

Note di

DINAMICA DELLE COLLISIONI

in regime non-relativistico,
classico o semi-classico

claudio magno



Jerry B. Marion (1929-1981)

Professor of Physics (Experim. Nuclear) – Un. of Maryland, College Park, MD, USA

INDICE

... BENVENUTI A BORDO	P. III
MOMENTO LINEARE VS. IMPULSO QUASHISTANTANEO	P. 1
IL MODELLO CLASSICO DELLA COLLISIONE BINARIA TRA CORPI LISCI	P. 3
IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA	P. 7
L'ENERGIA NELLE COLLISIONI BINARIE CLASSICHE TRA CORPI LISCI - IL Q DI REAZIONE IN UNA COLLISIONE BINARIA NON-RELATIVISTICA TRA PARTICELLE	P. 9 P. 10
IL CONCETTO DI SEZIONE D'URTO	P. 13
LA DIFFUSIONE IN UN CAMPO DI FORZA CENTRALE $\mathbf{F} = -(\kappa/r^2)\hat{\mathbf{r}}$, CON $\kappa > 0$	P. 13
LA SEZIONE D'URTO MICROSCOPICA	P. 14
LA SEZIONE D'URTO DI DIFFUSIONE ELASTICA QUANTISTICA NON-RELATIVISTICA	P. 20
UN'INTRODUZIONE ELEMENTARE AL PROBLEMA GENERALE DEGLI ' n -CORPI'	P. 21
LE COORDINATE DI JACOBI PER IL PROBLEMA CLASSICO E SEMI-CLASSICO DEI '3-CORPI'	P. 22
LA DISINTEGRAZIONE SPONTANEA NON-RELATIVISTICA A '3-CORPI' - IL DIAGRAMMA DI DALITZ	P. 24
BIBLIOGRAFIA	P. 28

... BENVENUTI A BORDO

Prima di intraprendere qualsiasi avventura per il mare immenso e profondo (e, per me, fatalmente attrattivo) delle teorie quantistiche dello *scattering* di particelle (v. **Bibliografia**, [13], ..., [29]), può essere utile rivisitare sinteticamente un minimo di ‘quadro classico’ precursore (newtoniano) incardinato nei due *principi di conservazione* fondamentali che regolano i moti dei corpi materiali quando siano considerati *privi di struttura interna*, negli intervalli temporali distinti di *avvicinamento* e di *allontanamento* reciproco durante i processi di collisione: quello (vettoriale) del *Momento Lineare Totale* (\equiv quantità di moto totale) e quello (scalare) dell’*Energia Totale*. In tale prospettiva, a malincuore, ho scelto di sacrificare, da una discussione più completa, il Principio di Conservazione del *Momento Angolare* e i suoi collegamenti stretti con gli altri due Principi. In tal senso, ci si rivolga alla **Bibliografia** finale.

Il sistema dei 2-corpi si suppone *isolato* da campi *esterni* di forza; le interazioni eventuali tra i corpi si manifestano ed evolvono *unicamente* come eventi *interni* al sistema binario che essi costituiscono.

Dai miei fogli e quaderni del ‘tempo che fu’, ho assemblato queste note alla buona per il neofito curioso (o, più semplicemente, per chi desideri rivedere l’argomento), con l’avvertenza precisa, però, che esse costituiscono solo un ‘booklet’ senza pretese e assolutamente *di contorno* ai testi autorevolissimi in circolazione (ancora, v. **Bibliografia**, [1], ..., [12]) o a lezioni ufficiali specifiche. Io mi limito a esprimere un invito all’approfondimento personale, auspicando che ogni termine dubbio o insolito spinga a un controllo *serio* almeno su WIKIPEDIA (con carta e penna sottomano ...).

Non so se queste note lieviteranno né se troverò il ‘drive’ giusto per le collisioni relativistiche e per concetti quali la matrice **S** di *scattering* e qualche rudimento *preparatorio* alle equazioni semi-classiche di FADDEEV (L. D., 1934-2017) dello *scattering a 3-corpi*, introdotto alle pp. 22-23. Così, mi limito ad ‘accendere la miccia’ con le *Equazioni di JACOBI* (C. G. J., 1804-1851) degli *n*-corpi, indeciso tra sollecitazioni interne a proseguire e vischiosità motivate, penso, da buone ragioni (si legga pure: *competenza*). Poi, chi se la sente, potrà procedere da sé. La **Bibliografia** indicata (che ho praticato non senza sudore e momenti di sconforto ... formativo) mi sembra fondamentale e sufficientemente esaustiva per un’introduzione all’argomento. Intanto, mi auguro che, chi voglia leggermi, non trovi del tutto scontato il *bread n’butter* minimo di conoscenze e di dettagli ... scolastici. – Provo a incominciare.

C M

Ho assemblato questo notebook in ricordo di JERRY B. MARION, Professor of Physics all’Università del Maryland, fisico di capacità didattiche comparabili, mi sento di affermarlo tranquillamente, a quelle del mitico Feynman (i.e., *fuori del comune*) e di livello professionale come di pochi. Ebbi ancora la fortuna di poter ascoltare il Prof. Marion a un ‘afternoon graduate (*coffee-donut*) talk’, ai LAMPF (Los Alamos Meson Physics Facility Lab.s, NM) prima della sua sparizione prematura ma, già da tempo, i suoi *papers* e *textbooks* mi avevano spinto al largo in quel mare a cui ho fatto cenno all’inizio.

Il Prof. Marion è stato un disseminatore di Conoscenza generoso, aperto, visionario ed efficace. Ma che cosa mi resta di quell’esperienza? Tra stagioni di alti e bassi, il mio viaggio continua, ormai solo nella mia mente e sul Web, ma continua, senza ripensamenti!

Momento Lineare vs. Impulso quasi-istantaneo

Nel regime meccanico classico non-relativistico, la 2^a Legge di Newton fornisce la definizione generale della grandezza vettoriale *Impulso Lineare* \mathbf{I} come la *variazione* del *Momento Lineare* di un sistema di massa costante m , soggetto all'azione di un campo esterno di forza $\mathbf{F}(t)$ durante un intervallo di tempo $\Delta t \equiv t - t_0$:

$$\mathbf{I}(t) := \Delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau) d\tau.$$

A parità di valore *finito* $\|\mathbf{I}_0\|$, l'impulso può essere causato da una forza '*poco intensa*' agente su m per un intervallo di tempo Δt '*molto lungo*'. Nel caso opposto di una forza '*intensa*' agente su m solo per un intervallo $\Delta t_0^\mp \equiv (t_0^-, t_0^+)$, *non-nullo* ma *breve oltre ogni limite*, intorno all'istante t_0 *infinitamente esatto*, l'impulso *finito* \mathbf{I}_0 è idealizzabile con il *funzionale δ di Dirac*,

$$\mathbf{I}_0 \equiv \mathbf{I}(t_0) = \int_{t_0^-}^{t_0^+} G^\pm(t, t_0) \mathbf{I}(t) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \mathbf{F}(t) dt \equiv \mathbf{p}(t_0^+) - \mathbf{p}(t_0^-), \quad (1)$$

indicandolo come *δ -impulso* o *forza-per-variazione-temporale* Δt_0^\mp nell'intorno dell'istante t_0 .

Tecnicamente, il termine $G^\pm(t, t_0)$ nell'Eq. (1) costituisce – in \mathcal{C} – il *nucleo (kernel) integrale* della *δ -funzione impulsiva (di Green)*, propagatrice istantanea del campo di forza esterno $\mathbf{F}(t)$,

$$G^\pm(t, t_0) := (t - t_0 \pm i\varepsilon)^{-1} \equiv \delta(t - t_0), \quad (1.1)$$

con $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (aggiramento del polo t_0 sull'asse $\Re z$, provenendo-da/ritornando-a *destra*).

□

Problema 1

Un corpo rigido di materiale omogeneo è formato da due sfere di masse m_1 e m_2 , unite da un'asta rettilinea di massa trascurabile ma *conduttrice perfetta* di momento lineare. Inizialmente, il corpo è *fermo* vs. un osservatore inerziale. Improvvisamente, viene applicato un impulso \mathbf{I} alla sfera m_1 , a un angolo φ_0 vs. l'asta, orientata come l'asse X .

Qual è, vs. l'orientazione X dell'asta, l'ampiezza dell'angolo φ dello spostamento della sfera m_1 causato dall'urto impulsivo? Inoltre, come dipende φ dalle masse m_1 e m_2 ?

Soluzione

L'impulso esterno \mathbf{I} trasferisce una *tensione impulsiva istantanea*, \mathbf{t} , all'asta *rigida*. Assumendo $\mathbf{t} \equiv \|\mathbf{t}\| \hat{\mathbf{x}} \equiv t \hat{\mathbf{x}}$, ai punti di contatto tra l'asta ed entrambe le sfere, risultano, rispettivamente,

$$\mathbf{t} = m_1 v_1 \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{P1.1})$$

$$\mathbf{t} = m_2 v_2 \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{P1.2})$$

con $v_1 \equiv \|\mathbf{v}_1\|$ e $v_2 \equiv \|\mathbf{v}_2\|$. Confrontando le Eq.i (P1.1) e (P1.2), ne viene che gli x -componenti vettoriali delle velocità istantanee acquisite dalle sfere sono *uguali*,

$$v_2 \hat{\mathbf{x}} = (m_1/m_2) v_1 \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{P1.3})$$

Dal *Principio di Azione-Reazione*, a un istante *ritardato* t_0^+ – immediatamente *successivo* a t_0 – quello del contatto, la x -componente *scalare* dell'impulso sulla sfera m_1 si scrivono

$$m_1 v_1 \cos \varphi = -(\|\mathbf{I}\| \cos \varphi_0 + \iota), \quad (\text{P1.4.1})$$

con $\iota > 0$,

$$= -m_1 v_1 \cos \varphi_0 - m_2 v_2, \quad (\text{P1.4.2})$$

dall'Eq. (P1.2),

$$= -m_1 v_1 \cos \varphi_0 - m_1 v_1 \cos \varphi \quad (\text{P1.4.3})$$

dalle Eq.i (P1.1) o (P1.3)

e, quindi, uguagliando il membro a *sinistra* nell'Eq. (P1.4.1) con quello a *destra* nell'Eq. (P1.4.3), si trova che

$$2m_1 v_1 \cos \varphi = -m_1 v_1 \cos \varphi_0. \quad (\text{P1.5})$$

La y -componente *algebraica* dell'impulso sulla sfera m_1 , all'istante *ritardato* t_0^+ , resta *invariata* a causa del vincolo di *rigidità* dell'asta:

$$m_1 v_1 \sin \varphi = \|\mathbf{I}\| \sin \varphi_0 \equiv m_1 v_1 \sin \varphi_0. \quad (\text{P1.6})$$

Dividendo membro-a-membro l'Eq. (P1.6) per l'Eq. (P1.5) e risolvendo vs. φ , risulta

$$\varphi = \tan^{-1}(2 \tan(-\varphi_0)), \quad (\text{P1.7})$$

un'espressione *indipendente* sia da m_1 che da m_2 .

■

Il modello classico della collisione binaria tra corpi lisci

Una collisione classica tra due corpi con superfici *perfettamente lisce* (*smooth*), pur avvenendo nello spazio 3-dim $X \times Y \times Z$, è sempre rappresentabile in uno spazio 2-dim, e.g., $X \times Y$, grazie al vincolo di *levigatezza ideale* dei corpi e alla *separazione temporale* della *configurazione dinamica* del sistema nel ‘canale’ di *ingresso* vs. quella nel ‘canale’ di *uscita*, i.e., *prima* vs. *dopo* la collisione.

Nella Fig. 1, il piano geometrico $X \times Y$ rappresenta il *piano fisico di diffusione* (*scattering*) mentre il piano $Z \times X$, del quale, è visibile la sola sezione X , rappresenta il *piano fisico di collisione* (o di *contatto*). Per convenienza, il punto di collisione è fatto coincidere con l’origine del *sistema di riferimento inerziale assoluto* generico $X \times Y \times Z$ dell’*Osservatore* (O-sistema).

Seguendo una consuetudine consolidata, le quantità fisiche e geometriche nel ‘canale’ di *uscita* (il semi-piano $X^+ \times Y$) vengono distinte da quelle nel ‘canale’ di *ingresso* (il semi-piano $X^- \times Y$) con un *apice*. Gli angoli sono misurati *anti-orariamente*, iniziando dal semi-asse orientato X^+ , secondo la convenzione goniometrica *destrorsa* (*vers* $X \equiv \hat{x}$, *vers* $Y \equiv \hat{y}$, *vers* $Z \equiv \hat{z}$).

Per due corpi solidi di masse m_1 e m_2 che collidono sul piano $Z \times X$ di *contatto*, si determina il *versore di collisione* \hat{n} ($\equiv \hat{y}$), *normale* al piano di contatto. I corpi esercitano forze *istantanee* l’uno contro l’altro che, per il 3° *Principio della Dinamica*, danno origine a *impulsi opposti*, $\pm \mathbf{I}$. Se i due corpi sono *perfettamente lisci*, non risulta alcuna forza *netta* perpendicolare a \hat{n} (i.e., giacente nel piano di collisione $Z \times X$). Questo scenario è, chiaramente, *ideale*: i corpi reali si deformano, né le forze che essi esercitano sono istantanee. Inoltre, la loro rugosità naturale – e *ineliminabile* – produce *sempre* forze di attrito *trasversali* (\equiv perpendicolari) a \hat{n} e casuali.

