

revisione
07 novembre 2022

Uno studio della
Funzione Polinomiale Cubica generale
a coefficienti in \mathbb{R}

claudio magno
www.cm-physmath.net





Gerolamo Cardano (1501-1576)

INTRODUZIONE

La funzione polinomiale cubica monica a coefficienti in \mathbb{R} , $y = P_{[3]}(x)$, e il suo grafico, nonostante la loro semplicità apparente, si prestano bene a una discussione articolata e integrata di svariate proprietà sia algebriche sia analitiche sia geometriche che ne fanno strumenti di indagine particolarmente istruttivi. Oltre ad essere lo strumento-chiave classico nella soluzione dell'equazione polinomiale monica quartica a coefficienti in \mathbb{R} , $P_{[4]}(x) = 0$, il grafico della funzione cubica esibisce la propria *simmetria centrale* generale vs. il suo *unico* punto di flesso, insieme con altre proprietà integrali di invarianza areale, valide per *qualsiasi* assegnazione dei coefficienti di $P_{[3]}$.

Dunque, la discussione procede per via *completamente parametrica*, lasciando a chi legge verifiche e/o valutazioni numeriche, grafiche e di programmazione.

Questo math-notebook vuole essere una 'estensione' naturale dell'altro mio math-notebook: '**Radici dei Polinomi in \mathbb{R} di 3° e di 4° grado di una variabile \ \ La Teoria di J. Sylvester del Discriminante**'. Pertanto, sia questo documento che l'estensione qui presentata potrebbero trovare un posto tra il materiale di riferimento nell'archivio delle esercitazioni di un primo corso di Calcolo o di Analisi Matematica I.

C M

La Funzione Polinomiale Cubica generale a coefficienti $\in \mathbb{R}$

Rappresentazione rettangolare:

$$x \mapsto P_{[3]}(x) := ax^3 + bx^2 + cx + h, \quad (1)$$

con $\{a, b, c, h\} \subset \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{R}^3$.

Dominio:

$\mathcal{D}_{P_{[3]}} \equiv \mathbb{R}$; alla frontiera $\partial \mathcal{D}_{P_{[3]}}$, si ha che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{[3]}(x) = a \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \text{sgn}(a)(\pm\infty)$.

Inoltre, $P_{[3]} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Poiché $P_{[3]}$ è una funzione *razionale intera*, $\text{graf}(P_{[3]})$ non ha asintoti di alcun genere. Inoltre, essendo $\{a, b, c, h\} \subset \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{R}^3$, $\text{graf}(P_{[3]})$ interseca l'asse Y nel punto $(0; h)$ e ha *uno o tre* punti di *contatto* con l'asse X . Per la ricerca di questi ultimi, si tenga presente che,

- se $h/a \in \mathcal{Q}$, $P_{[3]}(x)$ potrebbe possedere *almeno una* radice *razionale*, $\pm \rho/\sigma$. Se una tale radice esiste, allora ρ ($\in \mathbb{R}$) è un divisore di h mentre σ ($\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) è un divisore di a . La verifica è *sempre necessaria*. Se $P_{[3]}(x_0) = 0$, si ha $P_{[3]}(x) \equiv a(x - x_0)(x^2 + \lambda x + \omega)$, in cui, il fattore quadratico può essere calcolato sia con l'algoritmo *di Ruffini* sia con quello generale di *divisione polinomiale*, fornendo prontamente le altre due radici, *reali* o *complesse-coniugate*. Nei casi più elementari, $P_{[3]}(x)$ si riduce o a un binomio *cubico perfetto* o alla somma/differenza tra due monomi cubici;
- la ricerca delle radici *reali* della funzione cubica generale può essere eseguita combinando i metodi algebrico classico di *Tartaglia-Cardano-Euler* con quello goniometrico (v. P. 7).

Derivata 1^a: $P'_{[3]}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; (2)

Derivata 2^a: $P''_{[3]}(x) = 2(3ax + b)$, (3)

dalla quale, segue che $\text{graf}(P_{[3]})$ ha, $\forall \{a, b, c, h\} \subset \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{R}^3$, un *unico* punto di flesso,

$$F \equiv (-b/(3a); P_{[3]}(-b/(3a))) = \left(-\frac{b}{3a}; \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + h \right) = (\bar{x}; P_{[3]}(\bar{x})),$$

risultando $\left. \begin{array}{l} \text{concavo} \\ \text{convesso} \end{array} \right\}$ per $a > 0 \wedge x \begin{cases} > \bar{x} \\ < \bar{x} \end{cases}$ o, rispettivamente, per $a < 0 \wedge x \begin{cases} < \bar{x} \\ > \bar{x} \end{cases}$.

