revisione
07 aprile 2024

Note sull'operazione di

Convoluzione in $\mathbb{R}$,

con applicazioni a
modelli integrali di Correlazione

claudio magno
https://www.cm-physmath.net

CM_Portable MATH Notebook Series™

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

INDICE

Introduzione

Si può incominciare con il costruirsi un'idea primitiva, superficiale ed elementare quanto si vuole, di come, vista dall'esterno, si presenta una *struttura convolutiva*:

è assegnata la coppia $\{p, q\} \subset \mathbb{R}$ di quantità dipendenti, rispettivamente, dagli indici *variabili* ξ e κ. Questi, sono *semi-indipendenti* tra loro, nel senso che, e.g., p dipende da ξ mentre q dipende da $\upsilon := \xi - \kappa$, con κ formalmente *indipendente* da ξ. Inoltre, gli indici ξ e υ (quindi, anche κ) siano entrambi dello stesso tipo: o *discreti* o *continui*. Ora, considerato il prodotto pq, l'*operazione di Convoluzione* di q vs. p consiste nel far propagare pq *additivamente*, mediante una *somma* o un *integrale*, facendogli percorrere l'insieme di definizione – numerabile o continuo – di ξ e avendo fissato κ come parametro a variazione *superiormente* limitata da ξ (i.e., $\xi = \sup_{\{\upsilon\}} \kappa$).

Dal punto di vista geometrico, è immediato riconoscere (v. Fig. 1, p. 2) la Convoluzione come un'isometria di *riflessione assiale* nel piano $X \times Y$ vs. l'asse *variabile* $\xi \equiv x/2$ di simmetria. Così, l'operazione apre la strada ad applicazioni più o meno dirette del Principio Deterministico, dal quale, è noto, provengono innumerevoli modelli della Fisica e dell'Ingegneria, dalla Gravitazione Newtoniana alla Meccanica Statistica in regime stazionario, all'Ottica Fisica, alla Teoria dei Segnali e a quella dei Servo-meccanismi, alla Statistica, alla Teoria delle Distribuzioni e a quella delle Equazioni e delle Trasformate Integrali (v., e.g., [1], [5], [10], [12], [14]) nella **Bibliografia** finale).

C M

La Convoluzione Sommatoria

Quando due somme di potenze ordinate, ciascuna di tipo qualsiasi, polinomio o serie (questa, *anche di Laurent* con un numero *infinito* di addendi di indice *negativo*),

$$A(x) \equiv \sum_r a_r x^r \quad \text{e} \quad B(x) \equiv \sum_s b_s x^s ,$$

dove $\{r, s\} \subset \mathbb{Z}$, vengono moltiplicate tra loro secondo l'algoritmo $\mathfrak{P}$, i.e., il PRODOTTO À-LA CAUCHY, si ottiene ancora una somma (polinomio o serie) *formale* di potenze,

$$A(x) B(x) = \sum_n c_n x^n , \tag{1}$$

i cui coefficienti c_n, con $n \in \mathbb{Z}$, sono generati dai coefficienti a_r e b_s per mezzo della regola *commutativa* di *sovrapposizione* (*overlapping*) *progressiva* dell'indice k sull'indice n

$$c_n := \sum_k a_{n-k} b_k \equiv \sum_k a_k b_{n-k} . \tag{2}$$

Nelle forme equivalenti (2), $\forall\, n$ fissato, l'indice discreto k varia in modo che sia a_{n-k} (o a_k) sia b_k (o b_{n-k}) corrispondano a coefficienti effettivi dell'espansione di $A(x)$ e, rispettivamente, di $B(x)$. Altrimenti, si assume $c_n \equiv 0$.
Ad esempio, se

$$A(x) \equiv \sum_{r=0}^{+\infty} a_r x^r \quad \text{e} \quad B(x) \equiv \sum_{s=0}^{+\infty} b_s x^s ,$$

allora, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_0^+ \; (:= \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, si trova che (cf/c la *Formula di Newton*)

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} . \tag{2.1}$$

mentre, se

$$A(x) \equiv \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a_r x^r \quad \text{e} \quad B(x) \equiv \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s x^s ,$$

segue, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, che

$$c_n := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} b_k \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} . \tag{2.2}$$

Si dice che il coefficiente generale c_n risulta dalla *convoluzione sommatoria* di coefficienti a_r e b_s assegnati secondo l'una o l'altra delle somme (2.1) e (2.2). Globalmente inteso, l'insieme ordinato discreto, al più numerabile (successione) $\{c_n\}$ costituisce l'elemento della *Convoluzione Sommatoria* degli insiemi ordinati discreti, al più numerabili *entrambi* (successioni), $\{a_r\}$ e $\{b_s\}$, costruiti secondo le somme (2.1) o (2.2) sequenzialmente.

■

La Convoluzione Integrale

La generalizzazione al continuo dell'operazione di Convoluzione porta a rappresentazioni integrali parametriche su intervalli specifici, finiti o illimitati. La *Convoluzione Integrale* di due funzioni, ϕ e ψ, *generalmente continue* e a valori in $\mathbb{C}$, indicata con l'operatore *lineare* $(\phi * \psi)$, si esprime, rispetto a intervalli ammissibili di integrazione $\subseteq \mathbb{R}$, prescritti o convenzionalmente sottintesi, con gli argomenti dei fattori integrandi in forma *riflessa* (cf/c Eq. (2))

$$(\phi * \psi)(x) \equiv \phi(x) * \psi(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{0^+}^{x^-} \phi(u)\psi(x-u)\,du \quad \text{oppure} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{a^-} \phi(u)\psi(x-u)\,du, \quad \text{etc..} \end{cases} \tag{3}$$

La sua ricorrenza in modelli formali e in applicazioni, e.g., in Fisica Quantistica, in Ottica, in Elettronica, in Statistica, e i suoi legami strettissimi sia con la Teoria delle Equazioni Differenziali che, soprattutto, con quella delle Equazioni Integrali la collocano – a ragione – tra le operazioni peculiari e fondamentali dell'Analisi Matematica avanzata.

Un'interpretazione geometrica della *Convoluzione Integrale* è suggerita dall'argomento del fattore integrando ψ, nelle Eq.i (3): la *Convoluzione Integrale* delle funzioni ϕ e ψ nella funzione *trasformata* $(\phi * \psi)$ del *parametro* x corrisponde a una *riflessione assiale* di *graf* ψ vs. la retta *parametrica* (variabile) $x = t/2$ (in Tedesco: *die Faltung*, i.e., *avvolgimento*). La funzione ψ rappresenta il *nucleo* (*der Integralkern*) della sua *convoluzione* con ϕ; in altri termini, a ψ viene assegnato il ruolo di *funzione-peso* nell'operazione di convoluzione. Le proprietà analitiche di $\phi * \psi$ sono determinate dalla 'quantità' di *correlazione integrale*, i.e., di *sovrapposizione* (*overlapping*) tra le superfici normali vs. l'asse X di *graf* (ϕ) e di *graf* (ψ), espressa dall'argomento traslato $x - t$ di ψ vs. quello di ϕ.
Nella Fig. 1, è riportato l'esempio elementare relativo alla funzione $\phi:\ x \mapsto e^{-x} \equiv \phi(x)$ e al suo *nucleo convolutivo* associato, anch'esso scelto di tipo esponenziale, $\psi:\ x \mapsto e^{-(t-x)} \equiv \psi(t-x)$.