Siano v_1 e v_2 le velocità *prima* della collisione, alle quali, corrispondano v'_1 e v'_2 le velocità *dopo* la collisione. Allora, valgono le uguaglianze impulsive

$$m_1(v'_1 - v_1) = \mathbf{I}, \quad (2.1)$$

$$m_2(v'_2 - v_2) = -\mathbf{I}. \quad (2.2)$$

Sommando le Eq.i (2.1) e (2.2) membro-a-membro, si determina un’espressione del *Principio di Conservazione del Momento Lineare Totale* (*vettoriale*) per il sistema *isolato* dei due corpi solidi *perfettamente lisci* durante una collisione:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2. \quad (3)$$

Inoltre, il componente $m_1(v_1 - v'_1)_\perp$, *ortogonale* a \hat{n} , è *nullo*, essendo $\mathbf{I} \parallel \hat{n}$. Quindi, $v_{1,\perp} \equiv v'_{1,\perp}$ vs. \hat{n} , i.e., con altre parole, l’ \hat{n} -componente della velocità di m_1 *si conserva* durante l’urto.

In modo identico, si ragiona per m_2 .

Pertanto, una collisione tra corpi *lisci* non altera i componenti delle velocità nel piano $Z \times X$ di collisione (cf/c Fig. 1, con $\hat{n} \equiv \hat{y}$). Questa condizione si scrive, con $\nu = 1, 2$,

$$v_\nu \times \hat{n} = v'_\nu \times \hat{n}. \quad (4)$$

□

D’altra parte, l’analisi fin qui condotta non consente di trarre alcuna conclusione sulle componenti *longitudinali* (i.e., parallele a \hat{n}) delle velocità. Per queste, in molte circostanze, si applica una regola *empirica* (di validità approssimata), la *Legge di Restituzione* di Newton (per i corpi *lisci*),

$$(v'_1 - v'_2) \cdot \hat{n} = -\eta (v_1 - v_2) \cdot \hat{n},$$

esprimibile nella forma concisa

$$\mathbf{v}'_{12} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\eta \mathbf{v}_{12} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (5)$$

congetturata dai dati sperimentali sulle *velocità relative* nei ‘canali’ di collisione. Il *Coefficiente di Restituzione* $\eta \in [0, 1]$ esprime una *misura macroscopica* della deformazione dei corpi causata dalle *interazioni microscopiche* – incontrollabili! – che avvengono durante la collisione: il valore $\eta = 0$ corrisponde a una collisione *totalmente anelastica* (i.e., quando i corpi fanno ‘corpo unico’ nel ‘canale’ di uscita) mentre il valore $\eta = 1$ si riferisce a una collisione *perfettamente elastica* (i.e., quando la *velocità relativa* dei corpi, *non* deformati dal contatto, si conserva nei ‘canali’). \square

L’obiettivo di quanto segue è quello della determinazione di relazioni di connessione (funzioni vettoriali di scalari) tra le velocità nei ‘canali’ dei corpi (lisci), nel piano di diffusione $X \times Y$:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{f}_1(v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2, \eta),$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{f}_2(v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2, \eta).$$

Con riferimento alla Fig. 1 e alle convenzioni simboliche adottate, si scrivono, rispettivamente,

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \cos \varphi_1 \hat{\mathbf{x}} + v_1 \sin \varphi_1 \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{v}_2 = v_2 \cos \varphi_2 \hat{\mathbf{x}} + v_2 \sin \varphi_2 \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.2)$$

$$\text{dove, } v_\nu \equiv \|\mathbf{v}_\nu\| \wedge \varphi_\nu \in [0, 2\pi), \nu = 1, 2,$$

$$\mathbf{v}'_1 = v'_1 \cos \varphi'_1 \hat{\mathbf{x}} + v'_1 \sin \varphi'_1 \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{v}'_2 = v'_2 \cos \varphi'_2 \hat{\mathbf{x}} + v'_2 \sin \varphi'_2 \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.4)$$

$$\text{dove, } v'_\nu \equiv \|\mathbf{v}'_\nu\| \wedge \varphi'_\nu \in [0, 2\pi), \nu = 1, 2.$$

Sostituendo le espressioni (6.1), ..., (6.4) delle velocità nell’Eq. (3) e uguagliando tra loro le componenti scalari cartesiane (i.e., i coefficienti di $\hat{\mathbf{x}}$ e di $\hat{\mathbf{y}}$ nei ‘canali’), risultano

$$m_1 v_1 \cos \varphi_1 + m_2 v_2 \cos \varphi_2 = m_1 v'_1 \cos \varphi'_1 + m_2 v'_2 \cos \varphi'_2, \quad (7.1)$$

$$m_1 v_1 \sin \varphi_1 + m_2 v_2 \sin \varphi_2 = m_1 v'_1 \sin \varphi'_1 + m_2 v'_2 \sin \varphi'_2. \quad (7.2)$$

La y -componente scalare (normale) della *Legge di Restituzione* (5) è data, nella Fig. 1, da

$$(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \cdot \hat{\mathbf{y}} = -\eta (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

o, più esplicitamente, mediante le Eq.i (6.1), ..., (6.4),

$$v'_1 \sin \varphi'_1 - v'_2 \sin \varphi'_2 = -\eta (v_1 \sin \varphi_1 - v_2 \sin \varphi_2). \quad (8)$$

Inoltre, dall’Eq. (4), le x -componenti scalari (*tangenziali*, quindi, riferite al *piano di collisione* $Z \times X$) delle velocità nei ‘canali’ di *ingresso* e di *uscita*, sono *uguali*:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}'_1 \cdot \hat{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}'_2 \cdot \hat{\mathbf{x}},$$

i.e., in forma scalare equivalente,

$$v_1 \cos \varphi_1 = v'_1 \cos \varphi'_1, \quad (9.1)$$

$$v_2 \cos \varphi_2 = v'_2 \cos \varphi'_2. \quad (9.2)$$

Come primo risultato, si verifica prontamente che l'Eq. (7.1) è soddisfatta identicamente dalle Eq.i (9.1) e (9.2).

Il sistema lineare delle Eq.i (7.2) e (8), vs. le *incognite* $\alpha := v'_1 \sin \varphi'_1$ e $\beta := v'_2 \sin \varphi'_2$, si scrive

$$\begin{cases} m_1 \alpha + m_2 \beta = m_1 p + m_2 q \\ \alpha - \beta = \eta (q - p) \end{cases} . \quad (10)$$

Nel sistema (10) compaiono le definizioni *parametriche* comode $p := v_1 \sin \varphi_1$ e $q := v_2 \sin \varphi_2$.

La soluzione *unica* del sistema è espressa esplicitamente dal vettore

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v'_1 \sin \varphi'_1 \\ v'_2 \sin \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(m_1 - \eta m_2) v_1 \sin \varphi_1 + (1 + \eta) m_2 v_2 \sin \varphi_2}{M} \\ \frac{(1 + \eta) m_1 v_1 \sin \varphi_1 + (m_2 - \eta m_1) v_2 \sin \varphi_2}{M} \end{pmatrix} . \quad (11)$$

con $M \equiv m_1 + m_2$. Infine, combinando le Eq.i (9.1), (9.2) e (11) nelle Eq.i (6.3) e (6.4), si ricavano le relazioni vettoriali richieste di connessione tra i 'canali' $\{v_1, v_2\}$ e $\{v'_1, v'_2\}$:

$$v'_1 = v_1 \cos \varphi_1 \hat{x} + \frac{(m_1 - \eta m_2) v_1 \sin \varphi_1 + (1 + \eta) m_2 v_2 \sin \varphi_2}{M} \hat{y} , \quad (12.1)$$

$$v'_2 = v_2 \cos \varphi_2 \hat{x} + \frac{(1 + \eta) m_1 v_1 \sin \varphi_1 + (m_2 - \eta m_1) v_2 \sin \varphi_2}{M} \hat{y} . \quad (12.2)$$

□

Osservazione

Va tenuto ben presente che la forma dei risultati ricavati per la collisione classica tra due corpi *lisci* – elastica o no – si riferisce *strettamente* all'assetto geometrico dell'O-sistema in Fig. 1, p. 6, dove, l'impulso istantaneo di *scattering* è definito arbitrariamente secondo il *verso* di $\hat{n} \equiv \hat{y}$, i.e., assumendo $Z \times X$ come piano di *collisione* (o di *contatto*):

$$I = \|I\| \hat{n} \equiv I \hat{y} .$$

Un assetto geometrico differente, ottenibile con una rotazione $\Delta\varphi$ del piano di *scattering* $X \times Y$ nella Fig. 1, implica una variazione di $-\Delta\varphi$ per *tutte* le ampiezze angolari *originarie* nei 'canali', $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2$. Si può verificare senza difficoltà che una rotazione di $-\pi/2$ rad del piano di *scattering* *trasforma* le espressioni delle Eq.i (12.1) e (12.2) (quindi, $\cos \varphi'_1 \mapsto -\sin \varphi'_1$, $\sin \varphi_2 \mapsto \cos \varphi_2$, $\hat{x} \mapsto \hat{y}$, $\hat{y} \mapsto -\hat{x}$, etc.). In particolare, nel caso di una collisione *frontale* elastica (i.e., con $\eta = 1$), essa verifica i risultati del **Problema 15**, nel phys-notebook: **Note e problemi risolti di Meccanica Classica** (con questioni di Gravitazione).

□

Un sistema *inerziale* di riferimento molto usato nell'analisi sperimentale è il cosiddetto *sistema del Laboratorio* (L-sistema), nel cui 'canale' di ingresso (o di *incidenza*), l'osservatore vede *fermo* il corpo-*bersaglio* mentre l'altro, il *proiettile*, gli appare in movimento.

□

Problema 2

Si verifichi che, nella collisione 2-dim *elastica* binaria tra corpi (lisci) di masse omogenee e *uguali*, nel 'canale' di uscita di un L-sistema di riferimento risulta, *in generale*, che $v'_1 \perp v'_2$ (importante nel gioco del *bigliardo*!).

Si trattino separatamente i casi di incidenza ad angoli *critici*.

Soluzione

In generale, per $m_1 = m_2 \equiv m$ e $\eta = 1$, le Eq.i (16.1) e (16.2) si riducono alle forme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= v_1 \cos \varphi_1 \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{v}'_2 &= v_1 \sin \varphi_1 \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

che verificano l'asserto.

Angoli di incidenza *critici* in 2-dim sono $\varphi_1 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, per i quali, $\mathbf{v}'_1 \equiv \mathbf{0} \vee \mathbf{v}'_2 \equiv \mathbf{0}$; a questi angoli, è necessario seguire un procedimento esplicito fisicamente più fondamentale, non semplicemente sostituzionale.

Assumendo il corpo 2 come il 'bersaglio' (il ragionamento è banalmente *simmetrico* con la scelta del corpo 1), l'Eq. di conservazione (3) si riduce a

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2. \tag{P2.1}$$

Inoltre, il *Principio di Conservazione dell'Energia totale* per un sistema isolato, elettro-magneticamente neutro e privo di altre interazioni interne apprezzabili, dipendenti, e.g., dalla *distanza* tra, o dalle *velocità* dei, corpi componenti, si riduce, a sua volta, all'invarianza dell'*Energia Cinetica* durante la collisione.

Dopo la divisione per $m/2$, rimane l'uguaglianza quadratica scalare

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2. \tag{P2.2}$$

È ovvio che l'Eq. (P2.2) deve poter essere dedotta direttamente dall'espansione formale generale

$$v_1^2 \equiv \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \equiv (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) \cdot (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2. \tag{P2.3}$$

L'identità sussiste sse $\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = 0$, i.e., sse $\mathbf{v}'_1 \perp \mathbf{v}'_2$, q. e. d. .

■

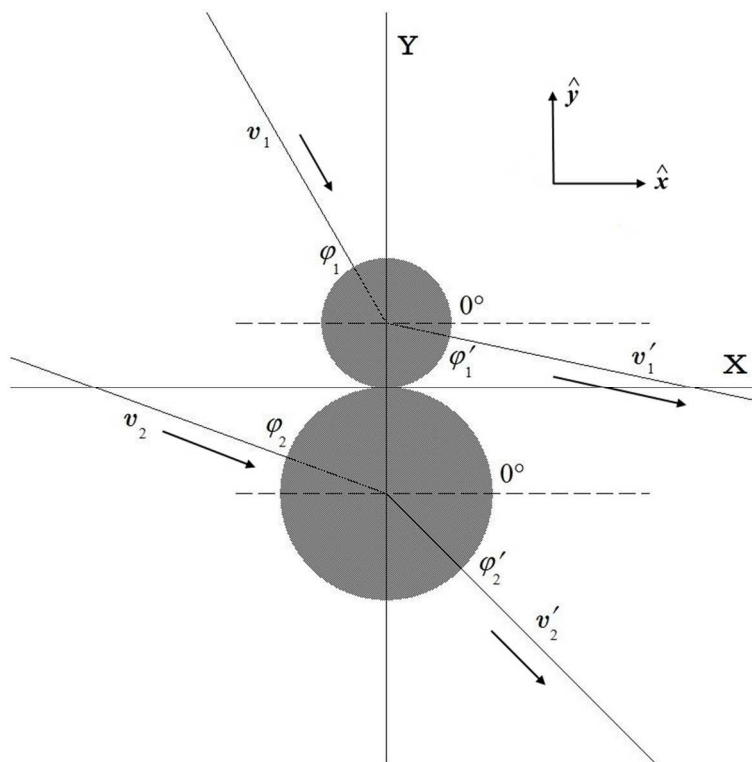


Fig. 1 – Cinematica della collisione *binaria* 'hard-sphere' tra corpi solidi sferici lisci
(gli angoli $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ sono misurati *anti-orariamente* vs. $\hat{\mathbf{x}}$)

Il sistema di riferimento del Centro di Massa

Sia ancora $M \equiv m_1 + m_2$ la somma delle masse dei due corpi. La *posizione* del loro *Centro di Massa* (CM) nello spazio $X \times Y \times Z$ dell'O-sistema è *definita*, nel 'canale' di *ingresso*, dal vettore

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \quad (13)$$

($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$, ovviamente). Quindi, *prima* della collisione, la *velocità* del CM è

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} \equiv \frac{d\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{M} \equiv \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{M}, \quad (14)$$

Dall'Eq. (14), è evidente che, il momento lineare *totale* del sistema è uguale al momento lineare del CM, nel quale, si immagini *concentrata tutta* la massa:

$$\mathbf{P}_{\text{CM}} = M \mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{P}. \quad (15.1)$$

Allora, dal *Principio di conservazione del Momento Lineare Totale* (il sistema è *isolato*), risulta

$$\mathbf{P}'_{\text{CM}} = M \mathbf{v}'_{\text{CM}} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{P}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (15.2)$$

evidenziando il fatto che la *velocità* e il *momento lineare* del CM si conservano nella collisione, i.e., sono *costanti del moto* ($\mathbf{v}_{\text{CM}} \neq \mathbf{v}_{\text{CM}}(t)$) e il CM si muove di *moto rettilineo uniforme*. □

Rispetto al CM-sistema di riferimento, le grandezze fisiche saranno *contraddistinte sempre* con una *sopra-lineatura* (e.g., $\bar{\mathbf{v}}_2'$, $\bar{\mathbf{K}}_1$, etc.) in entrambi i 'canali'.