Inoltre, è immediato verificare che $\text{graf}(P_{[3]})$ rivela la propria *simmetria centrale* vs. il sistema di

riferimento traslato in F . Infatti, se si sostituiscono $\begin{cases} x = u + \bar{x} \\ y = v + \bar{y} \end{cases}$ nell'equazione $y = P_{[3]}(x)$, i.e.,

$$\begin{aligned} v + \bar{y} &= a(u + \bar{x})^3 + b(u + \bar{x})^2 + c(u + \bar{x}) + h \\ &= au^3 + \underbrace{(3a\bar{x} + b)}_{(1/2)P''_{[3]}(\bar{x}) = 0} u^2 + \underbrace{(3a\bar{x}^2 + 2b\bar{x} + c)}_{P'_{[3]}(\bar{x})} u + \underbrace{a\bar{x}^3 + b\bar{x}^2 + c\bar{x} + h}_{P_{[3]}(\bar{x}) = \bar{y}} \end{aligned}$$

e, si semplifica vs. le nuove variabili u e v e, infine, si ricorda che $\bar{x} = -b/(3a)$, si ottiene

$$v = au^3 + (c - b^2/(3a))u := \psi(u). \quad (4)$$

Dunque, poiché l'Eq. (4) rappresenta una funzione *dispari* e la traslazione è una trasformazione *isometrica*, il grafico della funzione cubica (ora, della variabile (*muta*) x)

$$\psi(x) := ax^3 + (c - b^2/(3a))x \equiv ax^3 + P'_{[3]}(\bar{x})x \equiv y \quad (5)$$

risulta *congruente* a quello di $P_{[3]}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + h$ e *simmetrico* vs. l'origine.

Le informazioni ottenibili da $P'_{[3]}(x)$ sono *cruciali* per lo studio di $P_{[3]}(x)$. Per questo, introdotto il simbolo abbreviato

$$\Delta_{P'_{[3]}} := b^2 - 3ac \quad (6)$$

per il discriminante (ridotto) del *polinomio derivata-1^a* $P'_{[3]}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, si distinguono i tre casi seguenti:

I. $\Delta_{P'_{[3]}} > 0$:

$P'_{[3]}(x)$ ha due radici *distinte* in \mathbb{R} : $\alpha, \beta = (-b \pm \sqrt{\Delta_{P'_{[3]}}})/(3a)$; per definitezza, si supponga che sia $\alpha < \beta$.

Poiché, com'è da attendersi, $(\alpha + \beta)/2 = \bar{x}$, l'*ascissa* del punto di flesso corrisponde al punto *medio* del segmento sull'asse X avente come estremi le immagini delle ascisse $x = \alpha, \beta$. Pertanto, α e β sono valori estremanti locali stazionari, uno dei due di *minimo* e l'altro di *massimo*, necessariamente.

Ora, siano μ e M , rispettivamente, i valori del *minimo* e del *massimo* locali di $P_{[3]}(x)$ (è irrilevante che sia $\mu \equiv P_{[3]}(\alpha) \wedge M \equiv P_{[3]}(\beta)$, piuttosto che viceversa). Le considerazioni di simmetria precedenti (v. Eq. (4)) indicano non solo che vale *sempre* la disuguaglianza

$$\mu < P_{[3]}(x) < M$$

ma che, dall'esplicitazione delle quantità seguenti:

$$1. \quad P_{[3]}(\bar{x}) \equiv \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + h,$$

$$2. \quad \alpha + \beta = -\frac{2b}{3a} \quad \wedge \quad \alpha\beta = \frac{c}{3a},$$

dalle quali, poi, si ricavano le espressioni associate

$$3. \quad \alpha^2 + \beta^2 \equiv (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{4b^2}{9a^2} - \frac{2c}{3a} \quad \text{e}$$

$$4. \quad \alpha^3 + \beta^3 \equiv (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{8b^3}{27a^3} + \frac{2bc}{3a^2},$$

risulta anche

$$\frac{1}{2}(P_{[3]}(\alpha) + P_{[3]}(\beta)) \equiv \frac{1}{2}(\mu + M) = \frac{1}{2}(a(\alpha^3 + \beta^3) + b(\alpha^2 + \beta^2) + c(\alpha + \beta) + 2h)$$

$$= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + h \equiv P_{[3]}(\bar{x}). \quad (7)$$

