(t) \equiv i(t) &= -\frac{2V_{C,0}}{(4L/C - R^2)^{1/2}} e^{-(R/2L)t} \sin(1/LC - (R/2L)^2)^{1/2} t \end{aligned}$$

Si noti come, per  $R \equiv 0$ , le Eq.i (32) e (33) si riducano, prevedibilmente, alle Eq.i (23) e (24) per il circuito  $L-C$ .

L'analisi svolta quando  $R < 2(L/C)^{1/2}$ , implicando soluzioni di andamento *periodico*, modulato da un'attenuazione esponenziale, corrisponde al regime di *sovra-smorzamento*;

Es.2 se  $\Delta = 0$ , i.e., se  $R = 2(L/C)^{1/2}$ ,

l'equazione caratteristica associata all'Eq. differenziale (27) ha la radice *doppia*  $\lambda = -R/(2L)$ . Pertanto, l'integrale generale e la sua derivata 1<sup>a</sup> si scrivono

$$q(t; k_1, k_2) = e^{-(R/(2L))t} (k_1 + k_2 t), \quad (34)$$

$$\dot{q}(t; k_1, k_2) = -e^{-(R/(2L))t} (k_1 R/(2L) - (1 - R/(2L)t) k_2). \quad (35)$$

Dal *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} q(0; k_1, k_2) = Q \equiv V_{C,0} C \\ \dot{q}(0; k_1, k_2) \equiv i(0; k_1, k_2) = 0 \end{cases}$$

si ottengono i valori  $k_1 = V_{C,0} C$  e  $k_2 = V_{C,0} RC/(2L)$ , appropriati per la soluzione del *problema fisico*. Introducendo tali valori nelle equazioni (34) e (35), si selezionano le rappresentazioni temporali della *carica* nel condensatore e della *corrente di scarica*,

$$q(t) = V_{C,0} C e^{-(R/(2L))t} \left( 1 + \frac{R}{2L} t \right), \quad (36)$$

$$\dot{q}(t) \equiv i(t) = -\frac{V_{C,0} CR^2}{4L^2} t e^{-(R/(2L))t}. \quad (37)$$

Le equazioni-modello (36) e (37) corrispondono al regime di *smorzamento critico*, i.e., al limite tra la sparizione e l'insorgenza di *comportamenti periodici*. La negatività della corrente rende conto del processo di *scarica* del condensatore, i.e., del collasso energetico del *sistema* accumulatore;

E.3 se  $\Delta > 0$ , i.e., se  $R > 2(L/C)^{1/2}$ ,

l'equazione caratteristica associata all'Eq. differenziale (28) possiede due radici *negative* e distinte. In tale circostanza, l'integrale generale si scrive

$$\begin{aligned} q(t; k_1, k_2) &= k_1 e^{(-R/(2L) + \Delta^{1/2}/2)t} + k_2 e^{(-R/(2L) - \Delta^{1/2}/2)t} \\ &\equiv e^{(-R/(2L) - \Delta^{1/2}/2)t} (k_1 + k_2 e^{-\Delta^{1/2}t}) \equiv e^{-\alpha t} (k_1 + k_2 e^{-\beta t}), \end{aligned} \quad (38)$$

avendo definito, per comodità,  $\alpha := R/(2L) - \beta/2 \wedge \beta := \Delta^{1/2}$ . Tali abbreviazioni consentono di calcolare più rapidamente

$$\dot{q}(t; k_1, k_2) = -e^{-\alpha t} (\alpha k_1 + (\alpha + \beta) k_2 e^{-\beta t}), \quad (39)$$

e di osservare che  $\alpha + \beta \equiv R/(2L) + \beta/2$ .

Come per i circuiti precedenti, le *soluzioni fisiche* rappresentative della carica e della corrente discendono dalla soluzione del *problema di Cauchy* appropriato, i.e.,

$$\begin{cases} q(0; k_1, k_2) = Q \equiv V_{C,0} C = k_1 + k_2 \\ \dot{q}(0; k_1, k_2) \equiv i(0; k_1, k_2) = 0 = \alpha k_1 + (\alpha + \beta) k_2 \end{cases} \quad (40)$$

La soluzione del sistema (40) è costituita dalla coppia di valori

$$\begin{cases} k_1 = \frac{V_{C,0} C}{2} \left( 1 + \frac{R}{(R^2 - 4L/C)^{1/2}} \right) \\ k_2 = \frac{V_{C,0} C}{2} \left( 1 - \frac{R}{(R^2 - 4L/C)^{1/2}} \right) \end{cases}.$$