Anche il CM-sistema è *inerziale*. Infatti, considerato il vettore *spostamento* generico nel 'canale' di ingresso vs. il CM-sistema,

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{CM}}, \quad (16)$$

poiché \mathbf{v}_{CM} è una *costante del moto* nella collisione, l'integrazione temporale di $\mathbf{v}_{\text{CM}} = d\mathbf{r}_{\text{CM}}/dt$, eseguita nell'O-sistema di riferimento, dà

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \mathbf{v}_{\text{CM}} t + \mathbf{r}_0,$$

dove, $\mathbf{r}_0 \equiv \bar{\mathbf{r}}_0$ è un vettore *invariante per traslazione* (*costante* d'integrazione). Quindi,

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{v}_{\text{CM}} t. \quad (17)$$

Questo mostra che la traslazione al CM-sistema è una *trasformazione galileiana* di velocità $-\mathbf{v}_{\text{CM}}$.

Derivando l'Eq. (17) vs. t e sostituendo a \mathbf{v}_{CM} la sua espressione (14), si determinano, per mezzo di quantità *tutte* espresse in O-rappresentazione,

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{CM}} = (m_2/M)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \equiv (m_2/M)\mathbf{v}_{12}, \quad (18.1)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{\text{CM}} = -(m_1/M)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \equiv -(m_1/M)\mathbf{v}_{12}. \quad (18.2)$$

Dalle Eq.i (18.1) e (18.2), si deduce che, nel CM-sistema, i *momenti lineari* dei corpi sono sempre *opposti* e, ancora, esprimibili attraverso le O-*velocità relative*,

$$\bar{\mathbf{p}}_1 \equiv m_1 \bar{\mathbf{v}}_1 = m_1 (m_2/M) \mathbf{v}_{12} \equiv \mu \mathbf{v}_{12}, \quad (19.1)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_2 \equiv m_2 \bar{\mathbf{v}}_2 = m_2 (-(m_1/M) \mathbf{v}_{12}) \equiv -\mu \mathbf{v}_{12}, \quad (19.2)$$

e la massa ridotta,

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (20)$$

In modo del tutto identico e simmetrico, si determinano, nel ‘canale’ di uscita,

$$\bar{\mathbf{p}}_1' \equiv m_1 \bar{\mathbf{v}}_1' = m_1 (m_2/M) (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \equiv \mu \mathbf{v}'_{12}, \quad (21.1)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_2' \equiv m_2 \bar{\mathbf{v}}_2' = m_2 (-(m_1/M) (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)) \equiv -\mu \mathbf{v}'_{12} \quad (21.2)$$

e le analoghe delle Eq.i (17), (18.1) e (18.2). Pertanto, il CM-sistema è il riferimento più semplice per le collisioni binarie, avendosi, in esso, $\bar{\mathbf{P}} \equiv \bar{\mathbf{P}}' = \mathbf{0}$, i.e. (è banale!), $\bar{\mathbf{v}}_{\text{CM}} \equiv \bar{\mathbf{v}}'_{\text{CM}} = \mathbf{0}$. □

Problema 3

In una collisione binaria *elastica* ($\eta = 1$) tra corpi lisci, si verifichino, per le *velocità relative*, le *invarianze di scambio* dei ‘canali’ di collisione e dei sistemi di riferimento O e CM:

$$\mathbf{v}_{12} \equiv \bar{\mathbf{v}}_{12} \wedge \mathbf{v}'_{12} \equiv \bar{\mathbf{v}}'_{12}; \quad (P3.1)$$

$$\mathbf{v}_{12} \equiv -\mathbf{v}'_{12} \wedge \bar{\mathbf{v}}_{12} \equiv -\bar{\mathbf{v}}'_{12}; \quad (P3.2)$$

$$\|\mathbf{v}_{12}\| \equiv \|\bar{\mathbf{v}}_{12}\| \equiv \|\mathbf{v}'_{12}\| \equiv \|\bar{\mathbf{v}}'_{12}\|. \quad (P3.3)$$

Inoltre, si giustifichi che, per qualsiasi collisione, *anelastica* o *elastica*, tra corpi lisci, valgono le uguaglianze

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \bar{\mathbf{v}}'_{\text{CM}} \quad (\equiv \mathbf{MP} = \mathbf{MP}'). \quad (P3.4)$$

Problema 4

Per *qualsiasi tipo* di collisione binaria tra corpi lisci vs. l’O-sistema di riferimento, si verifichino, dalle Eq.i (21.1), (19.1), (21.2) e (19.2), le identità *relative* seguenti nei ‘canali’ di collisione:

$$\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{M} (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}); \quad (P4.1)$$

$$\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{M} (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}); \quad (P4.2)$$

$$v'^2_1 - v^2_1 = \frac{m_2^2}{M^2} (v'^2_{12} - v^2_{12}) + 2 \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}); \quad (P4.3)$$

$$v'^2_2 - v^2_2 = \frac{m_1^2}{M^2} (v'^2_{12} - v^2_{12}) - 2 \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}). \quad (P4.4)$$

Ovviamente, le velocità *relative* obbediscono alle scomposizioni *ortogonali* di collisione (4) e (5). ■

L'Energia nelle collisioni binarie classiche tra corpi lisci

Se *qualsiasi* forma di interazione tra due corpi lisci – salvo il ‘ δ -contatto’ ideale – è *trascurabile* consistentemente nell’analisi della loro collisione, allora, l’energia *totale* del sistema binario è approssimabile a quella solamente *cinetica*. Si consideri (scelta arbitraria) il ‘canale’, e.g., di *uscita* della collisione. L’energia *totale* nell’O-sistema di riferimento può essere scritta

$$\begin{aligned}
 K' &= (1/2)m_1\bar{v}'_1{}^2 + (1/2)m_2\bar{v}'_2{}^2 \\
 &= (1/2)m_1(\mathbf{v}'_{CM} + \bar{\mathbf{v}}'_1)^2 + (1/2)m_2(\mathbf{v}'_{CM} + \bar{\mathbf{v}}'_2)^2, \quad \text{dalle Eq.i (22.1) e (22.2) (analoghe),} \\
 &= (1/2)(m_1 + m_2)v_{CM}'^2 + \mathbf{v}'_{CM} \cdot (m_1\bar{\mathbf{v}}'_1 + m_2\bar{\mathbf{v}}'_2) + (1/2)(m_1\bar{v}'_1{}^2 + m_2\bar{v}'_2{}^2) \\
 &= (1/2)Mv_{CM}'^2 + \underbrace{\mathbf{v}'_{CM} \cdot (m_1\bar{\mathbf{v}}'_1 + m_2\bar{\mathbf{v}}'_2)}_{=0} + \frac{m_1m_2}{2M^2}(v'_1 - v'_2)^2 + \frac{m_1^2m_2}{2M^2}(v'_1 - v'_2)^2, \\
 &\quad \text{dalle Eq.i (21.1) e (21.2) (questa, due volte),} \\
 &= (1/2)Mv_{CM}'^2 + \frac{m_1m_2}{2M^2}(m_1 + m_2)(v'_1 - v'_2)^2 \\
 &= (1/2)Mv_{CM}'^2 + (1/2)\mu v_{12}'^2 \equiv K'_{CM} + K'_{12}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Si noti, dalle Eq.i (15.2) e (P3.4), l’invarianza *traslazionale* $\mathbf{v}_{CM} \equiv \mathbf{v}'_{CM}$, dalla quale, segue che

$$K'_{CM} = K_{CM} \equiv P^2/(2M) = P'^2/(2M). \quad (23)$$

Il risultato espresso dall’Eq. (22) è importante: esso stabilisce che

L’Energia (Cinetica) Totale del sistema collisionale di due corpi lisci – nell’uno o nell’altro ‘canale’ – è esprimibile come la somma dell’energia cinetica del CM (in cui, la massa totale si pensi concentrata) e dell’energia cinetica interna (o relativa) di un corpo virtuale nel ‘canale’ avente massa uguale alla massa ridotta dei due corpi.

□

Ora, poiché qualsiasi vettore, vs. la direzione di un versore specificato, è sempre scomponibile in un vettore *ortogonale* (o *trasverso*) e un vettore *parallelo* (o *longitudinale*), si possono riscrivere le Eq.i (4) e (5) riferite alla *direzione del versore di collisione* $\hat{\mathbf{n}}$ (cfr/vs. Fig. 1),

$$\mathbf{v}'_{12,\perp} \equiv \mathbf{v}_{12,\perp} \quad (\Rightarrow v_{12,\perp} \equiv v_{12,x} = v_{12,z}), \quad (24.1)$$

$$\mathbf{v}'_{12,\parallel} \equiv -\eta \mathbf{v}_{12,\parallel} \quad (\Rightarrow v_{12,\parallel} \equiv v_{12,y}). \quad (24.2)$$

Quindi, la *variazione di Energia Cinetica Totale* durante la collisione si calcola dalle Eq.i (26), (24.1), (24.2) e (23), sotto il vincolo di *trasversalità*, intrinseca all’Eq. (24.1):

$$\begin{aligned}
 \Delta K &\equiv K' - K = (\cancel{K'_{CM}} + (1/2)\mu v_{12}'^2) - (\cancel{K_{CM}} + (1/2)\mu v_{12}^2) \\
 &= (1/2)\mu (v_{12,\parallel}'^2 + \cancel{v_{12,\perp}'^2} - v_{12,\parallel}^2 - \cancel{v_{12,\perp}^2}) \\
 &\equiv -(1/2)(1 - \eta^2)\mu v_{12,\parallel}^2 \equiv -(1/2)(1 - \eta^2)\mu ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}})^2, \quad (25)
 \end{aligned}$$

indicando che la *sola* componente *longitudinale* – parallela alla normale $\hat{\mathbf{n}}$ di collisione – della velocità *relativa* determina ΔK . Pertanto, in una collisione *elastica* ($\eta = 1$), l’Energia (Cinetica) Totale *non* cambia: $\Delta K = 0$; altrimenti, se $\eta \in [0, 1)$, ne risulta una *perdita*, $\Delta K < 0$, causata dalla deformazioni dei corpi, da effetti dissipativi meccanici di natura vibratoria e/o termica per attrito e/o acustica, etc. .

□

Il \mathbf{Q} di reazione in una collisione binaria non-relativistica tra particelle

La variazione ΔK dell'Eq. (24) è stata ricavata in ambito *classico*, nel quale, mantenendo *isolato* il sistema dei due corpi *macroscopici* e volendo trascurare ogni altra interazione, elettromagnetica o, più sottilmente, *microscopica* di struttura *interna*, resta, come sola possibilità, la modificazione dell'Energia Cinetica per cercare di dare conto di effetti *macroscopici* insorgenti dalla collisione.

La *Teoria Newtoniana* non sembra poter offrire molto di più che introdurre il termine correttivo empirico η , di natura imprecisa, una sorta di 'scatola nera' sostanzialmente inaccessibile.

Il ricorso a raffinamenti *microscopici* dalla *Meccanica Statistica semi-classica* (BOLTZMANN) risulta certamente, in svariate circostanze, molto – e sufficientemente! – efficace; gli *escamotages* ad-hoc brillanti non si contano ma, alla lunga, i limiti *classico* e *quasi-classico* restano tali, anche senza invocare la Relatività e le Alte Energie ([†]).

□

In uno schema di analisi delle collisioni tra coppie *isolate* di *particelle* a energie 'basse', per le quali, l'interazione elettro-magnetica possa ritenersi trascurabile, sia per intensità che per ordine di grandezza, vs. altri tipi di interazione *interna* a *corta distanza* (*short-range*) (e.g., in collisioni atomiche o molecolari, in reazioni nucleari *dirette*, di *trasferimento* (*stripping* o *pick-up*), di *knock-out*, di *mono-fissione*, etc. ([¹⁸], ..., [²²])), i Principî di Conservazione fondamentali devono essere precisati e *contestualizzati* a livello *microscopico*: quello del *Momento Lineare Totale*,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (26)$$

e quello dell'*Energia Totale propria* del sistema, *isolato* ma *strutturato internamente*,

$$K_1 + K_2 + U_{12} = K'_1 + K'_2 + U'_{12}, \quad (27.1)$$

ovvero, in forma più compatta ($K \equiv K_1 + K_2$ e $K' \equiv K'_1 + K'_2$), scrivendo

$$K' = K - (U'_{12} - U_{12}). \quad (27.2)$$

Lo sfondo delle Eq.i (26) e (27.2) è *quantistico*: i termini nell'Eq. (27.2) rimandano all'*Equazione di SCHRÖDINGER* non-relativistica, dove, $U_{12} \equiv U(\mathbf{r}_{12})$ è l'*Energia Potenziale interattiva a due corpi*, molecolare (e.g., di LENNARD-JONES o di MORSE o di VAN DER WAALS, etc.) o nucleare (e.g., *ottica* à-la SAXON-WOODS o di *oscillatore armonico deformato* à-la NILSSON o di KISSLINGER, etc.).