Com'era prevedibile, l'*ordinata* di F , analogamente a quanto si è visto per la sua ascissa, è l'immagine del punto *medio* del segmento sull'asse Y avente come estremi le immagini delle ordinate μ e M . Si conclude che i due estremi stazionari e il punto di flesso *sono sempre allineati*; in termini geometrici, il punto di flesso F è il punto di intersezione delle diagonali (*centro*) del rettangolo compatto $[\alpha; \beta] \times [\mu; M]$. Il coefficiente angolare della retta $r_{\mu M}$ di allineamento degli estremi coincide con il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{P_{[3]}(\alpha) - P_{[3]}(\beta)}{\alpha - \beta} &= \frac{a(\alpha^3 - \beta^3) + b(\alpha^2 - \beta^2) + c(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= a((a+b)^2 - \alpha\beta) + b(a+b) + c \\ &= a((-b/(3a))^2 - c/(3a)) + b(-b/(3a)) + c \\ &= (2/3)(c - b^2/(3a)) = (2/3)P'_{[3]}(\bar{x}), \end{aligned} \quad (8)$$

cf/c Eq. (5). Pertanto, la rappresentazione esplicita generale di $r_{\mu M}$ è connessa strettamente alla sua condizione di tangenza a $\text{graf}(P_{[3]})$ nel punto di flesso F ,

$$\frac{P_{[3]}(x) - P_{[3]}(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{2}{3}P'_{[3]}(\bar{x}). \quad (8.1)$$

Con sostituzioni evidenti, risulta

$$r_{\mu M} := y = (2/3)(c - b^2/(3a))x - bc/(9a) + h.$$

Come confronto, l'equazione della retta r_F , *tangente* a $\text{graf}(P_{[3]})$ in F , è data da

$$r_F: P'_{[3]}(\bar{x})(x - \bar{x}) + P_{[3]}(\bar{x}) = (c - b^2/(3a))x - b^3/(27a^2) + h.$$

Infine, procedendo come sopra, si trova che

$$\begin{aligned} P_{[3]}(\alpha)P_{[3]}(\beta) &\equiv \mu M = (P_{[3]}(\bar{x}))^2 + \frac{4}{27a}(P_{[3]}(\bar{x}))^3 \equiv \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + h\right)^2 + \frac{4}{27a}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)^3 \\ &= \frac{1}{27a^2}(27a^2h^2 - 18abch + 4ac^3 + 4b^3h - b^2c^2) := \frac{\Omega}{27a^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ora, nello studio della funzione cubica $y = P_{[3]}(x)$, il prodotto $P_{[3]}(\alpha)P_{[3]}(\beta)$, definibile in \mathbb{R} solo se $\Delta_{P'_{[3]}} \geq 0$, è proporzionale al parametro fondamentale Ω , il cosiddetto **discriminante dell'equazione cubica** $P_{[3]}(x) = 0$. Tale caratterizzazione di Ω è analoga a quella ben nota per l'equazione quadratica in \mathbb{R} . Specificamente,

I.1 se **$P_{[3]}(\alpha)P_{[3]}(\beta) > 0$** ,

segue che, $P_{[3]}(\alpha)$ e $P_{[3]}(\beta)$ sono di segno *concorde*. In tal caso, $P_{[3]}$ possiede *una sola* radice in \mathbb{R} , x_1 , i.e., $\text{graf}(P_{[3]})$ interseca l'asse X in *un solo* punto, tale che, tenendo conto dei valori-limite di $P_{[3]}$ alla frontiera $\partial\mathcal{D}_{P_{[3]}}$ del suo dominio, si ha, rispettivamente,

$$x_1 < \alpha < \beta \quad \text{per} \quad \begin{cases} \mu < 0, \\ M < 0, \\ a < 0, \end{cases} \quad \text{oppure per} \quad \begin{cases} \mu > 0, \\ M > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

$$\alpha < \beta < x_1 \quad \text{per} \quad \begin{cases} \mu < 0, \\ M < 0, \\ a > 0, \end{cases} \quad \text{oppure per} \quad \begin{cases} \mu > 0, \\ M > 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

come si deduce qualitativamente dal grafico nella Fig. 1, corrispondente ad $a > 0$,