Quindi, mediante le Eq.i (38) e (39) e le varie sostituzioni eseguite, il comportamento temporale della *carica* e quello della *corrente* sono rappresentabili come

$$q(t) = \frac{V_{C,0} C}{2} e^{-\frac{R - (R^2 - 4L/C)^{1/2}}{2L}t} \left( 1 + e^{-\frac{(R^2 - 4L/C)^{1/2}}{L}t} + \frac{R \left( 1 - e^{-\frac{(R^2 - 4L/C)^{1/2}}{L}t} \right)}{(R^2 - 4L/C)^{1/2}} \right), \quad (41)$$

$$\dot{q}(t) \equiv i(t) = -(V_{C,0} / (R^2 - 4L/C)^{1/2}) e^{-\frac{R - (R^2 - 4L/C)^{1/2}}{2L}t} \left( 1 - e^{-\frac{(R^2 - 4L/C)^{1/2}}{L}t} \right). \quad (42)$$

Anche nell'Eq. (42), il segno negativo della corrente rende conto del processo spontaneo di *scarica* del condensatore, i.e., del collasso energetico del *sistema* accumulatore. Tale collasso, però, non è contrastato dalla presenza di termini lineari temporali (cf/c le Eq.i (36) e (37)) ma è *ovunque* esponenziale, caratterizzando, in tal modo, il cosiddetto regime di *sotto-smorzamento*. ■

## F. La legge del Decadimento Radioattivo naturale

Si osserva sperimentalmente che tutti i processi di decadimento radioattivo seguono una legge esponenziale. Se  $N_0 \equiv N(0)$  è il numero *iniziale* di nuclei *instabili* di un singolo *nuclide* (o *specie nucleare*) radioattivo, il numero di nuclei originari rimanenti dopo un tempo  $t$  è dato da

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

dove  $\lambda$  è una costante sperimentale (tabulata) *caratteristica* del nuclide, nota come la *costante di disintegrazione* o *di decadimento*.

Derivando vs. il tempo i termini nei membri dell'Eq. (1), si ottiene il *tasso di decadimento* dei nuclei

$$-\frac{dN(t)}{dt} \equiv -\dot{N}(t) = N_0(-\lambda e^{-\lambda t}) \equiv \lambda N(t), \quad (2)$$

che risulta proporzionale al loro numero *prima* del decadimento.

L'Eq. (2) può essere utilizzata per calcolare il numero di nuclei di un certo nuclide radioattivo presenti, e.g., in un reattore nucleare al tempo  $t$ . Assumendo che essi siano prodotti a un *tasso costante*,  $g$ , ma che decadano (e, quindi, *spariscano*) secondo l'Eq. (2), il loro *aumento netto* in funzione del tempo si scrive come

$$\frac{dN(t)}{dt} = g - \lambda N(t) \equiv -\lambda(N(t) - g/\lambda). \quad (3)$$

Separando le variabili nell'Eq. (3) e integrando a partire dal numero iniziale  $N_i$  dei nuclei radioattivi già presenti al tempo  $t \equiv 0$ , si ha

$$\int_{N_i}^{N(t)} \frac{dv}{v - g/\lambda} = -\lambda \int_0^t dt, \quad \text{i.e.,} \quad \ln\left(\frac{N(t) - g/\lambda}{N_i - g/\lambda}\right) = -\lambda t.$$

Quindi, il numero totale  $N(t)$  dei nuclei radioattivi, sia già presenti al tempo  $t \equiv 0$  che prodotti in quell'istante, e *persistenti* dopo un tempo  $t > 0$  è dato da

$$N(t) = \frac{g}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + N_i e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

È evidente che il numero *stabile* di nuclei radioattivi prodotti in queste condizioni è ottenuto dopo un tempo estremamente lungo ( $t \rightarrow +\infty$ ) ed è, comunque,  $N(+\infty) \sim g/\lambda$ ,  $\forall N_i$ , indipendente dall'essere  $N(t)$  crescente o decrescente.

Per ogni nuclide radioattivo, c'è un tempo *medio*  $t_{1/2}$ , noto come *tempo di dimezzamento* (*half-life*), al termine del quale, il numero dei nuclei radioattivi originari è *ridotto alla metà* del suo valore iniziale. In altri termini, dall'Eq. (1), si ha

$$\frac{N(t_{1/2})}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}. \quad (5)$$

Segue che

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}. \quad (6)$$

Inoltre, dopo un intervallo temporale di  $n$  tempi di dimezzamento ( $\Delta t \equiv n t_{1/2}$ ), l'Eq. (1) fornisce

la frazione di nuclei *originari rimanenti*,

$$\frac{N(nt_{1/2})}{N_0} \equiv e^{-\lambda(nt_{1/2})} = \frac{1}{2^n}. \quad (7)$$