Dall'Eq. (27.2), si definisce, nell'o-sistema di riferimento, in analogia completa con la variazione macroscopica ΔK dell'Eq. (25), il \mathbf{Q} (microscopico) di *reazione*, associabile direttamente a una *misura della variazione* ΔU_{12} di *Energia Potenziale interna di interazione*:

$$\mathbf{Q} := U_{12} - U'_{12} \equiv K' - K. \quad (28)$$

Introducendo l'espressione (28) di \mathbf{Q} nell'Eq. (27.2), si arriva alla forma *microscopica* del legame tra le energie cinetiche nei 'canali' attraverso *interazioni fondamentali* a 2-corpi,

$$K' = K + \mathbf{Q}. \quad (29)$$

ovvero, esplicitamente,

$$\frac{1}{2}m'_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m'_2v'^2_2 = \frac{1}{2}m_1v^2_1 + \frac{1}{2}m_2v^2_2 + \mathbf{Q}. \quad (29.1)$$

([†]) All'interessata(o), è presentata, nella seconda parte della *Bibliografia*, una lista – assolutamente personale – di testi avanzati (e, ormai, ... classici). Benché certi approcci 'fondamentali' presentati si rivelino, qui e là, superati, essi, comunque, potrebbero servire per *far pratica* di metodi matematici di utilità consolidata e corrente!

L'espressione (29.1) specifica che *anche le masse delle singole particelle possono cambiare con la reazione* ($m'_1 \neq m_1 \vee m'_2 \neq m_2 \vee m_1$).

Dall'Eq. (29), si nota che può essere $\mathbf{Q} \leq 0$, secondo che la collisione (reazione) sia *anelastica* (*endoergica*), *elastica* o *esoergica*, rispettivamente. Nelle reazioni *esoergiche* ($\mathbf{Q} > 0$), l'aumento di Energia Cinetica Totale ($K' > K$) avviene, ovviamente, a spese dell'Energia Interna interattiva. Ora, il problema è quello di determinare una forma sufficientemente generale e realistica di U_{12} , corretta debitamente da termini di *eccitazione dei livelli energetici interni*, di accoppiamento di *spin-orbita* e/o di *iso-spin* e termini *relativistici* di variazione di massa ([²⁰], [²¹], [²²]).

□

Nel CM-sistema di riferimento, le espressioni degli spostamenti generici delle particelle nei 'canali' di reazione sono dati dall'Eq. (16) ($\nu = 1, 2$),

$$\bar{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_{\text{CM}}, \quad (30.1)$$

$$\bar{\mathbf{r}}'_\nu = \mathbf{r}'_\nu - \mathbf{r}_{\text{CM}}. \quad (30.2)$$

Sottraendo tra loro membro-a-membro le Eq.i (30.1) e (30.2) con lo *stesso* valore di ν , si ottiene l'*invarianza* degli *spostamenti relativi* (o *interni*) nei 'canali' vs. i due sistemi di riferimento,

$$\mathbf{r}_{12} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2 \equiv \bar{\mathbf{r}}_{12}, \quad (31.1)$$

$$\mathbf{r}'_{12} \equiv \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 = \bar{\mathbf{r}}'_1 - \bar{\mathbf{r}}'_2 \equiv \bar{\mathbf{r}}'_{12}. \quad (31.2)$$

Allora, dalla definizione (28), segue pure l'*invarianza traslazionale* $O \rightleftharpoons \text{CM}$ di \mathbf{Q} , definita vs. le uguaglianze nei 'canali' per la funzione U ,

$$U_{12} = U(\mathbf{r}_{12}) \equiv U(\bar{\mathbf{r}}_{12}), \quad (32.1)$$

$$U'_{12} \equiv U(\mathbf{r}'_{12}) \equiv U(\bar{\mathbf{r}}'_{12}). \quad (32.2)$$

Pertanto, la rappresentazione dell'Eq. (29) nel CM-sistema di riferimento si determina facilmente ricordando che $\bar{\mathbf{p}}_1 = -\bar{\mathbf{p}}'_1$ e $\bar{\mathbf{p}}_2 = -\bar{\mathbf{p}}'_2$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2} \right) \bar{\mathbf{p}}_1'^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{\mathbf{p}}_1^2 + \mathbf{Q}, \quad (33.1)$$

i.e., sinteticamente,

$$\frac{\bar{\mathbf{p}}_1'^2}{2\mu'} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_1^2}{2\mu} + \mathbf{Q}. \quad (33.2)$$

□

Problema 5

Una particella-proiettile non-relativistica, con verso $\hat{\mathbf{x}}$ di incidenza e massa m_1 , colpisce una particella-bersaglio di massa m_2 , ferma nell'origine dell'L-sistema di riferimento.

I prodotti di reazione sono due particelle, in generale diverse, di masse m'_1 e m'_2 . Nel 'canale' di uscita, un rivelatore registra l'arrivo della particella di massa m'_1 a un angolo φ' vs. la direzione dell'asse X di incidenza.

Si verifichi che il \mathbf{Q} della reazione nell'L-sistema è calcolabile dalle sole grandezze dinamiche K_1 e K'_1 nella forma

$$\mathbf{Q} = (1/m'_2)(M'K'_1 + (m_1 - m'_2)K_1 - 2(m_1 m'_1 K_1 K'_1)^{1/2} \cos \varphi'). \quad (\text{P5.1})$$

Problema 6

Si determinino espressioni delle quantità di energia, ΔK_1 e ΔK_2 , cedute da due corpi *macroscopici lisci*, di masse m_1 e m_2 , durante una collisione non-relativistica con *coefficiente di restituzione* η .

Soluzione

Imitando il procedimento seguito per l'Eq. (25), si scrive:

$$\begin{aligned}
 \Delta K_1 &\equiv K'_1 - K_1 = \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 - v_1^2) \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2^2}{M^2} (v_{12}'^2 - v_{12}^2) + 2 \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}) \right), \quad \text{dall'Eq. (P4.3),} \\
 &= \frac{\mu^2}{2m_1} (v_{12}'^2 - v_{12}^2) + \mu \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}) \\
 &\equiv -\frac{\mu^2}{2m_1} (1 - \eta^2) v_{12,\parallel}^2 - (1 + \eta) \mu \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \mathbf{v}_{12,\parallel}.
 \end{aligned} \tag{P6.1}$$

Nello stesso modo, si calcola

$$\begin{aligned}
 \Delta K_2 &\equiv K'_2 - K_2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \\
 &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1^2}{M^2} (v_{12}'^2 - v_{12}^2) - 2 \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}) \right), \quad \text{dall'Eq. (P4.4),} \\
 &= \frac{\mu^2}{2m_2} (v_{12}'^2 - v_{12}^2) - \mu \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\mathbf{v}'_{12} - \mathbf{v}_{12}) \\
 &\equiv -\frac{\mu^2}{2m_2} (1 - \eta^2) v_{12,\parallel}^2 + (1 + \eta) \mu \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \mathbf{v}_{12,\parallel}.
 \end{aligned} \tag{P6.2}$$

I risultati (P6.1) e (P6.2) sono coerenti con l'Eq. (25) dell'Energia totale *dissipata* in alterazioni meccaniche dei corpi a causa della collisione. La verifica che $\Delta K \equiv \Delta K_1 + \Delta K_2$ è immediata.

□

Una collisione binaria tra particelle *non-relativistiche*, nella quale, le masse restino *invariate*, *non* implica, però, che sia elastica, i.e., che risulti $K' \equiv K$. Il valore del \mathcal{Q} della collisione (reazione) corrisponde, qui, con l'*opposto* del valore dell'*Energia di Eccitazione Interna*, $E^* (\equiv \Delta U_{12})$, del sistema totale di massa M . Tale evento è caratteristico dei processi di *cattura* e di *pre-equilibrio* (*deep inelastic scattering* e formazione *multi-step* del *nucleo composto*), di *fissione* nucleare, come pure nella *ricombinazione* dei livelli roto-vibrazionali molecolari, etc. .

Così, dalle Eq.i (P6.1) e (P6.2), *formalmente valide anche* microscopicamente, si ottiene

$$\mathcal{Q} = (1/2) \mu (v_{12}'^2 - v_{12}^2) := -E^*. \tag{34}$$

■

Il concetto di Sezione d'Urto classica

Nell'analisi dei processi *reali* di collisione\diffusione, l'insieme delle grandezze dinamiche *iniziali* – il canale di 'ingresso' – è sostanzialmente noto allo sperimentatore, che 'prepara' l'assetto del 'laboratorio' per la raccolta dei dati relativi al canale di 'uscita'. D'altra parte, tale canale consegue non in modo totalmente *deterministico* ma, piuttosto, *probabilistico*. Infatti, esso può dipendere dalla struttura interna dei sistemi collidenti, da loro instabilità accidentali e da processi dissipativi incontrollabili, dai modi di riconfigurazione delle energie e dei momenti interni, lineari e/o angolari, etc. . Queste aleatorietà sono causa di *stocasticità* più o meno manifeste ma intrinseche, alle quali, in 'uscita', corrisponde *non un solo angolo* ma una *distribuzione angolare* corrispondente ai valori possibili delle misure di *tutte* le grandezze fisiche significative. Tali caratteri di stocasticità tendono ad aumentare con il ridursi delle dimensioni caratteristiche medie dei sistemi collidenti fino al raggiungimento dell'indeterminazione *fondamentale* propria del regime *quantistico*.

La premessa porta necessariamente al concetto di **sezione d'urto**, deducibile dal modello classico di *particella* (nel senso di *corpuscolo newtoniano*), di dimensioni caratteristiche *finite* e *misurabili*, portatrice di massa e , possibilmente, di carica elettrica non-nulla. I risultati sono applicabili anche a particelle in regime semi-classico non-relativistico ([†]), purché ne siano specializzati sia il *tipo di interazione* che gli *ordini di grandezza dei parametri in gioco*. □

La Diffusione in un campo di forza centrale $\mathbf{F} = -(\kappa/r^2)\hat{\mathbf{r}}$, con $\kappa > 0$ ([‡])

Una particella di massa m , inizialmente lontanissima dalla sorgente m_0 di un campo di forza *centrale* $\mathbf{F} = -(\kappa/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ (coordinate *sferiche*), vi si *avvicina* lungo una direzione Z' parallela all'asse Z con velocità iniziale v_∞ . La sorgente, di massa m_0 , del campo di forza è *ferma* in F ; l'origine delle coordinate nel L-sistema di riferimento è posta in O ($\neq F$). La distanza b ($\equiv b_\infty$) tra Z e Z' è detta *parametro d'urto* (o *di collisione* o *di impatto*).

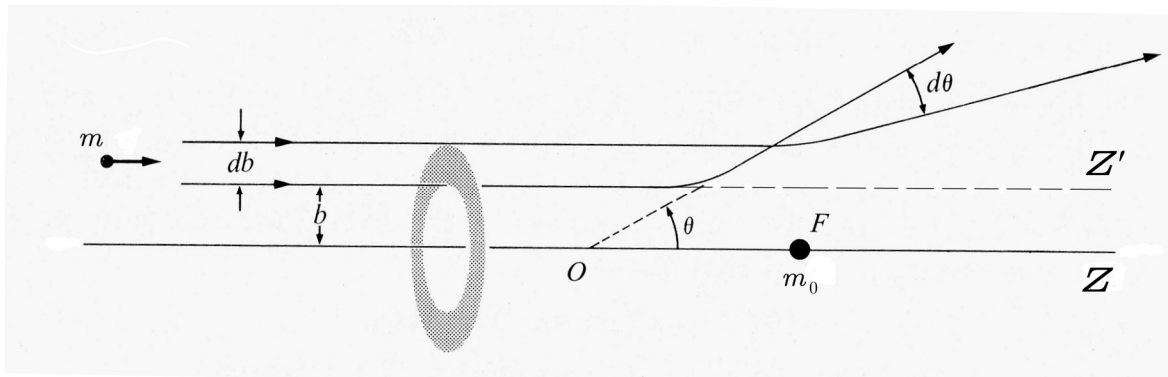


Fig. 2

Avvicinandosi la particella di massa m a O , il campo di forza, evanescente a 'grande distanza', ne *incurva* con continuità la traiettoria rettilinea iniziale. Affinché abbia luogo una *diffusione* e non una *cattura*, l'*Energia Meccanica* della particella deve mantenersi *positiva* ($E > 0 \iff K > U$) in entrambi i 'canali'. Tale condizione corrisponde a una traiettoria *iperbolica repulsiva*, Fig. 2, o *attraente*, vs. l'*altro fuoco* iperbolico, una volta prefissata la traiettoria (iperbolica).