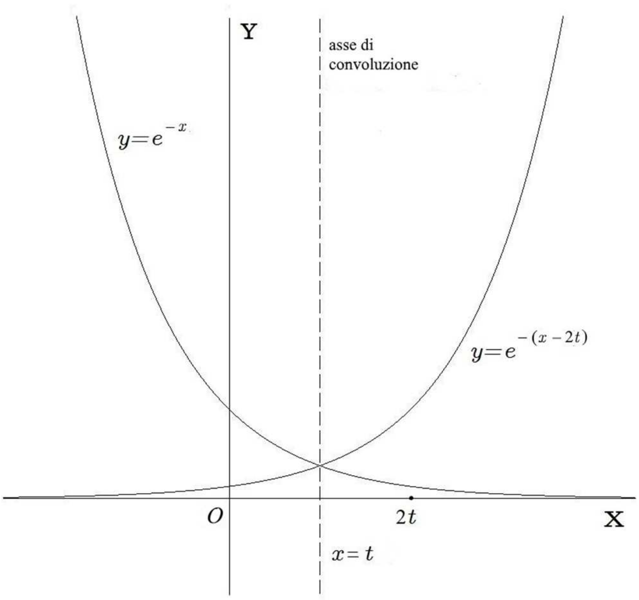

Fig. 1

In termini astratti, la *Convoluzione Integrale* di due funzioni generalmente continue è il *prodotto generalizzato* tra queste, intese come elementi dell'*Algebra di Schwartz* in $\mathbb{R}^n$ (o in $\mathbb{C}^n$).
Dal confronto con l'Eq. (2), può venire spontaneo chiedersi se anche la *Convoluzione Integrale* sia un'operazione almeno *commutativa*.

Esempio 1

Rispetto all'intervallo $[0, x]$, si ha

$$x * sin\,x := \int_0^x u\, sin(x-u)\,du = x - sin\,x$$

$$\equiv \int_0^x (x-u)\, sin\,u\,du := sin\,x * x\,. \tag{3.1}$$

Il risultato (3.1) è palesemente *commutativo*.

■

Esempio 2

Riducendo l'intervallo $[0, x] \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ all'intervallo $[0,1]$ mediante la trasformazione affine $u := xt$ (qui, x è considerato come un *parametro*) tra le variabili di integrazione u e t, si ha, in termini delle *Funzioni Eulero-Legendriane* Γ e B,

$$x^{-1/2} * x^{-1/2} := \int_{0^+}^{x^-} u^{-1/2}(x-u)^{-1/2}\,du = \int_0^1 t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\,dt$$

$$= B(1/2, 1/2) \equiv \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2+1/2)} = \pi\,. \tag{3.2}$$

L'Eq. (3.2), banalmente commutativa, mostra che la convoluzione integrale di due espressioni funzionali *variabili* può, in intervalli *specifici*, risultare *costante*.

■

Esempio 3

La convoluzione integrale in $\mathbb{R}$ di due *funzioni-gradino* di ampiezza *unitaria* e di larghezze rispettive $b-a$ $(a < b)$ e $\beta - \alpha$ $(\alpha < \beta)$ può essere rappresentata mediante la Θ-*Funzione di Heaviside* (tale calcolo trova applicazione in certi problemi 1dim di barriera di potenziale, tipici in Meccanica Quantistica):

$$(\Theta_{a,b} * \Theta_{\alpha,\beta})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Theta(u-a) - \Theta(u-b))(\Theta((x-u)-\alpha) - \Theta((x-u)-\beta))\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(u-a)\Theta(x-u-\alpha)du - \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(u-a)\Theta(x-u-\beta)du - \dashv$$

$$\mapsto - \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(u-b)\Theta(x-u-\alpha)\,du + \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(u-b)\Theta(x-u-\beta)\,du\,.$$

Il procedimento di integrazione è identico per ciascuno dei quattro addendi risultanti.
Così, riferendo il parametro x all'ascissa *relativa*, $x_{a,\alpha} := x - a - \alpha$, il cui valore assoluto è la misura della *larghezza* del primo gradino, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(u-a)\Theta(x-u-\alpha)du = (x-a-\alpha)(\Theta(x-a-\alpha+1/2) - \Theta(x-a-\alpha-1/2))$$

$$\equiv (x-a-\alpha)(\Theta(x_{a,\alpha}+1/2)-\Theta(x_{a,\alpha}-(1/2)))$$
$$\equiv (x-a-\alpha)R(x_{a,\alpha}).$$

$R(x_{a,\alpha})$ rappresenta la *funzione-gradino* di *ampiezza unitaria* (verticale) e di *larghezza unitaria* (orizzontale) in termini dell'ascissa *relativa* $x_{a,\alpha}$ (*rectangle function*).

Pertanto, risulta

$$(\Theta_{a,b} * \Theta_{\alpha,\beta})(x) = (x-a-\alpha)R(x_{a,\alpha})-(x-a-\beta)R(x_{a,\beta})- \hookleftarrow$$
$$\Lsh -(x-b-\alpha)R(x_{b,\alpha})+(x-b-\beta)R(x_{b,\beta}) \tag{3.3}$$
$$\equiv (\Theta_{\alpha,\beta} * \Theta_{a,b})(x).$$

■

Esempio 4 – **La convoluzione tra due curve gaussiane**

La convoluzione integrale di due distribuzioni statistiche *gaussiane*, g_1 e g_2, è essa stessa una distribuzione *gaussiana*. Infatti,

$$(g_1 * g_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_1} e^{-\frac{(u-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_2} e^{-\frac{((x-u)-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} du$$
$$\equiv \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-\mu_1)^2\sigma_2^2+(u-(x-\mu_2))^2\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} du \equiv \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(u)} du.$$

Qui, è conveniente semplificare l'espressione dell'esponente nella funzione integranda.
Espandendo i quadrati binomiali nel numeratore di $\lambda(u)$, si ha

$$\lambda(u) = \frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}((u^2+\mu_1^2-2\mu_1 u)\sigma_2^2+(u^2+(x-\mu_2)^2-2(x-\mu_2)u)\sigma_1^2)$$
$$= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u^2-2\frac{\mu_1\sigma_2^2+(x-\mu_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}u+\frac{\mu_1^2\sigma_2^2+(x-\mu_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) = \ldots$$

completando il quadrato binomiale in u e riducendo i termini residui

$$= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(u-\kappa_1)^2+\kappa_2^2,$$

dove, $\kappa_1 := \dfrac{\mu_1\sigma_2^2+(x-\mu_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, $\qquad \kappa_2 := \dfrac{x-\mu_1-\mu_2}{\pi^{1/2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$.