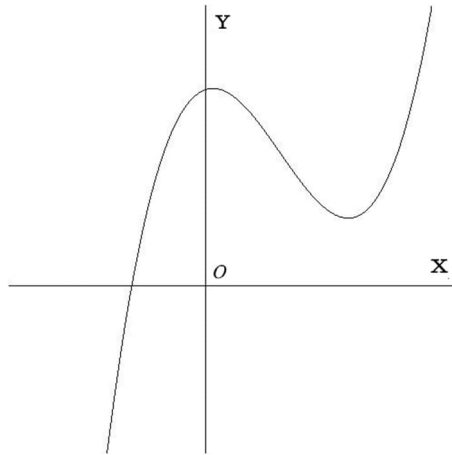


Fig. 1

I.2 se $P_{[3]}(\alpha)P_{[3]}(\beta) = 0$,

segue che, $\alpha \neq \beta$ implica che sia $P_{[3]}(\alpha) = 0 \vee P_{[3]}(\beta) = 0$, i.e., che $P_{[3]}(x)$ abbia *tre radici* in \mathbb{R} , due delle quali *coincidono* o con α o con β , dando luogo a un punto di *tangenza* di *graf*($P_{[3]}$) con l'asse X (v. Fig. 2-a, con $a < 0$, e Fig. 2-b, con $a > 0$). In tale circostanza, $P_{[3]}(x)$ assume l'una o l'altra delle rappresentazioni seguenti:

$$P_{[3]}(x) \equiv a(x - \alpha)^2(x - x_3) \quad \vee \quad P_{[3]}(x) \equiv a(x - x_1)^2(x - \beta).$$

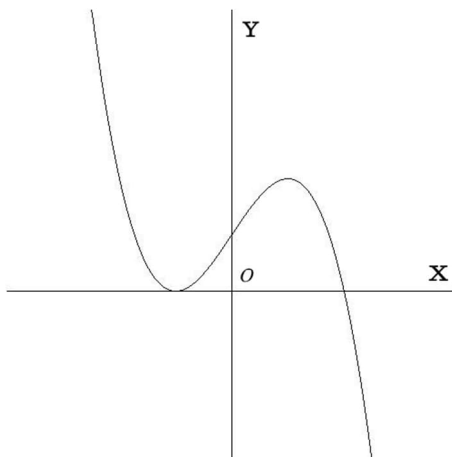


Fig. 2-a

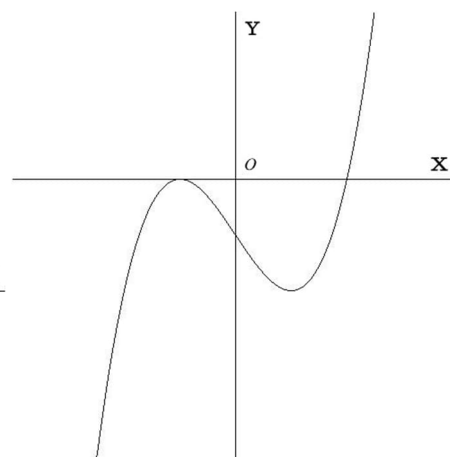


Fig. 2-b

I.3 se $P_{[3]}(\alpha)P_{[3]}(\beta) < 0$,

segue che $P_{[3]}(\alpha)$ e $P_{[3]}(\beta)$ sono di segno *discorde*, i.e., $M > 0$ e $\mu < 0$. In questa circostanza, $P_{[3]}(x)$ possiede *tre radici distinte* in \mathbb{R} , x_1, x_2, x_3 , ordinabili come $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$. Pertanto, *graf*($P_{[3]}$) interseca l'asse X in *tre* punti distinti.

Nel caso sia $a < 0$, la funzione cubica intera è rappresentabile qualitativamente mediante il grafico in Fig. 3:

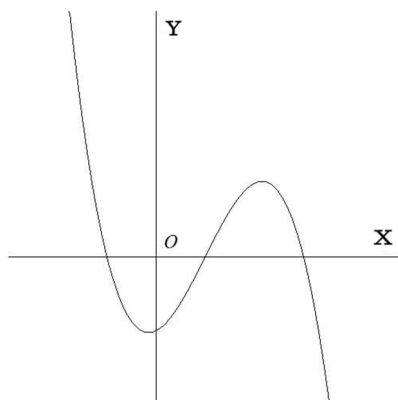


Fig. 3

I. $\Delta_{P'_{[3]}} = 0$:

$P'_{[3]}(x)$ possiede due radici *coincidenti* in \mathbb{R} , $\alpha \equiv \beta = \bar{x}$. Pertanto, si ha

$$\Delta_{P'_{[3]}}(x) = 3a(x - \bar{x})^2 \begin{cases} > 0, & \text{se } a > 0, \\ < 0, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

L'ascissa $x = \bar{x}$ è quella di un punto di flesso a tangente *orizzontale*. In $\mathcal{D}_{P_{[3]}}$, la funzione $P_{[3]}$ è monotona, decrescente se $a < 0$ e crescente se $a > 0$, e ha *una sola* radice, in \mathbb{R} , x_0 , *tripla* (Fig. 4-a) o *semplice* (Fig. 4-b), contro-immagine del suo *unico* punto di intersezione con l'asse X . Un controllo grafico qualitativo indica che

$$\begin{cases} x_0 \geq \bar{x}, & \text{sse } ah \leq 0, \\ x_0 \leq \bar{x}, & \text{sse } ah \geq 0. \end{cases}$$