A 'grande distanza' da O , dove, $\mathbf{v}_\infty = -v_\infty \hat{\mathbf{z}}$ ($v_\infty \geq 0$), il vettore-spostamento \mathbf{r} e la direzione della forza centrale $\mathbf{F}_\infty \equiv \mathbf{F}(r_\infty)$ formano un angolo di *incidenza* θ con l'asse Z . Sia μ la *massa ridotta*. La componente *algebrica* del Momento Angolare di μ – il quale, è \perp al piano $X \times Y$ – si scrive

$$L = r_\infty(\mu v_\infty) \sin \theta = \mu(r_\infty \sin \theta) v_\infty \equiv \mu b v_\infty \quad (35.1)$$

$$= \mu r v_\phi = \mu r^2 \omega = \mu r^2 (d\theta/dt). \quad (35.2)$$

Si noti che l'Eq. (35.2) è *generale*, quindi, essendo L *costante*, vale in *ogni* punto della traiettoria. Dall'uguaglianza tra gli ultimi membri a destra nelle Eq.i (35.1) e (35.2), si ottiene

$$r^2 = bv_\infty/\omega \equiv \frac{bv_\infty}{d\theta/dt} \quad (36)$$

($\omega v_\infty > 0$), che, sostituita nell'equazione generale del moto nella direzione Z ,

$$\mu \frac{dv_z}{dt} \equiv \|F\| \sin \theta = \frac{\kappa}{r^2} \sin \theta = \frac{\kappa}{bv_\infty} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad (37)$$

ne semplifica la forma in

$$dv_z = \frac{\kappa}{\mu bv_\infty} \sin \theta d\theta. \quad (38)$$

Le integrazioni nell'Eq. *separata* (38) vanno 'sincronizzate' vs. la traiettoria iperbolica *completa* nelle coordinate di 'ingresso', i.e., facendo corrispondere $v_z \in [0, v_\infty \sin \theta]$ con $\alpha \in [0, \pi - \theta]$:

$$\int_0^{v_\infty \sin \theta} dv_z = \int_0^{\pi - \theta} \sin \alpha d\alpha,$$

da cui, risulta $v_\infty \sin \theta = \frac{\kappa}{\mu bv_\infty} (-\cos \alpha)|_0^{\pi - \theta} = \frac{\kappa}{\mu bv_\infty} (1 + \cos \theta)$ e, quindi,

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \equiv \cot(\theta/2) = \frac{\mu bv_\infty^2}{\kappa} \quad (39)$$

o, anche, invertendo,

$$\theta = 2 \cot^{-1}(\mu bv_\infty^2/\kappa). \quad (39.1)$$

Infine, l'Eq. (39) consente di ricavare il *parametro d'urto* (in 'ingresso') dall'angolo di 'uscita':

$$b = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \cot(\theta/2) \equiv \frac{\kappa}{2\mu K_\infty} \cot(\theta/2). \quad (40)$$

Osservazione

Le costanti $\kappa \equiv Gmm_0$ e $\kappa \equiv |q_1 q_2|/(4\pi\epsilon_0)$ distinguono le interazioni *newtoniana* (*gravitazionale*) e *coulombiana* (*elettro-stazionaria*), formalmente identiche. La seconda rimanda all'esperienza di RUTHERFORD (ERNEST, 1871-1937), si veda il **Problema 7**. Comunque, nel caso di campi di forza di tipo diverso, *centrale o no*, la traiettoria di diffusione *non* è iperbolica, quindi, non c'è da attendersi che valga alcuna delle equazioni precedenti. D'altra parte, dall'Eq. (39), si può determinare, per un'orbita aperta stabile in un campo di forza *centrale qualsiasi*,

$$b = \frac{\rho^2}{|v_\infty|} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \equiv \left| \frac{\omega}{v_\infty} \right| \rho^2 \equiv \left| \frac{L}{\mu v_\infty} \right|. \quad (44.1)$$

La presenza di μ invece che di m manifesta il carattere interattivo a *2-corpi* anche nell'L-sistema di riferimento, dove m_0 appare *fermo*: l'interazione (*gravitazionale*) è avvertita dai corpi massivi *a qualsiasi distanza relativa*.

([†]) Un cenno sintetico alla *sezione d'urto microscopica*, nel contesto della *mobilità* delle particelle in un gas diluito (ideale), è contenuto nel phys-notebook: **Il Modello Statistico semi-classico del Gas Ideale**, p. 39.

([‡]) Si veda, e.g., il phys-notebook: **Modelli e problemi di Meccanica e Gravitazione Classiche**, doc. cit., p. 22-24. ■

La Sezione d'Urto Microscopica

La consistenza e l'efficacia del modello di diffusione delineato fin qui sono radicate, a loro volta, nel modello – da gran tempo un classico – dell'*atomo nucleare* di Rutherford [8,9,10]. Il suo utilizzo significativo, però, come s'è accennato all'inizio, va specializzato sia alla *natura* dell'interazione che agli *ordini di grandezza* dei parametri in gioco.

La Materia ordinaria si presenta come un ambiente a struttura *dinamica* (\equiv *interattiva*), per la maggior parte, *vuoto*. Aggregati di elettroni 'orbitanti' localizzati, più o meno popolati e sensibili all'*interazione chimica*, gli *atomi*, con dimensioni caratteristiche medie dell'ordine di 10^{-10} m (\equiv 1 \AA), causano deflessioni *coulombiane* diffuse *poco* apprezzabili o *nulle* con valori di b dello stesso ordine di grandezza e con energie incidenti 'basse' (\lesssim 80-100 MeV). Invece, quando le energie incidenti entrano nella fascia 'intermedia' (\gtrsim 100 MeV) e $b \approx 10^{-14}$ m, si osservano tali deflessioni distribuite su *intervalli angolari abbastanza ampi*: questo ha rivelato la presenza di portatori di carica, i *protoni*, all'interno di aggregati di elettroni 'orbitanti' (si ricordi che $1 \text{ eV} \approx 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Una quarantina d'anni dopo gli esperimenti di Rutherford, quelli di HOFSTADTER (ROBERT, 1915-1990), di diffusione elettronica a energie 'alte' (\approx 183 MeV), hanno determinato la misura del *raggio elettromagnetico medio* dei nuclei, $\langle r_{EM} \rangle \approx 1.2 A^{1/3} \cdot 10^{-15} \text{ m}$, dove $A \equiv Z + N$ è il *numero di massa* (i.e., il numero di nucleoni) del nuclide specifico.

Altri tipi di esperimenti, che pure forniscono informazioni circa il raggio del nucleo come *raggio medio efficace*, r_0 , del potenziale di 'modello ottico', inclusivo del termine di *spin-orbita* $U_{LS}(r)$ e costruito sul potenziale *attrattivo* 'fenomenologico' di Saxon-Woods, di *legame collettivo* tra i nucleoni, sono la *diffusione di neutroni veloci*, la misura della *vita media* dei nuclei radioattivi α -emettitori, l'analisi delle reazioni *dirette*, di *stripping*/*pick-up* e di *knock-out*. Oltre un trentennio di analisi statistica dei dati sperimentali, successivo agli esperimenti di Hofstadter, ha visto convergere il consenso sul valore centrale $r_0 \approx 1.47 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ (raggio di BUTLER-SALPETER), del tutto compatibile con il valore di $\langle r_{EM} \rangle$ e importante nel modello nucleare a 'goccia liquida'.

□

La Teoria degli Errori applicata nell'analisi statistica dei dati sperimentali precisa il concetto di *sezione d'urto microscopica* come *area efficace*, fornendo una misura della *probabilità intrinseca* di un evento di diffusione quando un fascio di particelle colpisce un bersaglio costituito, anch'esso, da un insieme *discreto* di particelle. In prima approssimazione, le particelle vengono assunte come corpi rigidi (*hard-spheres*). Il *tasso di accadimento* (in s^{-1}) di un evento dipende fortemente da variabili sperimentali quali l'*intensità del fascio* (quindi, dall'*energia* trasferita dalle particelle al 'bersaglio'), la *densità* del materiale che costituisce il 'bersaglio', l'area A della *sovrapposizione utile* tra il fascio e il 'bersaglio', etc. . Il controllo di questi aspetti, elementari ma cruciali, produce una misura *areale*, appunto, la *sezione d'urto microscopica* σ . Le particelle, diffuse dal 'bersaglio' in un angolo solido $d\Omega$ (in sr, *steradiani*), intorno alla direzione $(1; \theta; \varphi)$ sulla sfera unitaria, vengono raccolte e 'contate' da rivelatori mobili disposti su guide circolari nel piano di diffusione o sferiche, come nei laboratori di ricerca più avanzati.

□

Per un evento di diffusione, la sezione d'urto è esprimibile, *simbolicamente*, come

$$\sigma := \chi / \xi, \quad (41)$$

dove,

- χ è il *coefficiente di attenuazione* (in m^{-1}) del fascio nella penetrazione del 'bersaglio',
- ξ è la *concentrazione* (in m^{-3}) delle particelle del 'bersaglio'.

[Da qui in poi, con le *coordinate sferiche*, il piano $Z \times X$ è assunto come il *piano di diffusione*.]

Ora, più specificamente, si consideri il caso di eventi collisionali *discreti*, prodotti da un fascio cilindrico *stazionario* di particelle, tutte con velocità $v = v\hat{z}$ e distribuite con *concentrazione* n_V (in m^{-3}) *uniforme* nel fascio. Le particelle incidenti colpiscono il 'bersaglio' sulla superficie *utile* A nel *piano $X \times Y$ di collisione*, venendone, poi, diffuse a un angolo *polare* θ vs. \hat{z} (Fig. 3).

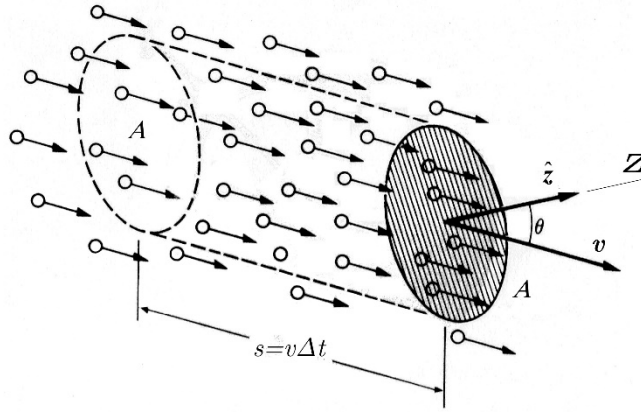


Fig. 3

Sia $s = v \Delta t$ lo spessore del 'bersaglio' e ξ la sua concentrazione particellare. Per N particelle che colpiscono la superficie A del 'bersaglio' nell'intervallo di tempo Δt , $Ns\xi A$ rappresenta il numero di centri attivi di diffusione. Il loro numero, sulla superficie dA di una corona circolare di raggio (interno) b e di larghezza db (Fig. 3), nel limite infinitesimo, è dato da

$$dN \equiv -Ns\xi dA = -Ns\xi(2\pi b db). \quad (42)$$

Il segno *negativo* nell'Eq. (42) indica che una variazione per collisione diffusiva del numero delle particelle del fascio costituisce una variazione *opposta* vs. il fascio *stazionario* iniziale.

Le particelle che passano attraverso una corona circolare di area $2\pi b db$ di una lamina, *sottilissima* per ridurre la *diffusione multipla*, vengono deflesse in un guscio differenziale *conico-circolare*,

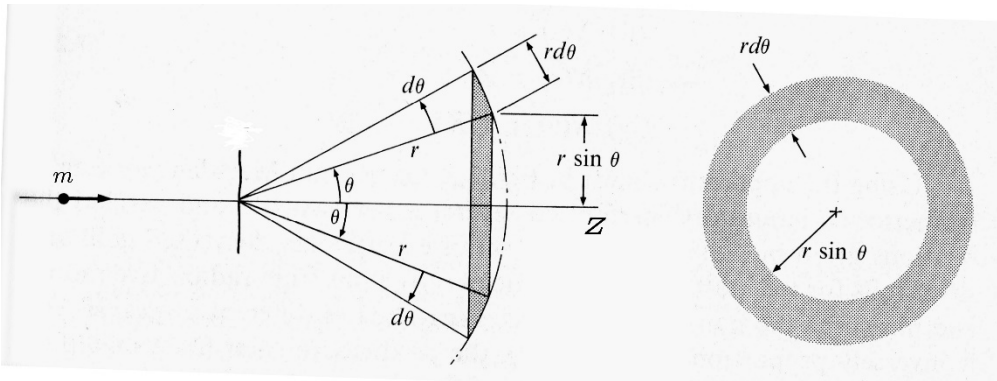


Fig. 4

la cui base, alla distanza r da un centro diffusore, ha area

$$(2\pi r \sin \theta)(rd\theta) = r^2(2\pi \sin \theta d\theta) \equiv r^2 d\Omega, \quad (43)$$

con $d\Omega$ l'ampiezza angolare del guscio, Fig. 4. Dalle Eq.i (42) e (43), segue che

$$\frac{dN}{d\Omega} = -\frac{Ns\xi(2\pi b db)}{(2\pi \sin \theta d\theta)} \equiv -Ns\xi \frac{b db}{\sin \theta d\theta},$$

ovvero, prendendo i valori assoluti,

$$\sigma := \frac{1}{Ns\xi} \left| \frac{dN}{d\Omega} \right| \equiv \left| \frac{b db}{\sin \theta d\theta} \right|, \quad (44)$$

in $\text{m}^2 \cdot \text{sr}^{-1}$. L'Eq. (44) fornisce una prima rappresentazione *calcolabile* non-relativistica, classica o semi-classica, sia della *sezione d'urto microscopica* sia, se σ è nota, del *parametro d'urto*. Alternativamente, osservato che il *flusso differenziale* delle particelle diffuse per unità di tempo dalla collisione con la superficie di area dA è, per definizione, in s^{-1} ,

$$d\Phi := n_v \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} dA \equiv n_v v dA \quad (45)$$

e che, se le particelle sono *portatori* di massa, m , o di carica elettrica, q (i.e., *barioni*), la *densità (volumica) di corrente* corrispondente è data da

$$\mathbf{j}_\eta := \eta n_v v \hat{\mathbf{z}}, \quad (46)$$

si può dare all'Eq. (45) una forma più specifica includente la *proprietà* η ($\equiv m$ o q) *trasportata*:

$$d\Phi_\eta := \eta n_v \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} dA \equiv \mathbf{j}_\eta \cdot \hat{\mathbf{z}} dA \equiv j_\eta dA. \quad (47)$$

È evidente che le Eq.i (45) e (47) *non hanno* le stesse dimensioni, essendo $[\Phi_\eta] = [\eta] \text{s}^{-1}$.