Se si pone $u := v+\kappa_1$, da cui viene che $du \equiv dv$, l'integrale di convoluzione si estende ancora a tutto $\mathbb{R}$. Quindi, considerato che la funzione integranda è *pari*, si arriva alla forma *commutativa*

$$(g_1 * g_2)(x) = \frac{1}{\cancel{2}\pi\sigma_1\sigma_2}\cancel{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}v^2-\kappa_2^2} dv = \frac{e^{-\kappa_2^2}}{\pi\sigma_1\sigma_2}\frac{\pi^{1/2}}{2}\left(\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{(2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2))^{1/2}} e^{-\left(\frac{x-(\mu_1+\mu_2)}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)^2} \tag{3.4}$$

$$\equiv (g_2 * g_1)(x)\,.$$

La commutatività convolutiva tra le distribuzioni gaussiane g_1 e g_2 segue, in modo evidente, dall'invarianza negli scambî parametrici simultanei, $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$ e $\mu_1 \rightleftarrows \mu_2$, nell'Eq. (3.4).

■

Esempio 5 – La Formula di Convoluzione Integrale di Dirichlet

Si consideri la funzione $f : u \mapsto f(u)$, di *una sola* variabile reale, dove è $f \in \mathcal{C}([a,t])$. Nella sua applicazione più semplice, quella in $\mathbb{R}^2$, la *formula di convoluzione di Dirichlet di* f consiste nella riduzione della funzione integrale in *forma doppia*

$$x \mapsto \vartheta_2(x) := \int_a^x \left(\int_a^t f(u)\,du \right) dt \tag{4}$$

a una funzione integrale in *forma semplice* mediante uno scambio (ammissibile) dell'ordine delle integrazioni. Si osservi che il dominio triangolare-retto $\mathfrak{D}$ di integrazione (Fig. 2) è isoscele, con l'ipotenusa sulla bisettrice $t = u$. Così, la forma (1) di $\Theta_2(x)$ assume la *forma semplice* finale

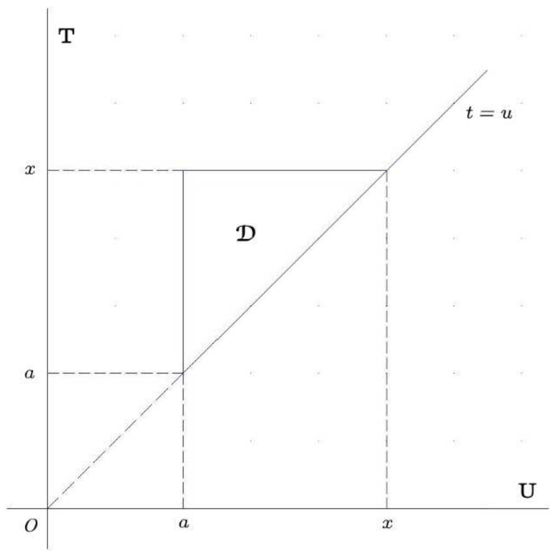

Fig. 2

$$\Theta_2(x) \equiv \int_a^x \left(\int_a^x f(u)\,dt \right) du = \int_a^x \left(\int_a^x dt \right) f(u)\,du = \int_a^x (x-u)\,f(u)\,du\,. \tag{4.1}$$

Ancóra, se si *nidifica* il procedimento precedente vs. la funzione in forma di integrale *triplo*

$$x \mapsto \Theta_3(x) := \int_a^x \Theta_2(t)\,dt\,, \tag{5}$$

Questa, in virtù dell'Eq. (4.1), si riduce a un integrale doppio della forma (4). Pertanto, ancora dal confronto con il diagramma di $\partial\mathfrak{D}$, risulta

$$\Theta_3(x) = \int_a^x \left(\int_a^x (t-u)\,f(u)\,du \right) dt = \int_a^x \left(\int_a^x (t-u)\,dt \right) f(u)\,du = \frac{1}{2}\int_a^x (x-u)^2 f(u)\,du\,.$$

↳ (5.1)

In tal modo, per induzione, si arriva, cumulativamente, all'espressione generale di Dirichlet della *forma* differenziale n*-pla* $f(x) \equiv d^{(n)}\overline{y}/dx^n$:

$$x \mapsto \Theta_n(x) := \int_a^x \Theta_{n-1}(t)\,dt \equiv \underbrace{\int_a^x \int_a^x \ldots \int_a^x}_{n-1 \text{ integrazioni}} \left(\int_a^x \Theta_{n-1}(t)\,dt\, f(u)\,du \right) (dt)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u)\,du\,. \tag{6}$$

Invertendo il procedimento, la derivazione di $\overline{y}(x) := \Theta_n(x)$ – che si esegue, inevitabilmente, *sotto il segno di integrale* (*Formula di Leibniz*) – dà il risultato, di forma chiaramente *iterativa*,

$$\frac{d}{dx}\overline{y}(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u) \right) du + \underbrace{\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\Bigg|_{u=x}}_{\equiv 0} \frac{dx}{dx} - \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\Bigg|_{u=a} \underbrace{\frac{da}{dx}}_{\equiv 0}$$

$$= \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-u)^{n-2} f(u)\,du\,.$$

Ora, derivando $d\overline{y}/dx$ successivamente $n-1$ volte, si determina $d^n\overline{y}/dx^n = f(x)$ e, da questa, si induce l'equazione differenziale lineare di ordine n non-omogenea

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x), \tag{7}$$

della quale, l'Eq. (6) rappresenta un *integrale particolare* evidente.
L'equazione *caratteristica* dell'equazione differenziale omogenea *associata* all'Eq. (7) è $\lambda^n = 0$; le sue n radici *identiche*, $\overline{\lambda} = 0$, forniscono immediatamente una base di integrali *linearmente indipendenti* dell'equazione differenziale lineare *omogenea associata* dell'Eq. (7), necessari per costruirne l'integrale generale,

$$\{e^{0x}, xe^{0x}, x^2e^{0x}, x^3e^{0x}, \ldots, x^{n-1}e^{0x}\} \equiv \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}\}.$$

Quindi, l'*integrale generale* dell'Eq. (7), *non-omogenea*, è rappresentabile nella forma *convolutiva*

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_nx^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-u)^{n-1} f(u)\,du \tag{8}$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} + \frac{1}{\Gamma(n)}(f * x^{n-1}), \tag{8.1}$$

dove, $\phi \mapsto f$ mentre $\psi \mapsto x^{n-1}$ è la *funzione-potenza* della variabile indipendente x.
La potenza binomiale $(x-u)^{n-1} \equiv \psi(x-u)$ presente nell'integranda dell'Eq. (8) costituisce il nucleo (*der Integralkern*) convolutivo di x^{n-1} vs. f nell'intervallo (a, x) di integrazione.