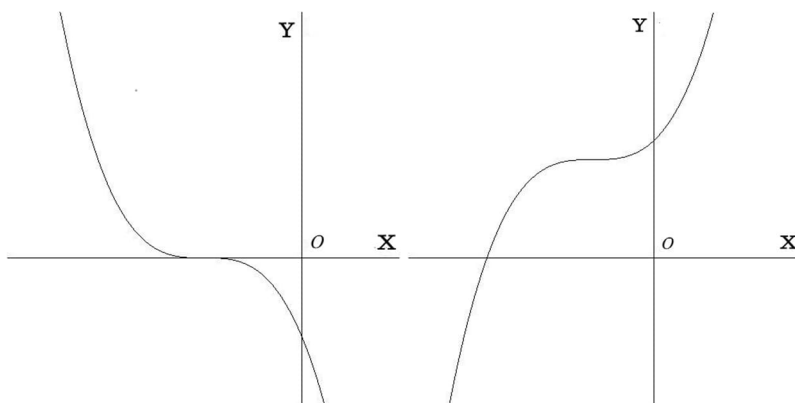


Fig. 4-a

Fig. 4-b

II. $\Delta_{P'_{[3]}} < 0$:

poiché $\Delta_{P'_{[3]}}(x)$ non ha radici in \mathbb{R} , $P_{[3]}(x)$ è *priva* di estremi locali stazionari. La funzione $P_{[3]}$ risulta monotona in $\mathcal{D}_{P_{[3]}}$, crescente per $a > 0$ e decrescente per $a < 0$. Essa possiede *una sola* radice in \mathbb{R} , x_0 , contro-immagine del suo *unico* punto di intersezione con l'asse X .

La forma fattorizzata massimale in \mathbb{R} di $P_{[3]}(x)$ si presenta nell'apparenza generale del tipo $a(x - x_0)(x^2 + \lambda x + \omega)$, con $\lambda^2 - 4\omega < 0$. Da un controllo grafico qualitativo (cf/c Fig. 5, corrispondente al caso $a > 0$), si conclude che

$$\begin{cases} x_0 \geq \bar{x}, & \text{sse } ah \leq 0, \\ x_0 \leq \bar{x}, & \text{sse } ah \geq 0. \end{cases}$$

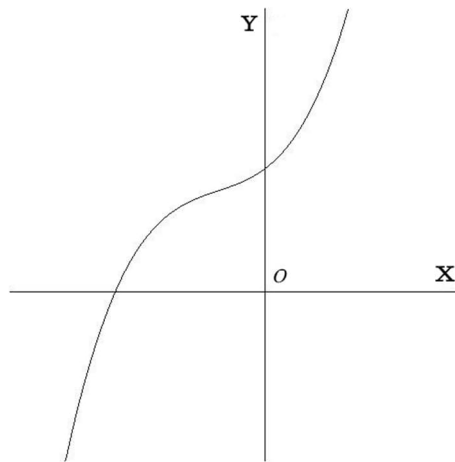


Fig. 5

■

Formule per il calcolo delle radici reali di un polinomio cubico a coefficienti reali (†)

Come è noto, la funzione polinomiale di 3° grado nella variabile $x \in \mathbb{C}$ e a coefficienti $\in \mathbb{R}$,

$$P_{[3]} := ax^3 + bx^2 + cx + h \quad (a \neq 0),$$

può avere *una* o *tre* radici in \mathbb{R} , dal *Teorema Fondamentale dell'Algebra*. La loro determinazione è un problema classico nella *Teoria delle Equazioni Algebriche*.

Sia \bar{x} l'ascissa dell'*unico* punto di flesso di f . Definita la coppia di parametri

$$\begin{cases} p := P'_{[3]}(\bar{x})/a = c/a - b^2/(3a^2) \\ q := P_{[3]}(\bar{x})/a = 2b^3/(27a^3) - bc/(3a^2) + h/a \end{cases},$$

si costruisce il *discriminante ridotto*, $\bar{\Omega}$ (cf/c l'Eq. (9)), dell'equazione $P_{[3]}(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &:= \Omega/(108a^4) \equiv p^3/27 + q^2/4 = (P'_{[3]}(\bar{x})/(3a))^3 + (P_{[3]}(\bar{x})/(2a))^2 \\ &\equiv \mu M/(4a^2) \quad (\text{quest'ultima uguaglianza vale solo se } \Delta_{P'_{[3]}} \equiv b^2 - 3ac \geq 0). \end{aligned}$$

Quindi, si distinguono i due casi:

- I. se $\bar{\Omega} > 0$, i.e., se $\bar{\Delta}_{f'} < 0 \vee \{\bar{\Delta}_{f'} < 0 \wedge \mu M > 0\}$, allora $\cancel{A} \{ \mu \wedge M \}$.