Con le Eq.i (42) e (47) si può, dunque, riscrivere l'Eq. (44) nella forma equivalente

$$\sigma = \frac{1}{Ns\xi} \left| \frac{dN}{d\Omega} \right| = \frac{1}{Ns\xi} \frac{Ns\xi |dA|}{|d\Omega|} = \left| \frac{dA}{d\Omega} \right| \equiv \left| \frac{\mathbf{j}_\eta \cdot \hat{\mathbf{z}} dA}{\mathbf{j}_\eta \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Omega} \right| = \frac{1}{j_\eta} \left| \frac{d\Phi_\eta}{d\Omega} \right|, \quad (48)$$

che mette in evidenza, il legame della sezione d'urto differenziale con la *densità di corrente* j_η delle particelle incidenti (in 'ingresso') e il loro *flusso di diffusione* (in 'uscita') per angolo solido.

La sezione d'urto *integrale* σ_{int} – spesso detta *totale* in modo improprio, data la concomitanza possibile di altri tipi di eventi – è calcolabile integrando σ sulla *sfera unitaria* $\{(1; \theta; \varphi)\}$:

$$\sigma_{\text{int}} = \oint_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta. \quad (49)$$

■

Problema 7 – La sezione d'urto di Rutherford (**L-sistema** di riferimento)

Un fascio stazionario di 'proiettili' di massa (a-riposo) m_1 e carica q_1 colpisce $Ns\xi A$ 'bersagli' (v. Eq. (42)) di massa (a-riposo) m_2 e carica q_2 . Sia μ la *massa ridotta* di una coppia 'proiettile-bersaglio' nell'L-sistema di riferimento (i.e., m_2 appare *inizialmente fermo* vs. l'osservatore).

In coordinate sferiche, si trovino, in funzione dell'angolo *polare* di diffusione θ nel *canale di ingresso*,

- la sezione d'urto microscopica coulombiana σ_C ;
- la distanza di *massimo* avvicinamento tra un 'proiettile' e un 'bersaglio' nei casi di diffusione coulombiane sia *repulsiva* ($q_1 q_2 > 0$) che *attrattiva* ($q_1 q_2 < 0$).

Soluzione

- Dall'Eq. (40), nella quale, sia $\kappa \equiv |q_1 q_2| / (4\pi\epsilon_0)$, si determinano, nel piano di diffusione $Z \times X$,

$$b_C = \frac{|q_1 q_2|}{(4\pi\epsilon_0)\mu v_\infty^2} \cot(\theta/2), \quad (P7.1)$$

$$db_C = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0\mu v_\infty^2} d(\cot(\theta/2)) = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0\mu v_\infty^2} \left(-\frac{1}{2} (\csc(\theta/2))^2 d\theta \right) = -\frac{|q_1 q_2|}{8\pi\epsilon_0\mu v_\infty^2} (\csc(\theta/2))^2 d\theta, \quad (P7.2)$$

che, sostituite nell'ultimo membro a destra dell'Eq. (44), danno l'espressione di σ_C (Rutherford):

$$\begin{aligned} \sigma_C &\equiv \left| \frac{b_c db_c}{2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) d\theta} \right| = \left(\frac{q_1 q_2}{8 \pi \epsilon_0 \mu v_\infty^2} \right)^2 (\csc(\theta/2))^4 \\ &\equiv \left(\frac{q_1 q_2}{16 \pi \epsilon_0 K_\infty} \right)^2 (\csc(\theta/2))^4. \end{aligned} \quad (P7.3)$$

L'energia cinetica di 'ingresso', $K_\infty \equiv (1/2) \mu v_\infty^2$, misurata a 'grande distanza' ($r \rightarrow +\infty$) dal 'bersaglio', coincide, per il Principio di Conservazione, con l'energia *totale* E (> 0) del 'proiettile' durante l'intero processo di diffusione. Inoltre, dal confronto tra le Eq.i (P7.2) e (42), conseguono, necessariamente, le variazioni *opposte* db_c e $-d\theta$.

- inizialmente, a 'grande distanza' dalla *particella-bersaglio*, di carica q_2 , la *particella-proiettile*, di carica q_1 , si muove con velocità costante v_∞ lungo una traiettoria *rettilenea*, ancora inalterata dall'interazione coulombiana, attrattiva o repulsiva. Si assuma che il proiettile e il bersaglio *non* risultino allineati nello stesso verso \hat{v}_∞ iniziale ma su traiettorie *parallele* distanti b_c – il *parametro d'urto* – così da escludere, per il momento, una collisione frontale, e che il bersaglio resti *stazionario* vs. l'osservatore. Inoltre, si supponga che, in entrambi i 'canali', il proiettile mantenga l'energia cinetica *maggiore* di quella potenziale. Pertanto, aumentando l'intensità dell'interazione durante l'avvicinamento, il proiettile q_1 , dalla Teoria ([‡]), viene deviato su un *ramo orbitale iperbolico* definitivamente stabile, subendo una deflessione totale uguale all'angolo θ tra gli asintoti. La traiettoria a 'grandi' distanze coincide con l'uno o l'altro *asintoto* dell'iperbole di diffusione; il portatore-bersaglio di carica q_2 rimane stazionario in F' (caso *repulsivo*) o in F (caso *attrattivo*) (Fig. 5).

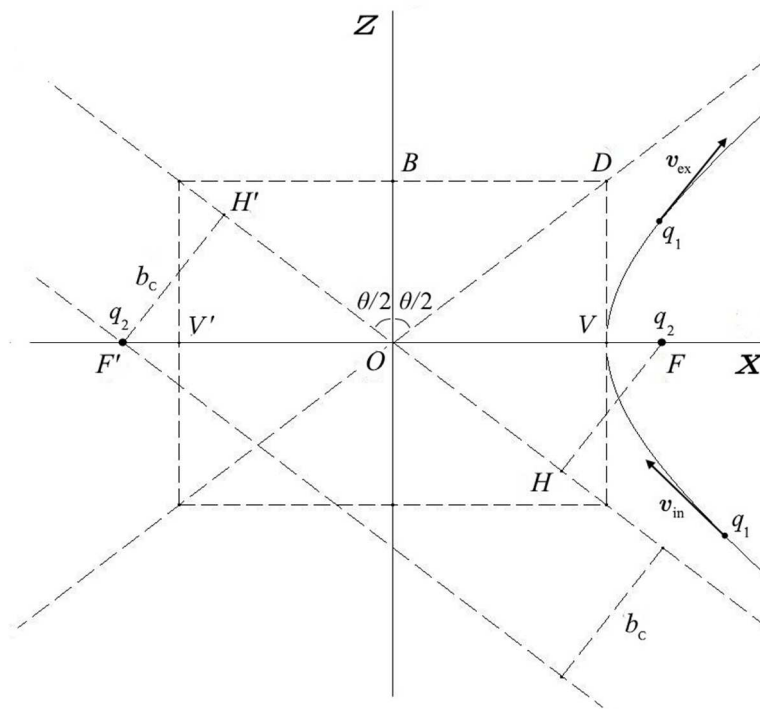


Fig. 5 – Geometria della diffusione coulombiana (Rutherford). Il 'bersaglio' L-stazionario (di carica q_2) è posto o in F (interazione *attrattiva*) o in F' (interazione *repulsiva*).

Il confronto con il modello geometrico iperbolico $\mathcal{H}: x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ mostra le congruenze triangolari

$$OH'F' \doteq OHF \doteq OVD, \text{ essendo } F'O \doteq OF \doteq OD \quad (\overline{OD} \equiv c \equiv (a^2 + b^2)^{1/2}).$$

Quindi, $b_c \equiv \overline{F'H'} = \overline{FH} = \overline{OB} = b$, i.e., il *parametro d'urto* coincide con il *semi-asse non-trasverso* della

traiettoria iperbolica (altrimenti rettilinea, in assenza di interazione). Inoltre, risultano

$$c = \overline{F'O} = \overline{F'H} \csc H\hat{F}'O = b_c \csc(\pi/2 - \theta/2) \equiv b_c \sec(\theta/2); \quad (\text{P7.4})$$

$$a = \overline{OV} = \overline{DV} \tan V\hat{D}O = b_c \tan(\theta/2); \quad (\text{P7.5})$$

$$\begin{aligned} \overline{F'V} &= \overline{F'O} + \overline{OV} \equiv c + a = b_c (\sec(\theta/2) + \tan(\theta/2)) = b_c \frac{1 + \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \\ &= b_c \frac{(1 + \sin(\theta/2))/\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)/\sin(\theta/2)} = b_c \frac{\csc(\theta/2) + 1}{\cot(\theta/2)} \quad \text{e, dall'Eq. (P7.1),} \\ &\equiv \frac{|q_1 q_2|}{(4\pi\epsilon_0)\mu v_\infty^2} (\csc(\theta/2) + 1) \quad (\text{P7.6}) \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{|q_1 q_2|}{2(4\pi\epsilon_0)K_\infty} (\csc(\theta/2) + 1) \equiv \frac{\mu|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 p_\infty^2} (\csc(\theta/2) + 1); \quad (\text{P7.6.1})$$

$$\begin{aligned} \overline{VF} &\equiv c - a = b_c (\sec(\theta/2) - \tan(\theta/2)) = \dots = b_c \frac{\csc(\theta/2) - 1}{\cot(\theta/2)}, \quad \text{come per il calcolo di } \overline{F'V}, \\ &\equiv \frac{|q_1 q_2|}{(4\pi\epsilon_0)\mu v_\infty^2} (\csc(\theta/2) - 1) \quad (\text{P7.7}) \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{|q_1 q_2|}{2(4\pi\epsilon_0)K_\infty} (\csc(\theta/2) - 1) \equiv \frac{\mu|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 p_\infty^2} (\csc(\theta/2) - 1). \quad (\text{P7.7.1})$$

È evidente che $\overline{F'V}$ e \overline{VF} rappresentano le distanze di *avvicinamento massimo*, rispettivamente, per i casi di diffusione coulombiana *repulsiva* e *attrattiva*. La traiettoria fisica è data dal *singolo* ramo iperbolico mostrato. Circa eventi possibili di *collisione frontale*, un'interazione *repulsiva* ($q_1 q_2 > 0$) implica un *rimbalzo* lungo la traiettoria incidente stessa, quindi, un angolo di deflessione $\theta = \pi$. Dall'Eq. (P7.6), risultano le espressioni dinamiche equivalenti (unità SI)

$$\overline{VF} = \frac{q_1 q_2}{(4\pi\epsilon_0)\mu v_\infty^2} \equiv \frac{q_1 q_2}{2(4\pi\epsilon_0)K_\infty} \equiv \frac{\mu q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 p_\infty^2}. \quad (\text{P7.8})$$

Nel caso di un'interazione *attrattiva* ($q_1 q_2 < 0$), non avviene deflessione ma *cattura elettrostatica*, al netto, comunque, di effetti *quantistici* (nucleari) repulsivi di *hard-core*, dominanti vs. l'energia *classica* trasferita.



Fig. 6 – Mercurio vs. il Sole
Immagine NASA dal Voyager 2 nelle fasi iniziali dell'effetto 'fionda' (*effetto Hohmann*) verso Urano (1986), Nettuno (1989) e i confini del Sistema Solare.

([‡]) Si veda, e.g. il phys-notebook: *Modelli e problemi di Meccanica e Gravitazione Classiche*, p. 20 & SEGG. .

La sezione d'urto di diffusione elastica quantistica non-relativistica

Negli esperimenti di diffusione nucleare non-relativistica, l'interazione dominante non è quella coulombiana ma quella nucleare *forte*, a corto raggio d'azione (*short range*).

Il fascio stazionario incidente di 'proiettili' *liberi*, di velocità $v = (\hbar k/m)\hat{z}$, è descrivibile con una funzione d'onda *piana collettiva*, viaggiante con verso \hat{z} , avente la forma

$$\Psi_{\text{in}}(z) = e^{ikz} \equiv e^{i(m/\hbar)vz}. \quad (50)$$

La componente scalare della *densità di corrente* (normalizzata) di n portatori di massa, incidenti *elasticamente* con verso \hat{z} sui bersagli, è data da

$$j_{\text{in}} = |\Psi_{\text{in}}(z)|^2 v \equiv v. \quad (51)$$

Nel canale di 'uscita', a distanze dai centri diffusori *molto maggiori* delle dimensioni tipiche dei 'bersagli', la funzione d'onda collettiva uscente, che si diffonde *equi-probabilisticamente* in tutte le direzioni, possiede un fronte approssimativamente *sferico-smorzato*, con forma asintotica

$$\Psi_{\text{ex}}(\mathbf{r}') \sim f(\theta', \varphi') e^{ik'r'}/r'. \quad (52)$$

Il parametro $f(\theta', \varphi')$, l'*ampiezza di reazione*, dipende dal momento angolare orbitale *relativo* 'proiettile-bersaglio', risultante dall'introduzione del potenziale nucleare *specifico* nell'equazione di Schrödinger collisionale, separabile in coordinate sferiche.

Dopo la collisione *elastica* ($v \equiv v'$), la densità di corrente nel canale di 'uscita',

$$\mathbf{j}_{\text{ex}} = |f(\theta', \varphi') e^{ik'r'}/r'|^2 v \hat{\mathbf{r}} = (|f(\theta', \varphi')|^2 v/r'^2) \hat{\mathbf{r}}, \quad (53)$$

azimutalmente simmetrica, corrisponde a un flusso differenziale attraverso $dA \equiv r'^2 d\Omega'$

$$d\Phi_{\text{ex}} = \mathbf{j}_{\text{ex}} \cdot \hat{\mathbf{r}} (r'^2 d\Omega') = |f(\theta', \varphi')|^2 v d\Omega'. \quad (54)$$

Quindi, dall'Eq. (48), risulta, per la diffusione *elastica* (se non lo è, la si può correggere, e.g., con l'*approssimazione in onde distorte di Born* (DWBA) più un termine di *spin-orbita* (v. [21], ..., [27]),

$$\sigma \equiv \frac{1}{j_{\text{in}}} \left| \frac{d\Phi_{\text{ex}}}{d\Omega'} \right| = \frac{|f(\theta', \varphi')|^2 v |d\Omega'|}{v |d\Omega'|} = |f(\theta', \varphi')|^2, \quad (55)$$

mentre, dall'Eq. (44), si può ricavare l'espressione

$$b = 2^{1/2} |f(\theta', \varphi')|, \quad (56)$$

Le Eq.i (55) e (56) costituiscono il punto di avvio di modelli *fenomenologici* sulla natura delle forze nucleari. Al loro sviluppo e impiego è corrisposta una stagione 'eroica' che ha aperto la strada a modelli più fondamentali di interazione tra *quarks* e *gluoni* ad 'alte energie'.