■

La caratterizzazione geometrico-analitica della Convoluzione come *affinità* piana è presentata nel math-notebook: Sezioni Coniche in $\mathbb{R}^2$ - Elementi e metodi operativi, APPENDICE, P. 44.

Proprietà della Convoluzione Integrale

A. Proprietà algebriche

Siano f, g e h funzioni *generalmente continue* e $\alpha \in \mathbb{C}$ una quantità invariante scalare.
La *Convoluzione Integrale* soddisfa le proprietà algebriche seguenti, di verifica elementare:

commutativa: $$(f * g)(x) = (g * f)(x); \tag{9.1}$$

associativa: $$(f * (g * h))(x) = ((f * g) * h)(x); \tag{9.2}$$

distributiva vs. la somma: $$(f * (g + h))(x) = ((f * g) + (f * h))(x); \tag{9.3}$$

distributiva vs. il prodotto per α: $$\alpha (f * g)(x) = ((\alpha f) * g)(x) = (f * (\alpha g))(x). \tag{9.4}$$

B. Proprietà analitiche

Il calcolo della *derivata 1^a* di una convoluzione integrale – che si esegue, esplicitamente, sotto il segno di integrale – fornisce le identità simmetriche

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \left(\frac{df}{dx} * g\right)(x) \equiv \left(\frac{dg}{dx} * f\right)(x). \tag{10}$$

L'area Ω della superficie compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di una convoluzione *estesa a tutto* $\mathbb{R}$ è uguale al prodotto delle aree integrali relative ai singoli fattori:

$$\begin{aligned}\Omega := \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)\, dx &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)\, dx \right) du \qquad \text{e, sostituendo } x \mapsto x+u \text{ nell'integrale interno,} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, du .\end{aligned} \tag{11}$$

Dalla definizione consueta di *valore di aspettazione* di x^α (in $\mathbb{R}$), *normalizzato vs. la funzione-peso* $x \mapsto w(x)$,

$$\langle x^\alpha \rangle := \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha w(x)\, dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\, dx}, \tag{12}$$

si deducono i valori di aspettazione, rispettivamente della funzione *centroide orizzontale* e della *varianza* associata, normalizzate vs. la convoluzione $w \equiv f * g \mapsto (f * g)(x)$,

$$\langle x (f * g)(x) \rangle = \langle x\, f(x) \rangle + \langle x\, g(x) \rangle, \tag{13.1}$$

$$\langle x^2 (f * g)(x) \rangle = \langle x^2 f(x) \rangle + \langle x^2 g(x) \rangle + 2 \langle x\, f(x) \rangle \langle x\, g(x) \rangle. \tag{13.2}$$

Come verifica esemplificativa, si calcola, appoggiandosi alle Eq.i (11) e (12),

$$\langle x^2 (f * g)(x) \rangle \equiv \left\langle x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du \right\rangle = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du \right) dx}{\Omega}$$

$$= \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x-u) dx \right) du . \tag{13.2.1}$$

Con la sostituzione $x \mapsto x+u$ nell'integrale interno (13.2.1), si scrive

$$\langle x^2 (f*g)(x) \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x+u)^2 g(x) dx \right) du$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx + \\ + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx \end{array} \right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx} .$$

Tenendo presente che le variabili di integrazione sono 'mute', quindi, *rinominabili formalmente* in modo *arbitrario*, si conclude che

$$\langle x^2 (f*g)(x) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx} + 2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx}$$

$$\equiv \langle x^2 f(x) \rangle + \langle x^2 g(x) \rangle + 2 \langle x f(x) \rangle \langle x g(x) \rangle \equiv \text{Eq. (13.2).}$$

■

La Trasformata Integrale di una Convoluzione Integrale

Sia $\mathcal{T}$ un operatore *trasformata-integrale* qualsiasi (e.g., *di Laplace* o *di Stieltjes* o *di Fourier* o *di Hankel* (i.e., *di Fourier-Bessel*) o *di Mellin*, etc.) e si supponga valida, sotto condizioni analitiche specifiche, l'uguaglianza di trasformazione, di *nucleo integrale* κ,

$$f(\alpha) = \mathcal{T}\{\phi(x)\} := \int_{\mathfrak{D}} \phi(x)\kappa(x,\alpha)\,dx\,. \tag{14}$$

Nell'Eq. (14), $f(\alpha)$ rappresenta il valore puntuale, corrispondente a quello del parametro α, della *funzione generatrice* f mentre $\phi(x)$, interno all'integrale della trasformazione caratterizzata dal *nucleo* $\kappa(x,\alpha)$, è il valore puntuale della *funzione determinatrice* ϕ, duale a f attraverso $\mathcal{T}$. Tale dualità tra f e ϕ esprime la loro *biunivocità* generale e, quindi, la *linearità* e l'*invertibilità* generali di $\mathcal{T}$ in una regione cartesiana $\mathcal{R}_{x,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^2$ ammissibile prestabilita.

Seguendo un approccio assiomatico sintetico, il passo successivo – importante – è costituito dalla *richiesta* che

> *la funzione prodotto di due funzioni $\mathcal{T}$-generatrici non solo sia essa stessa $\mathcal{T}$-generatrice ma coincida, anche, con la $\mathcal{T}$-trasformata della convoluzione delle funzioni determinatrici duali corrispondenti, per lo stesso valore del parametro α, i.e.,*

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) f_2(\alpha) &\equiv \mathcal{T}\{\phi_1(x)\}\mathcal{T}\{\phi_2(x)\} \\ &= N\,\mathcal{T}\{(\phi_1 * \phi_2)(x)\} = N\int_{\mathfrak{D}}\left(\int_{x_0^+}^{x^-}\phi_1(t)\phi_2(x-t)\,dt\right)\kappa(x,\alpha)\,dx\,, \end{aligned} \tag{15}$$

essendo $N \in \mathbb{R}^+$ una costante opportuna di *normalizzazione* o di *simmetrizzazione*.
La condizione espressa dall'Eq. (15) seleziona le convoluzioni $\phi_1 * \phi_2$ ammissibili analiticamente per una trasformata integrale data. Nella tabella riportata qui sotto, sono elencate e descritte alcune tra le trasformate integrali più frequenti di funzioni determinatrici ϕ ammissibili.