Segue che l'equazione $P_{[3]}(x) = 0$ ha una sola soluzione $\in \mathbb{R}$, data da

$$x = (\bar{\Omega}^{1/2} - q/2)^{1/3} - (\bar{\Omega}^{1/2} + q/2)^{1/3} - b/(3a); \quad (10)$$

- II. se $\bar{\Omega} \leq 0$, i.e., se $\{\bar{\Delta}_{f'} \geq 0 \wedge \mu M \leq 0\}$,

l'equazione $P_{(3)}(x) = 0$ ha tre soluzioni in \mathbb{R} .

Se $\bar{\Omega} < 0$, le soluzioni sono *distinte* e rappresentabili mediante la *terna* di numeri

$$\{x_k\} = 2 \left| \frac{p}{3} \right|^{1/2} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3^{3/2}(-q)}{2|p|^{3/2}} \right) + \frac{2}{3} k\pi \right) - \frac{b}{3a}, \quad (11.1)$$

assegnando i valori interi consecutivi $\{-1, 0, 1\}$ all'indice variabile k .

Se $\bar{\Omega} = 0$, *almeno due* di esse *coincidono* e *almeno una* delle tre – la si chiami \tilde{x} – ha la forma *reale generale*

$$\tilde{x} = -\frac{2^{2/3}}{3a} (27a^2h - 9abc + 2b^3)^{1/3} - \frac{b}{3a}. \quad (11.2)$$

Le altre due soluzioni sono le radici del polinomio-quotiente *quadratico*

$$Q_{(2)}(x) := \frac{P_{(3)}(x)}{x - \tilde{x}}. \quad (11.3)$$

Inoltre, esse sono *reali* sse $\Delta_{Q_{(2)}} \geq 0$.

■

(†) Si veda, e.g., il math-notebook: *Radici dei Polinomi in \mathbb{R} di 3° e di 4° grado di una variabile*.

Invarianze areali vs. la linea cubica generale [*]

La retta r_{QP} , tangente al grafico, $graf(P_{[3]})$, di una linea cubica generica γ in un punto qualsiasi $P \neq (x_0; y_0) \neq F$, i.e., *distinto* dal punto di flesso, interseca sempre $graf(P_{[3]})$ in un *solo* altro punto, Q . Analogamente, la retta r_{RQ} , tangente a $graf(P_{[3]})$ in Q , interseca sempre $graf(P_{[3]})$ in un *solo* altro punto, $R (\neq F)$.

Sia S il punto di intersezione tra r_{QP} e la retta r_{SR} , tangente a $graf(P_{[3]})$ nel punto R (v. Fig. 6).

Proposizione

Il triangolo SRQ resta diviso dal ramo di $graf_{RPQ}(P_{[3]}) \subset graf(P_{[3]})$ in tre regioni limitate le cui aree stanno tra loro in rapporti invarianti, i.e., indipendenti dall'equazione $y = P_{[3]}(x)$ di γ per qualsiasi scelta della terna di punti $\{P, Q, R\}$ (dunque, anche l'area di SRQ sta in rapporto invariante con l'area di ciascuna delle tre regioni).

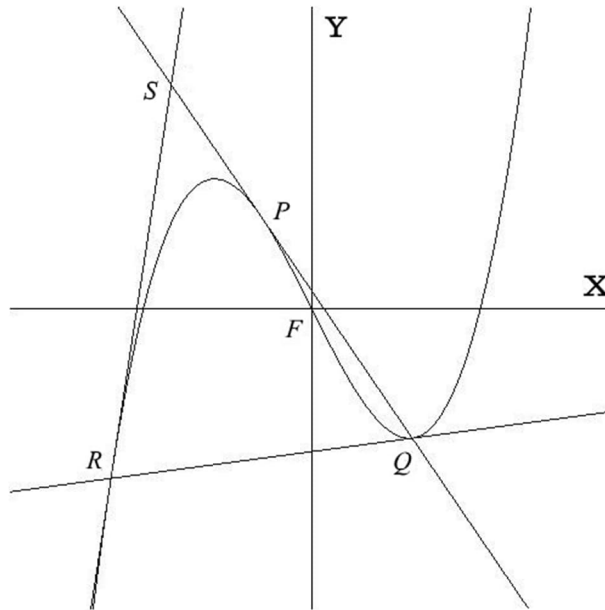


Fig. 6

Una verifica dell'asserto sfrutta la proprietà di simmetria centrale di $graf(P_{[3]})$ rispetto a F nella rappresentazione traslata dell'Eq. (5).