È anche possibile determinare la *vita media (mean life)*, o *aspettazione media di vita*,  $\tau$ , dei nuclei di una stessa specie radioattiva. La vita media è data dalla somma dei tempi di esistenza di tutti i nuclei divisa per il loro numero iniziale  $N_0$ . Matematicamente, la si può ricavare come segue:

il numero di nuclei che decadono in un intervallo di tempo compreso tra  $t$  e  $t + dt$  è  $dN = \lambda N dt$  così che, dall'Eq. fondamentale (1), si scrive

$$dN = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt.$$

Poiché il decadimento radioattivo è un processo statistico, ogni singolo nucleo può avere una durata di vita da 0 a  $+\infty$  unità temporali. Allora, la vita media è data da

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} N_0 \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \quad (8)$$

il *reciproco* della costante di disintegrazione. Segue che il tempo di dimezzamento e la vita media sono *proporzionali*, avendosi, dalle Eq.i (8) e (6),

$$t_{1/2} = \tau \ln 2. \quad (9)$$

□

### F.1 Decadimento Radioattivo binario in cascata <sup>[9]</sup>, <sup>[10]</sup>, <sup>[11]</sup>

Nelle famiglie radioattive naturali, un nuclide-*genitore (parent)* decade in un nuclide-*figlia (daughter)* che, a sua volta, come nuovo *genitore*, decade in una *sua propria* figlia, e così via, fino alla generazione di una *figlia stabile*. Il processo può essere illustrato trattando il caso di un nuclide radioattivo, denotato dall'indice 1, che decade in un nuclide-figlia radioattivo, di indice 2; a sua volta, quest'ultimo, decade in un prodotto *stabile finale*, di indice 3. I numeri di nuclei delle tre specie e le costanti di disintegrazione delle prime due sono indicati da  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$ ,  $N_3(t)$  e da  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , rispettivamente ( $\lambda_3 \equiv 0$ ).

Il modello matematico del processo è costituito dal sistema di tre equazioni differenziali lineari del 1° ordine

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\lambda_1 N_1(t), \\ \dot{N}_2(t) = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = \lambda_2 N_2(t). \end{cases} \quad (10)$$

Queste equazioni descrivono gli eventi seguenti: i nuclei-*genitore* di tipo 1 decadono secondo la legge fondamentale (2); si formano nuclei-*figlia* di tipo 2, al tasso  $\lambda_1 N_1$  a causa del decadimento dei nuclei-*genitore* 1, e si disintegrano al tasso  $\lambda_2 N_2$ ; si formano nuclei-*figlia* di tipo 3, al tasso  $\lambda_2 N_2$  a causa del decadimento dei nuclei-*genitore* di tipo 2.

Al tempo  $t$  generico, il numero di nuclei di tipo 1 è dato da

$$N_1(t) = N_{1,0} e^{-\lambda_1 t}, \quad (11)$$

dove  $N_{1,0}$  indica in numero di tali nuclei al tempo  $t = 0$ .

Introducendo l'espressione di  $N_1(t)$  in quella di  $\dot{N}_2(t)$  nel sistema (10) e riordinando i termini, si scrive l'equazione differenziale lineare non-omogenea del 1° ordine

$$\dot{N}_2 + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{1,0} e^{-\lambda_1 t}, \quad (12)$$

la cui soluzione generale è

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (13)$$

nella quale, l'attribuzione *fisicamente significativa* del valore della costante arbitraria di integrazione  $C_2$ , i.e., corrispondente al *problema di Cauchy* appropriato, può essere eseguita come segue:

al tempo  $t = 0$ , il numero di nuclei di tipo 2 ha il valore costante  $N_2(0) \equiv N_{2,0}$ . Allora, dall'Eq.

(13), si determina immediatamente che  $C_2 = N_{2,0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0}$ . Se si introduce questo valore per

$C_2$  nell'Eq. (13), si ottiene la soluzione particolare *fisicamente significativa*,

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{2,0} e^{-\lambda_2 t}. \quad (14)$$

Ora, se si sostituisce l'espressione (14) di  $N_2(t)$  in quella di  $dN_3(t)/dt$  nel sistema (10) e si riordinano i termini, si determina l'equazione differenziale del 1° ordine a variabili separate

$$\dot{N}_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + \lambda_2 N_{2,0} e^{-\lambda_2 t}. \quad (15)$$

Integrando vs. il numero di nuclei di tipo 3 da  $N_{3,0}$  a  $N_3(t)$ , con il tempo che evolve da 0 a  $t$ , si trova l'integrale generale

$$N_3(t) = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} - N_{2,0} \right) e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} e^{-\lambda_1 t} + C_3. \quad (16)$$

Da esso, il *problema di Cauchy* corrispondente alla soluzione particolare *fisicamente significativa* si determina assegnando il valore iniziale  $N_3(0) \equiv N_{3,0}$ .