	$\kappa(x,\alpha)$	$\mathfrak{D}$
Trasformata *di Laplace*, $\mathfrak{L}$, uni\bi-laterale	$e^{-\alpha x}$	$[0,+\infty)\backslash(-\infty,+\infty)$
Trasformata *di Stieltjes*, $\mathfrak{S}$	$(x+\alpha)^{-1}$	$[0,+\infty)$
Trasformata *di Fourier*, $\mathfrak{F}$	$e^{i\alpha x}/(2\pi)^{1/2}$	$(-\infty,+\infty)$
Trasformata *di Hankel*, $\mathfrak{H}$	$x\,J_\nu(\alpha x)$	$[0,+\infty)$
Trasformata *di Mellin*, $\mathfrak{M}$	$x^{\alpha-1}$	$[0,+\infty)$

Spesso, la forma generale (15) si incontra riformulata come *Teorema di Convoluzione* specifico, per una data trasformata integrale. In realtà, l'Eq. (15) rappresenta una proprietà *sintetica* nella Teoria della *Trasformata di Convoluzione* (v. [[1]]). Nelle **Proposizioni** che seguono, ne sono presentate formulazioni specifiche particolarmente frequenti, con dimostrazioni esplicite.

Proposizione 1

Siano ϕ_1, ϕ_2 e $\phi_1 * \phi_2$ funzioni $\mathfrak{L}$-trasformabili vs. lo stesso intervallo $[\alpha_0, +\infty)$ di valori del parametro α.
Allora, dette f_1 e f_2 le funzioni generatrici duali rispettive di ϕ_1 e di ϕ_2, si ha, $\forall\, \alpha \in [\alpha_0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) f_2(\alpha) &= \mathfrak{L}\{(\phi_1 * \phi_2)(x)\} \\ &\equiv \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \left(\int_{0^+}^{x^-} \phi_1(t)\phi_2(x-t)\,dt \right) dx\,, \end{aligned} \tag{16}$$

per la quale, è $N \equiv 1$.

Dimostrazione

Conviene avviare il calcolo del prodotto $f_1(\alpha) f_2(\alpha)$ come limite dell'integrale doppio, *separato* nel prodotto di integrali definiti semplici e *funzione dei loro estremi superiori di integrazione*,

$$f_1(\alpha) f_2(\alpha) = \lim_{x \to +\infty} \left(\int_{0^+}^{x^-} e^{-\alpha u} \phi_1(u)\,du \right) \left(\int_{0^+}^{x^-} e^{-\alpha t} \phi_2(t)\,dt \right) \tag{16.1}$$

e, quindi, sfruttando il fatto che ϕ_1 e ϕ_2 si suppone siano di *ordine esponenziale*, ridurre tale limite alla forma integrale doppia separata equivalente

$$f_1(\alpha) f_2(\alpha) = \lim_{x \to +\infty} \left(\int_{0^+}^{x^-} e^{-\alpha u} \phi_1(u)\,du \int_0^{x-u} e^{-\alpha t} \phi_2(t)\,dt \right). \tag{16.2}$$

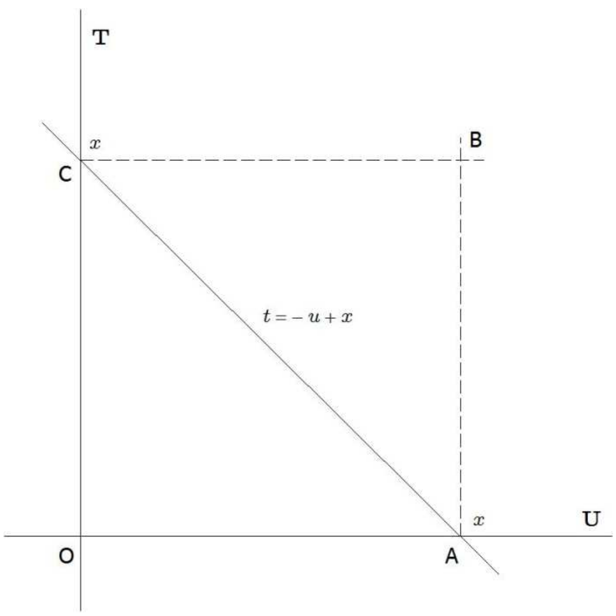

Fig. 3

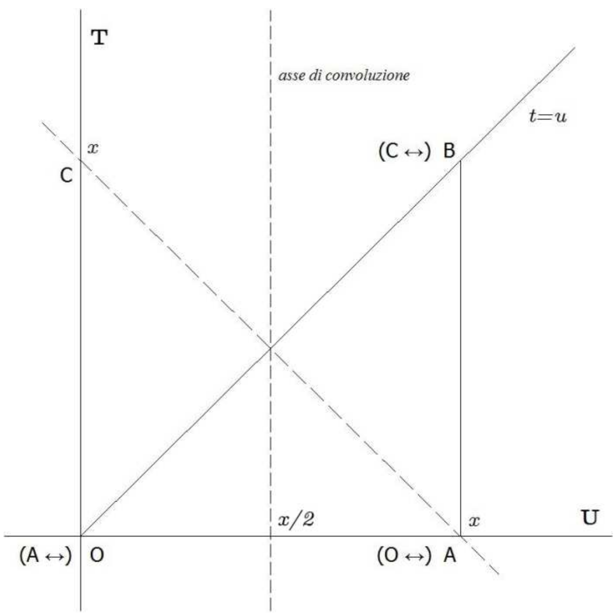

Fig. 4

Infatti, benché il dominio della funzione integrale nel limite (16.1) sia il quadrato *parametrico* $OABC$ (Fig. 3), estendibile a tutto $(\mathbb{R}^+)^2$ almeno, mentre quello dell'integrale nel limite (16.2) corrisponde al solo triangolo rettangolo isoscele *parametrico* OAC, d'altra parte, il contributo fornito dalla regione CAB è infinitesimo per $x \to +\infty$, poiché si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{x-u}^{+\infty} e^{-\alpha t} \phi_2(t)\, dt = 0 .$$

L'effetto del passaggio al limite vs. x sul t-integrale nell'Eq. (16.2) indica che il comportamento della variabile t di integrazione consegue dall'aumento *continuo e indipendente* del valore del parametro x secondo il vincolo $t = -u + x$.

Ora, si trasformi la regione OAC mantenendone invariata la definizione dell'*ordinata* t ma cambiandone quella dell'ascissa mediante la *riflessione assiale* $u \mapsto 2(x/2) - u \equiv x - u$, per la quale, l'asse di riflessione è la retta di equazione $u = x/2$ (v. Fig. 4).