Osservazione

Per l'Eq. (51), vale la rappresentazione quantistica di *probabilità* di presenza, in un volume V , di N portatori di massa m (\iff onda collettiva $\Psi(\mathbf{r})$ di materia (DE BROGLIE (L.-V. P., 1892-1987))) che fluiscono con velocità uniforme v :

$$j_m = mn_v(v) \equiv (Nm/V)v \iff |\Psi(\mathbf{r})|^2 v,$$

ricordando che, essendo la probabilità (differenziale) $dP = |\Psi(\mathbf{r})|^2 dV$ una quantità adimensionale, ne segue, in unità del SI, che $[|\Psi(\mathbf{r})|] \equiv [V]^{-1/2}$, in $\text{m}^{-3/2}$.

■

Un'introduzione elementare al problema generale degli 'n-corpi'

Il modello del problema *dei 2-corpi* costituisce l'unico schema analitico noto risolvibile *esattamente* con l'introduzione di due vettori-spostamento *variabili e reciprocamente indipendenti*, \mathbf{r}_{CM} e $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$: le *coordinate di Jacobi* (J-coordinate). Da queste, l'operatore differenziale vettoriale (lineare) ∇ (*del*) è applicabile, con fattori di scala *unitari*, alle coordinate cartesiane *indipendenti* rispettive,

$$\nabla_{\text{CM}} \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x_{\text{CM}}} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y_{\text{CM}}} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z_{\text{CM}}} , \quad (57.1)$$

$$\nabla_{\alpha\beta} \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha\beta}} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z_{\alpha\beta}} \quad (57.2)$$

($x_{\text{CM}} = (m_\alpha x_\alpha + m_\beta x_\beta) / M$, $x_{\alpha\beta} = x_\alpha - x_\beta$, etc.), da cui, sono costruiti gli operatori rettangolari ($\nabla_{\text{CM}} \cdot$), ($\nabla_{\alpha\beta} \cdot$), ($\nabla_{\text{CM}} \times$), ($\nabla_{\alpha\beta} \times$), ∇_{CM}^2 e $\nabla_{\alpha\beta}^2$. È chiaro che il J-sistema di riferimento è *inerziale* poiché i versori cartesiani \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} sono *invarianti per traslazione*.

Un risultato molto importante che si determina con il passaggio al J-sistema nella risoluzione di equazioni differenziali *dinamiche* del 2° ordine è la *separabilità* delle J-variabili \mathbf{r}_{CM} e $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$. □

Il problema della dinamica *interna* a un sistema classico o semi-classico a n (≥ 3)-*corpi* (e.g., per strutture molecolari poliatomiche, reazioni chimiche, Meccanica astrofisica, etc.) pone, a tutt'oggi, difficoltà inestricabili sia concettuali sia di calcolo (tra l'altro, i contesti quantistico (e relativistico)

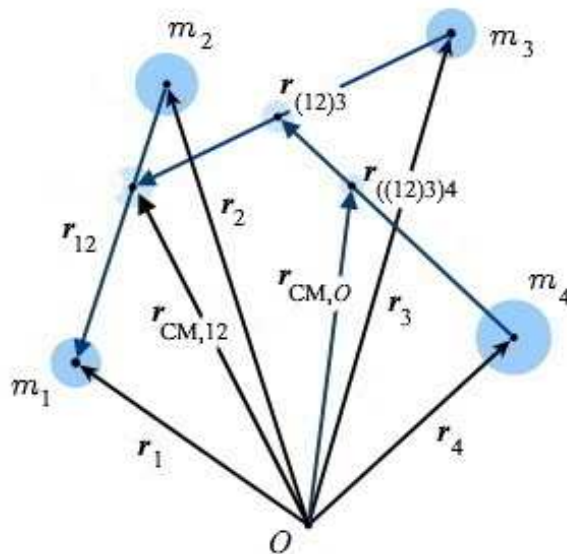


Fig. 6 – Il problema classico dei 4-corpi nello schema nidificato ((12)3)4

ricorrono a metodi basati da *creazione\annichilazione* di particelle (2^a *quantizzazione*) e dalle micro-statistiche *diverse*, alle quali, rispettivamente, *fermioni*, *bosoni* e *fotoni* sono soggetti).

Per aggirare gli ostacoli formali e standardizzare algoritmi agevolmente programmabili, si *tenta* di ridurre il problema *degli n-corpi* a una sequenza *ordinata* di $n - 1$ problemi *nidificati* dei 2-corpi.

Uno schema per la definizione di *set possibili* di J-coordinate prevede i passi seguenti:

1. si assegna un ordinamento – *giustificato fisicamente* – agli n corpi, $\{1, 2, \dots, n\}$;
2. si forma il sistema *legato* (12) e si *sottrae*, dalla coordinata del suo CM, $\mathbf{r}_{\text{CM},12}$, quella del corpo

di massa m_3 (J-coordinata *interna* relativa $\mathbf{r}_{(12)3} := \mathbf{r}_{\text{CM},12} - \mathbf{r}_3$);

3. si forma il sistema *legato* (123) e si *sottrae*, dalla coordinata del suo CM, $\mathbf{r}_{\text{CM},123}$, quella del corpo di massa m_4 (J-coordinata *interna* relativa $\mathbf{r}_{(123)4} := \mathbf{r}_{\text{CM},123} - \mathbf{r}_4$);

si procede fino all'($n - 2$)-esimo *abbinamento ordinato*, quindi,

4. si forma il sistema *legato* (12 ... $n - 1$) e si *sottrae*, dalla coordinata del suo CM, $\mathbf{r}_{\text{CM},12\dots n-1}$, quella del corpo di massa m_n (J-coordinata *interna* relativa $\mathbf{r}_{(123\dots n-1)n} := \mathbf{r}_{\text{CM},123\dots n-1} - \mathbf{r}_n$).

In questo modo, si determina *un set* di n possibili J-coordinate, *indipendenti e separabili*, espresse *completamente mediante le coordinate rettangolari dell'O-sistema di riferimento*,

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_{(12\dots v-1)v} = \left(M_{12\dots v-1}^{-1} \sum_{j=1}^{v-1} m_j \mathbf{r}_j \right) - \mathbf{r}_v, & (v \in \{3, 4, \dots, n\}) \\ \mathbf{r}_{\text{CM},12\dots n} = M_{12\dots n}^{-1} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j & (M_{12\dots k} \equiv M_{\text{CM},12\dots k}) \end{cases}, \quad (58)$$

La Fig. 6 mostra lo schema nidificato ((12)3)4 del sistema *a 4-corpi*.

La posizione di ogni CM è detta *nodo*. Le derivazioni temporali delle Eq.i (58) determinano *velocità e accelerazioni*; da queste, si ricavano *momenti lineari, angolari, forze, momenti di forza ed energie cinetiche*. In ogni caso, il problema della mancanza di modelli *fondamentali realistici* per le *Energie Potenziali interattive a 3-, e più-, corpi* (e.g., $U_{((12)3)4}$) resta inesorabilmente irrisolto.

□

Le coordinate di Jacobi per il problema classico e semi-classico dei '3-corpi'

L'applicazione dello schema (58) all'*analisi nodale* del moto *simultaneo* di tre corpi fornisce il set di tre J-coordinate – quello che incorpora il sistema *legato* (12) –

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_{(12)3} = M_{12}^{-1} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_3, \\ \mathbf{r}_{\text{CM},123} = M_{123}^{-1} \sum_{j=1}^3 m_j \mathbf{r}_j \end{cases}, \quad (59)$$

dove la massa totale, $M_{123} = \sum_{j=1}^3 m_j \equiv M_{\text{CM},123}$, è immaginata *contratta* nel suo CM.

La scrittura corretta dei *momenti lineari* associati alle velocità corrispondenti alle coordinate (59) richiede una precisazione essenziale: poiché l'O-sistema di riferimento è *assoluto*, questo conduce all'ipotesi che, nell'origine O , risieda una massa *puntiforme*, M_O , asintoticamente 'molto grande'.

Infatti, dalla definizione, e.g., di *massa ridotta* della coppia $\{m, M_O\}$, con $m \ll M_O$, risulta

$$\frac{mM_O}{m + M_O} \equiv \frac{m \cancel{M_O}}{\cancel{M_O} (1 + m/M_O)} \approx m,$$

i.e., M_O perde di *rilevanza* mentre m *ne acquista* da tale *rinormalizzazione* vs. M_O . Questa è una proprietà che si osserva per *qualsiasi* grandezza *finita* vs. *qualsiasi* sistema di riferimento *assoluto*. Dunque, essa vale per $\mathbf{r}_{\text{CM},123}$ – che è riferita all'O-sistema! – ma *non* per $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ né per $\mathbf{r}_{3(12)}$, riferite a masse *finita* – m_1 vs. m_2 e M_{12} vs. m_3 – durante i moti *interni* (relativi) rispettivi.

La forma classica (newtoniana) *corretta* del Momento Lineare *relativo* di due masse colloca la

massa ridotta di queste alla *distanza relativa* dall'una o l'altra massa scelta come sorgente e contratta nella sua O-posizione, considerata come *origine geometrica* nel moto binario interno (e.g., v. [1], Eq. (10-22)). Allora, il Momento Lineare *interno (relativo)* corrispondente a \mathbf{r}_{12} , possiede la forma simmetrica

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{12} &= \mu_{12} \mathbf{v}_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \equiv \frac{m_1 m_2}{M_{12}} \left(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2} \right) \\ &= \frac{1}{M_{12}} (m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2); \end{aligned} \quad (60)$$

analogamente, per $\mathbf{r}_{(12)3}$ (cf/c Eq. (14), P. 7), si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{(12)3} &= \mu_{(12)3} \mathbf{v}_{(12)3} = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{(m_1 + m_2) + m_3} (\mathbf{v}_{\text{CM},12} - \mathbf{v}_3) \equiv \frac{M_{12} m_3}{M_{123}} \left(\frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{M_{12}} - \frac{\mathbf{p}_3}{m_3} \right) \\ &\equiv \frac{1}{M_{123}} (m_3 \mathbf{P}_{12} - M_{12} \mathbf{p}_3). \end{aligned} \quad (61)$$

L'intera analisi si riapplica *formalmente* alla *coppia legata* $\{(12)3\}$ e, come s'è detto, è estendibile a n corpi in modo *nidificato*, con *loop-subroutines* incrementali semplici di $n - 2$ iterazioni. \square

La scrittura dei contributi all'*Energia Cinetica Totale* del sistema (isolato) dei 3-corpi è

$$K_{12} \equiv \frac{\mathbf{p}_{12}^2}{2\mu_{12}} = \frac{1}{2m_1 m_2 M_{12}} (m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2)^2, \quad (62)$$

$$K_{(12)3} \equiv \frac{\mathbf{p}_{(12)3}^2}{2\mu_{(12)3}} = \frac{1}{2m_3 M_{12} M_{123}} (m_3 \mathbf{P}_{12} - M_{12} \mathbf{p}_3)^2, \quad (63)$$

$$K_{\text{CM}} \equiv \frac{\mathbf{p}_{\text{CM}}^2}{2M_{\text{CM}}} \equiv \frac{\mathbf{P}_{123}^2}{2M_{123}} = \frac{1}{2M_{123}} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2. \quad (64)$$

Le Eq.i (61), ..., (64) sono *formalmente* generali: con le rappresentazioni *differenziali* espresse dagli operatori ∇ e ∇^2 , esse sono applicabili anche al regime *quantistico non-relativistico*.

Infine, i tre indici sono *ciclici*, potendo essere formate tre coppie *interne* legate diverse:

$$(12)3, \quad (31)2, \quad (23)1. \quad (65)$$

\square

Ora, il passo successivo potrebbe essere l'introduzione delle equazioni quantistiche di *Lippmann-Schwinger* e del loro adattamento al problema dei 3-corpi *non-relativistico* attraverso le Equazioni di *Faddeev* (v. [13], [14], [15], [18]).

Problema 8

8.1 Mediante le Eq.i generali (58), si ricavino dettagliatamente le estensioni analoghe delle Eq.i (61), (62), (63), (64) per i problemi *non-relativistici* dei 4- e dei 5-corpi;

8.2 da che cosa dipende la scelta dell'ordinamento degli n -corpi che corrisponda al modello fisico *più realistico*, secondo le Eq.i (58), della dinamica *collettiva*? In altri termini, le scelte possibili sono *equivalenti*? Si discuta la questione. \blacksquare

La disintegrazione spontanea non-relativistica a 3-corpi – Il diagramma di Dalitz

Altrove (e.g., v. il math-notebook: math-crumbs, P. 59), viene dimostrato in modo elementare, il **Teorema di Viviani**, che afferma la congruenza dell'altrezza di un triangolo *equilatero* con la somma delle distanze dai lati di un suo punto *qualsiasi*, interno o di frontiera (perimetro),

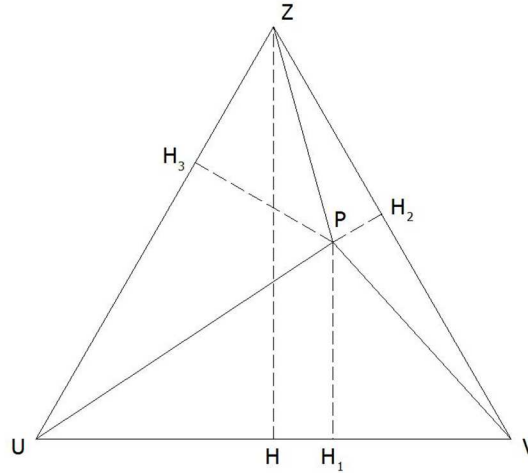


Fig. 7

i.e., nella Fig. 7, $ZH \doteq PH_1 + PH_2 + PH_3$, $\forall P \in UVZ$. La costruzione geometrica del teorema è applicabile nello *spazio degli stati* all'analisi di eventi di frammentazione *multipa* e *spontanea* sia non-relativistica che relativistica.