Allora, dall'Eq. (16), si calcola che  $C_3 = N_{3,0} + N_{2,0} + N_{1,0}$  e, con questa, la forma esplicita della soluzione *particolare* fisica cercata:

$$N_3(t) = N_{3,0} + N_{2,0} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + N_{1,0} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right). \quad (17)$$

□



**Bibliografia**

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [2], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: [https://www.cm-phymath.net/libr\\_page.html](https://www.cm-phymath.net/libr_page.html).

**Elettromagnetismo circuitale (livelli intermedio e introduttivo)**

- [1] REITZ, J. R. - MILFORD, F. J. - CHRISTY, R. W., *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4<sup>TH</sup> ED., ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (2008);
- [2] LORRAIN, P. - CORSON, D. R. - LORRAIN, F., *Electromagnetic Fields and Waves*, 3<sup>RD</sup> ED., W. H. FREEMAN & CO. (1988);
- [3] ALONSO, M. - FINN, E. J., *Fundamental University Physics*, VOL. **II**, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1967; REPR. 1974);
- [4] MARION, J. B. - HORNYAK, W. F., *PHYSICS for Science and Engineering*, PART **2**, CBS COLLEGE PUBL. (1982);
- [5] EDMINISTER, J. A., *Theory and Problems of ELECTRIC CIRCUITS*, 2<sup>ND</sup> ED., SCHAUM'S SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1983);
- [6] EISBERG, J. B. - LERNER, L. S., *PHYSICS - Foundations and Applications*, VOL. **2**, MCGRAW-HILL, INC. (1981);
- [7] GIANCOLI, D. C., *PHYSICS for Scientists and Engineers*, PRT.S **1, 2 & 3**, 4<sup>TH</sup> ED., PEARSON-PRENTICE-HALL (2009);
- [8] SERWAY, R. A. - JEWETT, J. W., JR., *PHYSICS for Scientists and Engineers, with Modern Physics*, 9<sup>TH</sup> ED., BROOKS-COLE PUBL. CO. (2014).

**Teoria del Decadimento Nucleare**

- [9] ALONSO, M. - FINN, E. J., *Fundamental University Physics*, VOL. **III**, § 8.2, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1968; 8<sup>TH</sup> REPR. 1974);
- [10] ENGE, H. A., *Introduction to Nuclear Physics*, CH. 8, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1966; REPR. 1972);
- [11] KAPLAN, I., *Nuclear Physics*, 2<sup>ND</sup> ED., CH. 10, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1962; 8<sup>TH</sup> REPR. 1977);
- [12] EVANS, R. D., *The Atomic Nucleus*, CH. 15, MCGRAW-HILL, INC. (1955);
- [13] THIBES, R. - DE OLIVEIRA, S. L., *General Solutions to Bateman Differential Equations with direct index notation*, INTERN. JOUR. OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, **93**, 6, 2014, 879-883 (PDF WEB VER.);
- [14] NUCLEAR WALLET CARDS  
versione PDF scaricabile da: <https://www.nndc.bnl.gov/wallet/wallet11.pdf>.

**Strumenti matematici**

- [15] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, **1**, p. 349-379; , p. 199, 289, 291, ZANICHELLI (-MASSON) (1990 & 1991; RIST. 2002 & 1998);
- [16] SALSA, S. - SQUELLATI, A., *Forme ed Equazioni Differenziali - Appunti ed Esercizi*, MASSON (1990);
- [17] MADERNA, C. - SOARDI, P. M., *Lezioni di Analisi Matematica II*, CAP. 2, CITTÀSTUDI (1997; RIST. 2000);
- [18] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2<sup>ND</sup> ED., CH.S 1, 2, PRENTICE-HALL, INC. (1976);
- [19] CHURCHILL, R. V., *Operational Mathematics*, 3<sup>RD</sup> ED., CH.S 1, 2, 3, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1972);
- [20] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7<sup>TH</sup> ED., CAP. 20, ACADEMIC PR. (2013);
- [21] SPIEGEL, M. R., *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1971);
- [22] SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of LAPLACE TRANSFORMS*, SCHAUM SERIES, MCGRAW-HILL (1965);
- [23] SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of FOURIER ANALYSIS with Applications to Boundary Value Problems*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1974);
- [24] DUCHATEAU, P. - ZACHMANN, D. W., *Theory and Problems of PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1986);
- [25] BONONCINI, V. E., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. **2**, 10<sup>A</sup> ED., C.E.D.A.M. (1974).