Nella propagazione del nuovo dominio OAC di integrazione a tutto $(\mathbb{R}^+)^2$, le variabili *vecchie* di integrazione t e u conservano la relazione *bi-lineare* $t + u = x$ con il parametro x, essendo la riflessione assiale un'*isometria*. In tal senso, se la retta di equazione $t = -u + x$ costituisce il *vecchio* 'fronte di propagazione' di OAC, la riflessione, determinando le dislocazioni puntuali $C \mapsto B$, $A \mapsto O$ e $O \mapsto A$, fa sì che il segmento BA, sulla retta di equazione $u = x$, diventi il 'fronte di propagazione' del *nuovo* dominio di integrazione. Pertanto, se si esplicita u come funzione della coppia *nuova* $\{t, x\}$ di variabili, si ottengono le equazioni di trasformazione

$$\begin{cases} t \equiv t \equiv t(t, x) \\ u \equiv x - t \equiv u(t, x) \end{cases} . \tag{17}$$

Le Eq.i (17) corrispondono al determinante jacobiano

$$J(t, x) \equiv \frac{\partial(t, u)}{\partial(t, x)} = \begin{vmatrix} \partial t/\partial t & \partial t/\partial x \\ \partial u/\partial t & \partial u/\partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ (> 0),$$

dal quale, poiché si ha $dt\,du \equiv |J(t, x)|\, dt dx = dt\, dx$, l'Eq. (16.2) si riscrive,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) f_2(\alpha) &\equiv \lim_{x \to +\infty} \left(\int_{0^+}^{x^-} e^{-\alpha(u+t)} \int_{t=0^+}^{x-u} \phi_1(u) \phi_2(t)\, du \right) dt \\ &\equiv \lim_{t, x \to +\infty} \left(\int_{0^+}^{x} e^{-\alpha x} \left(\int_{0^+}^{t} \phi_1(x - t) \phi_2(t)\, dx \right) \right) dt, \qquad \text{essendo } dx \equiv d(x - t), \\ &\equiv \lim_{t, x \to +\infty} \left(\int_{0^+}^{t} e^{-\alpha x} \int_{0^+}^{t} \phi_1(x - t) \phi_2(t)\, dt \right) dx \qquad (18) \\ &\equiv \mathfrak{L}\{(\phi_2 * \phi_1)(x)\} . \qquad (18.1) \end{aligned}$$

Infine, nell'Eq. (18), con la trasformazione $t \mapsto x - t := v$, l'operatore integrale semplice interno diventa $\int_0^x (dt) \mapsto \int_x^0 (-dv)$. Quindi, si trova prontamente che

$$f_1(\alpha) f_2(\alpha) \equiv \mathfrak{L}\{(\phi_1 * \phi_2)(x)\}, \tag{18.2}$$

com'è da attendersi dalla proprietà *commutativa* della *Convoluzione Integrale*.

■

Proposizione 2

Siano ϕ_1, ϕ_2 e $\phi_1 * \phi_2$ funzioni $\mathcal{J}$-trasformabili vs. lo *stesso* valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Allora, indicate con f_1 e f_2 le funzioni generatrici duali rispettive di ϕ_1 e di ϕ_2, risulta, $\forall\,\alpha$ ammissibile

$$f_1(\alpha)\,f_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{F}\{(\phi_1 * \phi_2)(x)\}$$
$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{0^+}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(t)\,\phi_2(x-t)\,dt\right)dx\,. \tag{19}$$

Dimostrazione

Si procede come per la $\mathcal{L}$-trasformata, avendo osservato che sia la $\mathcal{L}$- che la $\mathcal{F}$-trasformata sono, formalmente (i.e., estendendone le definizioni ad $\alpha \in \mathbb{C}$), riconducibili l'una all'altra in modo diretto. Così, si ha

$$f_1(\alpha)\,f_2(\alpha) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(t)\,e^{i\alpha t}\,dt\right)\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_2(u)\,e^{i\alpha u}\,du\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(t)\,\phi_2(u)\,e^{i\alpha(t+u)}\,dt\,du\,.$$

La trasformazione di coordinate di integrazione $(t\,;u) \mapsto (t\,;x) \equiv (t\,;t+u)$, coincidente con la coppia di Eq.i affini (17), corrisponde, quindi, al (valore assoluto del) determinante jacobiano

$$|J(t,x)| \equiv \left|\frac{\partial(t,u)}{\partial(t,x)}\right| = 1\,.$$

Pertanto, risultando $dt\,du \equiv dt\,dx$, segue che $\phi_1(t)\,\phi_2(x-t)\,e^{i\alpha x}\,dt\,dx$

$$f_1(\alpha)\,f_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(t)\,\phi_2(x-t)\,e^{i\alpha x}\,dt\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(t)\,\phi_2(x-t)\,dt\right)dx \tag{20}$$
$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\,(\phi_1 * \phi_2)(x)\,dx\right)$$
$$\equiv \frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{F}\{(\phi_1 * \phi_2)(x)\}\,. \tag{20.1}$$

Qui, è $N \equiv 1/(2\pi)^{1/2}$. Inoltre, come per l'Eq. (18.2), la trasformazione di variabile $t \mapsto x - t := v$ porta all'*equivalenza simmetrica*

$$f_1(\alpha)\,f_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{F}\{(\phi_2 * \phi_1)(x)\}\,. \tag{20.2}$$

■

Cenni ai modelli integrali di CORRELAZIONE

C. **La Correlazione Mutua**

La *Correlazione Mutua* (*Cross Correlation*) tra i valori *complessi ordinati*, $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, di una coppia di funzioni di una variabile (reale) x, *distinte* e generalmente continue, $\{\phi_1, \phi_2\}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, è definita dalla rappresentazione operatoriale (*sesqui-lineare*) convolutiva (in $\mathbb{R}$)

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv \phi_1(x) \star \phi_2(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(-u)^* \phi_2(x-u)\, du\,, \tag{21}$$

indicando con $\phi_1(-x)^*$, al solito, il *coniugato* del valore complesso $\phi_1(-x)$.
Che la rappresentazione integrale (21) sia formalmente convolutiva lo si conclude prontamente dal confronto con la definizione generale (3), mediante le identificazioni $\phi(u) \equiv \phi_1(-u)^*$ e $\psi \equiv \phi_2$.
Mediante il cambiamento di variabile (muta) di integrazione $v := -u$ nell'integrale (21), seguito dalla ridefinizione ulteriore $v := u$, si ottiene la rappresentazione alternativa (*simmetria* vs. x)

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(u)^* \phi_2(x+u)\, du\,. \tag{21.1}$$

Inoltre, pure interessante risulta il cambiamento di variabile di integrazione $v := x-u$ nell'Eq. (21), anche questo, seguito dalla ridefinizione ulteriore $v := u$. Si ha

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_2(u) \phi_1(u-x)^*\, du\,. \tag{21.2}$$

È interessante osservare che l'evanescenza di $(\phi_1 \star \phi_2)(x)$ al variare del parametro x corrisponda alla *perdita di correlazione* tra i sistemi-modello descritti, rispettivamente, da ϕ_1 e da ϕ_2 e, quindi, alla loro *indipendenza reciproca*. Qui, la contiguità con il contesto statistico è fin troppo evidente!
La *Correlazione Mutua* soddisfa la *proprietà di scambio*, verificabile in modo elementare,

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \star (\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv (\phi_1 \star \phi_1)(x) \star (\phi_2 \star \phi_2)(x)\,. \tag{22}$$

Inoltre, se ϕ_1 e ϕ_2 sono entrambe funzioni *pari*, allora, è immediato concludere che

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv (\phi_1 * \phi_2)(x)\,, \tag{23}$$

i.e., la *correlazione mutua* tra ϕ_1 e ϕ_2 (entrambe *pari*) coincide con la loro *convoluzione* (in tutto il dominio $\mathbb{R}$ di integrazione).