Definito il parametro abbreviato

$$\xi := c - b^2/(3a) \equiv P'_{[3]}(\bar{x}), \quad (12)$$

si riscrive l'Eq. (5) come

$$\gamma: \psi(x) = ax^3 + \xi x. \quad (13)$$

Dall'Eq. (13), si calcola l'equazione della retta tangente a $graf(\psi)$ nel punto P :

$$y - \psi(x_0) = \psi'(x_0)(x - x_0),$$

i.e., $y - (ax_0^3 + \xi x_0) = (3ax_0^2 + \xi)(x - x_0)$, ottenendo, in forma esplicita,

$$r_{QP}: y = (3ax_0^2 + \xi)x - 2ax_0^3. \quad (14)$$

Coordinate di Q :

$$\text{il sistema lineare } \begin{cases} y = ax^3 + \xi x \\ y = (3ax_0^2 + \xi)x - 2ax_0^3 \end{cases} \text{ fornisce l'equazione risolvente}$$

$$x^3 - 3x_0^2x + 2x_0^3 = 0. \quad (15)$$

La condizione di tangenza in P , per $x = x_0$, implica che il polinomio nell'Eq. (15) sia divisibile per $(x - x_0)^2$. Ciò è verificato mediante divisione polinomiale, consentendo di riscrivere l'Eq. (15) nella forma fattorizzata $(x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0$.

Così, è immediato concludere che

$$Q \equiv (x_1; \psi(x_1)) \equiv (-2x_0; -8ax_0^3 - 2\xi x_0).$$

Il procedimento precedente può essere ripetuto per il punto R . L'equazione della retta tangente a $\text{graf}(\psi)$ in Q è

$$y - \psi(x_1) = \psi'(x_1)(x - x_1),$$

i.e., in modo più esplicito,

$$y - (ax_1^3 + \xi x_1) = (3ax_1^2 + \xi)(x - x_1).$$

Da questa, con $x_1 = -2x_0$, si ottiene

$$r_{RQ}: y = (12ax_0^2 + \xi)x + 16ax_0^3. \quad (16)$$

Coordinate di R :

$$\text{il sistema lineare } \begin{cases} y = ax^3 + \xi x \\ y = (12ax_0^2 + \xi)x + 16ax_0^3 \end{cases} \text{ fornisce l'equazione risolvente}$$

$$x^3 - 12x_0^2x - 16x_0^3 = 0. \quad (17)$$

La condizione di tangenza in Q , i.e., per $x = -2x_0$, implica che il polinomio nell'Eq. (17) sia divisibile per $(x + 2x_0)^2$. Ciò può essere verificato mediante divisione polinomiale, riscrivendo l'Eq. (17) nella forma fattorizzata $(x + 2x_0)^2(x - 4x_0) = 0$.

Così, è immediato concludere che

$$R \equiv (x_2; \psi(x_2)) \equiv (4x_0; 64ax_0^3 + 4\xi x_0). \quad (17)$$

Segue che l'equazione della retta tangente a $\text{graf}(\psi)$ in R è data da

$$y - \psi(x_2) = \psi'(x_2)(x - x_2),$$

i.e., da

$$y - (ax_2^3 + \xi x_2) = (3ax_2^2 + \xi)(x - x_2),$$

da cui, con $x_2 = 4x_0$, si trova

$$r_{SR}: y = (48ax_0^2 + \xi)x - 128ax_0^3. \quad (18)$$

Quindi, le coordinate di $S \equiv r_{QP} \cap r_{SR}$ costituiscono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} y = (3ax_0^2 + \xi)x - 2ax_0^3, \\ y = (48ax_0^2 + \xi)x - 128ax_0^3, \end{cases} \quad \text{dal quale, risulta che}$$

$$S \equiv (x_3; y_3) \equiv (14x_0/5; (32ax_0^3 + 14\xi x_0)/5). \quad (19)$$

Ora, le aree richieste per il confronto sono:

$$A_{SRQ} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - \psi(x_1) \\ x_2 - x_1 & \psi(x_2) - \psi(x_1) \end{vmatrix} \right| = \dots = \frac{72}{5} x_0^2 \left| \begin{vmatrix} 1 & 3ax_0^2 + \xi \\ 1 & 12ax_0^2 + \xi \end{vmatrix} \right| = \frac{648}{5} |a| x_0^4, \quad (20.1)$$