Osservazione

La *Correlazione Mutua* trova applicazioni, e.g., nel modello superconduttivo quantistico della correlazione spaziale tra le funzioni d'onda elettroniche delle 'coppie di Cooper' e nella Teoria Quantistica della Superfluidità applicata all'He^4 (*effetto 'fontana'* e modello *'a due fluidi'*).
Più in generale, l'integrale di *Correlazione Mutua* ha la sua collocazione naturale nell'ambito dei metodi risolutivi delle *Equazioni Differenziali a Derivate Parziali* e delle *Equazioni Integrali* dotate di *nucleo* (*der Integralkern*, v. P. 6) di argomento lineare, $\kappa(u,x) \equiv \kappa(u \pm x)$.

■

D. L'Autocorrelazione

Il regime di *Autocorrelazione* si può dedurre direttamente da quello di *Correlazione Mutua*, nel caso speciale in cui sia $\phi_1 \equiv \phi_2 := \phi$. D'altra parte, la sua importanza applicativa è notevole e non sembra inutile accennare brevemente ad alcune implicazioni interpretative molto profonde e suscettibili di sviluppi della sua rappresentazione integrale.
L'Eq. (21) fornisce una prima rappresentazione integrale per l'*Autocorrelazione*, con $\phi:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ e $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ generalmente:

$$(\phi \star \phi)(x) \equiv \phi(x) \star \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-u)^* \phi(x-u)\, du\,. \tag{24}$$

Analogamente, le Eq.i (21.1) e (21.2) danno luogo alle forme equivalenti

$$(\phi \star \phi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)^* \phi(x+u)\, du\,, \tag{24.1}$$

$$(\phi \star \phi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) \phi(u-x)^*\, du\,. \tag{24.2}$$

La forma (24.1) è usata come *definizione* operativa convenzionale dell'*Autocorrelazione* (v., e.g., [2], [3], [8], [9]).
Per completezza, si può ricordare una quarta rappresentazione integrale di $(\phi \star \phi)(x)$, deducibile anch'essa dalla (24), ponendo, prima, $v := -u$, poi, sfruttando l'Eq. (24.2) e, infine, ripristinando la variabile (muta) di integrazione $u := -v$. Il risultato è

$$(\phi \star \phi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-u) \phi(-u-x)^*\, du\,. \tag{24.3}$$

Il confronto tra le rappresentazioni integrali (24.1) e (24.2), come pure tra le rappresentazioni (24) e (24.3), indica che l'operatore (lineare) di *Autocorrelazione* è *hermitiano* in $\mathbb{R}$, essendo anche *simmetrico* in u vs. x. A sua volta, la *hermiticità* di $\phi \star \phi$ induce, attraverso la sua simmetria intrinseca, il carattere *degenere* di *perdita di qualsiasi informazione sulla fase di* ϕ. L'operatore $\phi \star \phi$, infatti, restituisce solo un *valore medio quadratico*, i.e., soltanto una stima della 'potenza media trasferita', secondo il linguaggio della Meccanica Statistica.

■

Le conclusioni precedenti emergono dal fondamentale, benché, qui, in versione ristretta,

E. Il Teorema di Wiener (N., 1894-1964)-Khintchine (A. J., 1894-1959)

Sia $\phi:\ u \mapsto \phi(u)$ una funzione $\mathcal{F}$-*trasformabile* vs. il parametro *continuo* $\alpha \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$\exists\ \Phi:\ \alpha \mapsto \Phi(\alpha) = \mathfrak{F}\{\phi(u)\} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) e^{i\alpha u}\, du\,.$$

Allora, vale la rappresentazione $\mathcal{F}$-trasformata dell'*Autocorrelazione*

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = \mathfrak{F}\{|\Phi(\alpha)|^2\} \equiv \mathfrak{F}\{|\mathfrak{F}\{\phi(u)\}|^2\} = \mathfrak{F}\left\{\left|\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) e^{i\alpha u}\, du\right|^2\right\} \blacktriangle. \tag{26}$$

Dimostrazione

Il coniugato complesso del valore $\phi(u)$ ha, come rappresentazione $\mathcal{F}$-trasformata vs. il parametro *arbitrario* $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generalizzato

$$\phi(u)^* = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)^* e^{iu\alpha} d\alpha . \tag{26.1}$$

Analogamente, la rappresentazione $\mathcal{F}$-trasformata del valore $\phi(x+u)$ vs. il parametro $\alpha' \in \mathbb{R}$ *arbitrario* (in generale, si assume $\alpha' \neq \alpha$) è data da

$$\phi(x+u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha')^* e^{-i(x+u)\alpha'} d\alpha' . \tag{26.2}$$

Introducendo le espressioni integrali (26.1) e (26.2) nell'Eq. (24.1), si ottiene, con passi successivi,

$$\begin{aligned}
(\phi \star \phi)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)^* e^{iu\alpha} d\alpha \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha') e^{-i(x+u)\alpha'} d\alpha' \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)^* d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha') e^{-ix\alpha'} d\alpha' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i(\alpha'-\alpha)u} du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)^* \Phi(\alpha') e^{-ix\alpha'} \delta(\alpha' - \alpha) d\alpha' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)^* \Phi(\alpha) e^{-ix\alpha} d\alpha \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha)|^2 e^{-ix\alpha} d\alpha \equiv \mathfrak{F}\{|\Phi(x)|^2\} \\
&= \mathfrak{F}\{|\mathfrak{F}\{\phi(u)\}|^2\} \equiv \mathfrak{F}\left\{ \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) e^{i\alpha u} du \right|^2 \right\}, \text{ q. e. d. .}
\end{aligned}$$

Osservazioni

- Si noti la varietà di espressioni equivalenti (simmetriche) di $(\phi \star \phi)(x)$, determinabili, in modo *indipendente tra loro*, dalle coniugazioni $e^{i\alpha u} \rightleftarrows e^{-i\alpha u}$ (i.e., dalle riflessioni assiali $u \rightleftarrows -u$ e/o $\alpha \rightleftarrows -\alpha$) e $\phi(u) \rightleftarrows \phi(\pm u)^*$.
- Versioni e discussioni più approfondite del *Teorema di Wiener-Khintchine*, alcune basate sul metodo della *matrice-densità*, si possono trovare, e.g., in [11], [12] e [13].