$$\begin{aligned} A_{RQOPR} &= \left| \int_{4x_0}^{-2x_0} [(ax^3 + \xi x) - [(12ax_0^2 + \xi)x + 16ax_0^3]] dx \right| \\ &= \left| a \left(\frac{x^4}{4} - 6x_0^2 x^2 - 16x_0^3 x \right) \right|_{4x_0}^{-2x_0} = 108 |a| x_0^4, \end{aligned} \quad (20.2)$$

$$\begin{aligned} A_{POQP} &= \left| \int_{x_0}^{-2x_0} [(3ax_0^2 + \xi)x - 2ax_0^3 - (ax^3 + \xi x)] dx \right| \\ &= \left| a \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x_0^2 x^2 - 2x_0^3 x \right) \right|_{x_0}^{-2x_0} = \frac{27}{4} |a| x_0^4 \end{aligned} \quad (20.3)$$

e, infine,

$$A_{RPSR} = A_{SRQ} - A_{RQOPR} - A_{POQP} = \frac{297}{20} |a| x_0^4. \quad (20.4)$$

Pertanto, i rapporti tra le aree (20.1), ..., (20.4) verificano quantitativamente la **Proposizione a P. 9** $\forall \{a, x_0\} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{A_{SRQ}}{A_{RPSR}} &= \frac{96}{11}, & \frac{A_{SRQ}}{A_{RQOPR}} &= \frac{6}{5}, & \frac{A_{SRQ}}{A_{POQP}} &= \frac{96}{5}, \\ \frac{A_{RQOPR}}{A_{RPSR}} &= \frac{80}{11}, & \frac{A_{RQOPR}}{A_{POQP}} &= 16, & \frac{A_{RPSR}}{A_{POQP}} &= \frac{11}{5}. \end{aligned} \quad (20.5)$$

■

[*] Devo a un saggio del Prof. Enrico Pontorno, già Professore del Liceo Scientifico di Oderzo (TV), l'avermi fatto osservare, per la prima volta, la proprietà delle invarianze areali vs. una linea cubica qualsiasi in \mathbb{R}^2 .

Alcune conseguenze della simmetria centrale di $graf(\psi)$ vs. il suo punto di flesso

L'arbitrarietà di scelta della terna $\{P, Q, R\}$ di triangolazione e la generalità dell'Eq. (13) implicano l'esistenza di un'infinità di terne $\{P, Q, R\} \equiv \{(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2)\} \in graf(\psi)$ di coppie di coordinate di punti, generate *con continuità* mediante la triangolazione.

Pertanto, i rapporti invarianti espressi dalla **Proposizione** a P. 9 sono generabili da terne ordinate $\{(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2)\}$ *qualsiasi*.

Inoltre, tutte le terne generate iterando tali triangolazioni sono rappresentabili in termini dell'ascissa del punto di tangenza $P \equiv (x_0; y_0) \neq F$, *fissato come iniziale*.

Infatti, si verifica *induttivamente* per l'iterazione n -sima ($n \in \mathbb{Z}^+$) che

$$(x_n; y_n) \equiv (x_n; \psi(x_n)) \equiv ((-2)^n x_0; (-2)^n x_0 (2^{2n} a x_0^2 + \xi)). \quad (21.1)$$

La generalizzazione dell'Eq. (21.1) porta a scrivere, in modalità *numerabile* ($k \in \mathbb{Z}^+ \wedge k < n$),

$$(x_n; y_n) \equiv ((-2)^{n-k} x_k; (-2)^{n-k} x_k (2^{2(n-k)} a x_k^2 + \xi)). \quad (21.2)$$

Analogamente, si ricava l'equazione della retta tangente a $graf(\psi)$ nel punto $(x_n; y_n)$:

$$y = (3a \cdot 2^{2n} x_0^2 + \xi)x + (-1)^{n+1} 2^{3n+1} x_0^3, \quad (22.1)$$

e, quindi, dall'Eq. (21.2), si scrive

$$y = (3a \cdot 2^{2(n-k)} x_k^2 + \xi)x + (-1)^{n-k+1} 2^{3(n-k)+1} x_k^3. \quad (22.2)$$

Infine, tutte le relazioni precedenti, dall'Eq. (5) in avanti, si riconducono alla rappresentazione iniziale di $P_{[3]}(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + h$ mediante le sostituzioni traslazionali simultanee

$$\begin{cases} x \mapsto x - \bar{x} \\ \psi(x) \mapsto P_{[3]}(x) - P_{[3]}(\bar{x}) \end{cases} \quad (23)$$

■■■