Volendo delineare un'analisi qualitativa minima dell'integrale di *Autocorrelazione* (24.1), sia ξ il *valore caratteristico* del parametro di autocorrelazione del modello matematico espresso da ϕ. Se si lascia variare il parametro continuo x in modo che sia $\xi \ll x$, allora, la correlazione tra i valori $\phi(u)$ e $\phi(x+u)$ cambia, nella *separazione* (fattorizzazione) integrale *nulla*, come il

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{+x} (\phi \star \phi)(x') dx' &\equiv \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{+x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)^* \phi(x'+u) du \right) dx' \\
&\xrightarrow[\xi \ll x]{} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)^* du \right) \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{+x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x'+u) du \right) dx' = 0 .
\end{aligned}$$

Nell'esempio classico della *Teoria di Langevin* del *moto browniano* di una molecola libera alla superficie di un fluido, u e x corrispondono, rispettivamente, ai valori t' e t della coordinata temporale; $\phi(u) \mapsto \phi(t')$ è una funzione cinematica 'a fluttuazione rapida' (*die Zitterbewegung*), avente le dimensioni di una *accelerazione*. Essa rappresenta una *forza esterna per unità di massa* della molecola dovuta alle collisioni *casuali* con altre molecole alla superficie del fluido. Tale forza (per unità di massa) diventa evanescente su intervalli di tempo *molto più grandi* del tempo di rilassamento medio τ della molecola dopo una collisione elastica casuale. In termini suggestivi, la 'memoria' (autocorrelazione) delle collisioni molecolari a tempi $t+t'$ 'sufficientemente avanzati', i.e., tali che sia $\tau \ll t$, viene cancellata. Quindi, il valore di $|(\phi \star \phi)(t)|$ è significativo soltanto finché $t/\tau \sim 1$, rafforzando il carattere di *erraticità completa del cammino browniano*.

■

Proposizione 3

Sia $\phi\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \wedge \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ generalmente. Allora,

$$\max_{\mathbb{R}}(\phi \star \phi) = (\phi \star \phi)(0)\,, \tag{27}$$

i.e., l'operatore di *Autocorrelazione* è massimo per $x = 0$.

La Proposizione (27) equivale alla disuguaglianza attenuata seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)\phi(x+u)|\, du \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^2 du\,. \tag{27.1}$$

Dimostrazione

Introdotta la variabile ausiliaria $\eta \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza evidente seguente, di *monotonia* in $\mathbb{R}$ vs. la funzione integranda,

$$0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta|\phi(x+u)| + |\phi(u)|)^2 du\,, \tag{28}$$

ha, per linearità, lo sviluppo binomiale quadratico

$$0 \le \eta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x+u)|^2 du + 2\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)\phi(x+u)|\, du + \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^2 du\,.$$

Se si pone $v := u + x$ nel primo addendo integrale, si ottiene che $dv \equiv du$ e che l'intervallo di integrazione resta invariato. Infine, dal cambiamento ulteriore di variabile $u := v$, si conclude che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x+u)|^2 du \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^2 du\,.$$

Quindi, la disuguaglianza (28) assume la forma

$$0 \le \eta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^2 du + 2\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)\phi(x+u)|\, du + \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^2 du \equiv a\eta^2 + b\eta + a\,, \tag{29}$$

avendo definito, ovviamente, $a := \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^2 du$ e $b := 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)\phi(x+u)|\, du$.

Poiché il trinomio quadratico (29) è $\ge 0 \;\; \forall \eta$, allora, il suo discriminante (ridotto) è sempre ≤ 0,

$$\Delta/4 \equiv b^2/4 - a^2 \leq 0\,, \quad \text{i.e.,} \quad b/2 \leq a\,.$$

Quindi, dalle definizioni di a e di b, segue la disuguaglianza attenuata (27.1),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)\phi(x+u)|\, du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^2 du\,,$$

nella quale, l'uguaglianza corrisponde a $x = 0$. In altri termini, $(\phi \star \phi)(x)$ raggiunge il suo valore *massimo assoluto* per $x = 0$, q. e. d. .

■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [8], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

[1] HIRSCHMAN, I. I., JR. - WIDDER, D. V., *The Convolution Transform*, PRINCETON UN. PRESS (1955);

[2] GEL'FAND, I. M. - SHILOV, G. E., *Generalized Functions*, VOL. **I**, ACADEMIC PR., INC. (1964);

[3] SMIRNOV, V. I., *A course of Higher Mathematics*, VOL. **IV**, PERGAMON PR., INC. (1964);

[4] BRACEWELL, R., *The Fourier Transform and Its Applications*, MCGRAW-HILL CO., INC. (1965);

[5] CHURCHILL, R. V., *Operational Mathematics*, 3RD ED., MCGRAW-HILL BOOK CO., INC. (1972);

[6] HOCHSTADT, H., *Integral Equations*, CH. 5, JOHN WILEY & SONS (1973);

[7] PAPOULIS, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, MCGRAW-HILL CO., INC. (1962);

[8] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 2ND ED., CH. 8, MCGRAW-HILL CO., INC. (1964);

[9] RUDIN, W., *Functional Analysis*, CH. 7, MCGRAW-HILL CO., INC. (1973);

[10] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, 2ND ED., CH. 9, MCGRAW-HILL CO., INC. (1974);

[11] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7TH ED., CH. 20, ACADEMIC PRESS (2013);

[12] DETTMAN, J. W., *Mathematical Methods in Physics and Engineering*, 2ND ED., MCGRAW-HILL CO., INC. (1969);

[13] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2ND ED., P. 63-65, PRENTICE-HALL, INC. (1976);

[14] BARTON, G., *Elements of Green's Functions and Propagation*, CLARENDON PR., INC. (1989);

[15] SPIEGEL, M. R., *Theory and problems of Laplace Transforms*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1965);

[16] SPIEGEL, M. R., *ADVANCED MATHEMATICS for Scientists and Engineers*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1971).

Applicazioni in Fisica

[17] REIF, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, MCGRAW-HILL CO., INC. (1965);

[18] KUBO, R., & AL., *Statistical Mechanics - An Advanced Course with Problems and Solutions*, 7TH ED., NORTH-HOLLAND PUBL. CO. (1988);

[19] HECHT, E., *Optics*, 5TH ED., PEARSON EDU. LTD. PUBL. (2017);

[20] GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics*, 2RD ED., MCGRAW-HILL CO., INC. (2005).

■■■