Come esempio semplice, si considerino, nel riferimento-L, gli istanti immediatamente precedenti un evento di frammentazione *spontanea* non-relativistica a 3-corpi di un sistema in uno *stato* P generico: una particella di massa M che si muove con moto rettilineo uniforme ed energia cinetica $K = (1/2)Mv^2 \equiv P^2/(2M)$ e che subisce una scissione *ternaria* istantanea a causa della rottura dell'equilibrio tra le forze *interne* di legame, e.g., molecolare o nucleare (\sim fissione); oppure, un corpo rigido classico che si disintegra *spontaneamente* in tre parti, etc. .

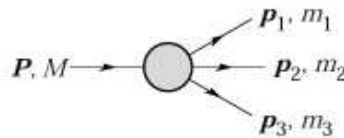


Fig. 8

Nella Fig. 8, la notazione è stata alleggerita dagli 'apici-post'; inoltre, si ha $M = m_1 + m_2 + m_3$ e, banalmente, $v \equiv v_{CM}$. Pertanto, nel riferimento-L, l'*invariante* di energia di frammentazione vale

$$\mathcal{Q} = (K_1 + K_2 + K_3) - K \equiv (p_1^2/(2m_1) + p_2^2/(2m_2) + p_3^2/(2m_3)) - P^2/(2M). \quad (66)$$

Il CM-sistema di riferimento appare subito più conveniente poiché $\bar{v} \equiv \bar{v}_{CM} = 0$ e, pertanto,

$$\mathcal{Q} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3 \equiv \bar{p}_1^2/(2m_1) + \bar{p}_2^2/(2m_2) + \bar{p}_3^2/(2m_3). \quad (67)$$

In generale, $\bar{K}_j \neq K_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$ (cf/c Eq. (33.2)).

Lo schema geometrico in Fig. 7, essendo puramente *logico*, è associabile a unità *arbitrarie* di misura, non-necessariamente di lunghezza. In tal senso, se le misure $\overline{PH}_1, \overline{PH}_2, \overline{PH}_3$, rispettivamente, sono fatte corrispondere ai valori $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$ delle energie cinetiche, da ciò, consegue che \overline{ZH} corrisponde, nel CM-sistema di riferimento, all'emissione \mathbf{Q} di energia nella frammentazione e, in assenza di interazioni significative tra i frammenti prodotti, alla conservazione dell'energia *totale* del *sistema isolato*, particella o corpo rigido, secondo l'Eq. (67).

D'altra parte, la Conservazione del Momento Lineare *totale* vettoriale vs. il riferimento-CM,

$$\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 + \bar{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{0}, \quad (68)$$

impone che la terna $\{\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3\}$ 'di uscita' costituisca un *triangolo vettoriale* (nello spazio delle fasi), ovvero, deve valere la *condizione triangolare* scalare, *equivalente* all'Eq. (68),

$$\|-\bar{\mathbf{p}}_3\| \leq \|\bar{\mathbf{p}}_1\| + \|\bar{\mathbf{p}}_2\|. \quad (69)$$

Però, la conoscenza, e.g., del solo $\bar{\mathbf{p}}_3$, lascia $\bar{\mathbf{p}}_1$ e $\bar{\mathbf{p}}_2$ *indeterminati*. Infatti, è necessario introdurre un principio di conservazione *ulteriore* (e.g., di Conservazione del Momento Angolare o quello di Spin) per poter disporre di un insieme *sufficiente* di equazioni dinamiche per un sistema a 3-corpi. Comunque, combinando l'Eq. (67) con la condizione (69), si può concludere che *il generico stato P deve anche (!) appartenere al cerchio inscritto nel triangolo equilatero UVZ* (Fig. 9).

Come verifica semplice, se fosse, e.g., $P \in (B', Z]$, il Principio di Conservazione dell'Energia sarebbe, sì, rispettato *ma non* quello di Conservazione del Momento Lineare!

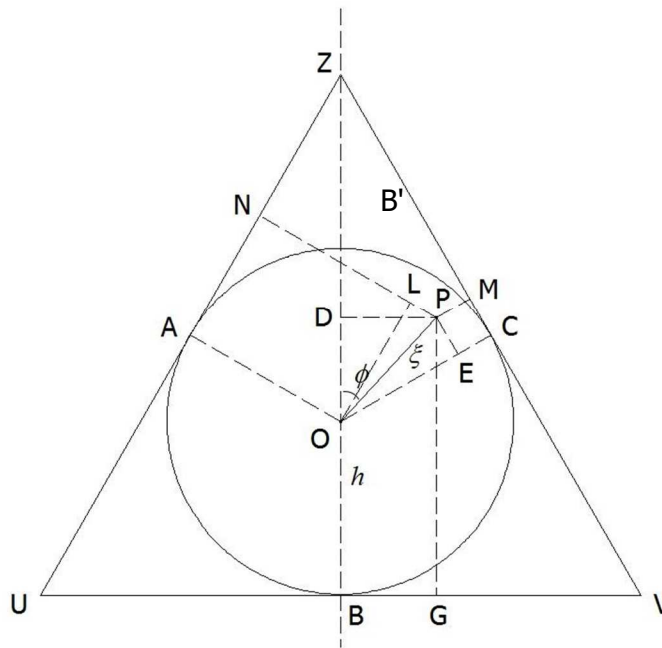


Fig. 9

Nella Fig. (6), è mostrato un esempio classico (o semi-classico) elementare di *diagramma di DALITZ* (RICHARD, 1925-2006). Lo schema del *Dalitz plot* si rivela fondamentale soprattutto nell'analisi del decadimento sub-nucleare ad *alte energie* riguardo alle predizioni e/o identificazioni di particelle (v. [27], [28], [29]). La *variabilità* delle masse relativistiche, però, tende a *deformare* inesorabilmente il cerchio di Conservazione del Momento Lineare Totale inscritto nel triangolo equilatero (ideale).

Problema 9

Dalla Fig. 6, si determini ‘graficamente’ una misura delle energie cinetiche nel canale di ‘uscita’ vs. il CM-sistema di riferimento.

Soluzione

Una determinazione ‘grafica’ delle *energie cinetiche* nel canale di ‘uscita’ può essere dedotta dai trapezi *rettangoli* $OBGP$, $OCMP$ e $OPNA$ nella Fig. 9. Si fissi uno qualsiasi dei tre quadrilateri (congruenti) che compongono il triangolo, e.g., $OCZA$, simmetrico vs. l’asse ZB . Sfruttando la corrispondenza biunivoca tra *congruenza geometrica* e *misura* (in unità *arbitrarie!*), si definiscano le misure

$$\begin{aligned}\overline{ZB} &:= h \text{ e, quindi, } \overline{OB} = h/3 \equiv \overline{OA} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{OB'} \equiv \overline{B'Z}, \\ \overline{OP} &:= \xi \in [0, h/3], \\ D\hat{O}P &:= \phi \in [0, \pi/3].\end{aligned}$$

- Per il trapezio rettangolo $OBGP$, risulta

$$\overline{PG} \equiv \overline{DB} = \overline{OB} + \overline{DO} = h/3 + \overline{OP} \cos \phi \equiv h/3 + \xi \cos \phi \Leftrightarrow \overline{K}_1; \quad (71)$$

- per il trapezio rettangolo $OCMP$, risulta

$$\begin{aligned}\overline{PM} &= \overline{OC} - \overline{OE} = h/3 - \xi \cos P\hat{O}E \equiv h/3 - \xi \cos(D\hat{O}E - D\hat{O}P) \\ &= h/3 - \xi \cos(\pi/3 - \phi) \equiv h/3 + \xi \cos(2\pi/3 + \phi) \Leftrightarrow \overline{K}_2;\end{aligned} \quad (72)$$

- per il trapezio rettangolo $OPNA$, risulta

$$O\hat{P}L = \pi - A\hat{O}P = \pi - (A\hat{O}D + D\hat{O}P) \equiv \pi - (\pi/3 + \phi) = 2\pi/3 - \phi.$$

Quindi,

$$\overline{PL} = \overline{OP} \cos O\hat{P}L = \xi \cos(2\pi/3 - \phi)$$

e, infine,

$$\overline{PN} = \overline{LN} + \overline{PL} \equiv \overline{OA} + \overline{PL} = h/3 + \xi \cos(2\pi/3 - \phi) \equiv h/3 - \xi \cos(\pi/3 + \phi) \Leftrightarrow \overline{K}_3. \quad (73)$$

Come verifica, $\forall \{\xi, \phi\} \in [0, h/3] \times [0, \pi/3]$ nel triangolo equilatero, il **Teorema di Viviani** è esprimibile con la congruenza *generale* $PG + PM + PN \doteq ZB$, i.e., in termini di misure, deve valere l’identità

$$\begin{aligned}(h/3 + \xi \cos \phi) + (h/3 + \xi \cos(2\pi/3 + \phi)) + (h/3 - \xi \cos(2\pi/3 - \phi)) &= \\ = h + \xi (\cos \phi + (\cos(2\pi/3) \cos \phi - \frac{\sin(2\pi/3) \sin \phi}{\downarrow}) + \downarrow & \\ + (\cos(2\pi/3) \cos \phi + \frac{\sin(2\pi/3) \sin \phi}{\downarrow})) & \\ = h + \xi (\cos \phi - \cos \phi) \equiv h \Leftrightarrow \mathbf{Q}, \quad \text{q. e. d. .} &\end{aligned}$$

■

Problema 10

Nel procedimento *concreto* di analisi delle reazioni di collisione tra particelle materiali libere attraverso l’emissione *angolare* e l’identificazione dei ‘prodotti’ nel ‘canale di uscita’ (i.e., nello studio dettagliato del \mathbf{Q} di reazione), la scelta più conveniente è quella di collocare il ‘bersaglio’ (*target*, T), sistema di particelle o di nuclei), nell’L-riferimento, dove, sostanzialmente, l’energia cinetica $K_T \approx 0$. Ragioni evidenti di aspettazione sperimentale impongono che la *massa*, il *momento lineare* e l’*energia cinetica* di ciascuna particella coinvolta nell’evento siano in forma *relativistica*. Infine, sia nota la *massa a-riposo* m_0 di ogni particella.

Ricordando l’espressione $\gamma := (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ del coefficiente di trasformazione lorentziana, si determini la relazione generale esistente tra la *norma* $\|\mathbf{p}_{\text{rel}}\| \equiv p_{\text{rel}}$ della parte puramente *spaziale* (3-vettore) del momento lineare di una particella e l’energia cinetica $K_{\text{rel}} \equiv m_0 c^2 (\gamma - 1)$ della stessa.

Soluzione

Invertendo γ vs. v ($\equiv \|v\|$), si trova

$$v = c \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2} \equiv \frac{c(\gamma^2 - 1)^{1/2}}{\gamma}. \quad (1)$$

Quindi, dalla norma relativistica (rel), puramente spaziale, $p_{\text{rel}} = m_0 v \gamma$ e dall'Eq. (1), si costruisce la forma pseudo-cinetica (che *non* corrisponde a K_{rel} , diversamente (!) da quanto avviene nel regime classico (clas)):

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{rel}}^2}{2m_0} &\equiv \frac{(m_0 v \gamma)^2}{2m_0} = \frac{m_0^2 \left(\frac{c^2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \right) \cancel{\gamma^2}}{2m_0} \\ &= \frac{m_0^2 c^4 (\gamma^2 - 1)}{2m_0 c^2} = \frac{(m_0 c^2 \gamma)^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \equiv \frac{(m_0 c^2 (\gamma - 1) + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \\ &= \frac{((m_0 c^2 (\gamma - 1))^2 + 2m_0^2 c^4 (\gamma - 1) + \cancel{m_0^2 c^4}) - \cancel{m_0^2 c^4}}{2m_0 c^2} \\ &= \frac{(m_0 c^2 (\gamma - 1))^2}{2m_0 c^2} + m_0 c^2 (\gamma - 1) \equiv \frac{K_{\text{rel}}^2}{2m_0 c^2} + K_{\text{rel}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dall'Eq. (2), segue il risultato *esatto* per entrambi i regimi, relativistico e non-relativistico,

$$p_{\text{rel}} = (2m_0 K_{\text{rel}} + K_{\text{rel}}^2 / c^2)^{1/2}. \quad (3)$$

Infatti, a energie cinetiche decrescenti, i.e., quando $v \ll c$, il valore del termine K_{rel}^2 / c^2 diventa sempre più 'piccolo' e, quindi, trascurabile, lasciando emergere il *limite classico* prevedibile, $p_{\text{rel}} \approx p_{\text{clas}} = 2m_0 K_{\text{clas}}$. ■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [3], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina Library di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html.

- [1] MARION, J. B. - HORNYAK, W. F., *PHYSICS for Science and Engineering*, PART **1**, CH. 9, SAUNDERS COLLEGE PUBLISHING (1982);
- [2] OHANIAN, H. C., *Physics*, 2ND ED. EXPANDED, CH. 11, W. W. NORTON & CO. (1989);
- [3] SERWAY, R. A., *Physics*, 2ND ED., VOL. **1**, CH. 9, SAUNDERS COLLEGE PUBLISHING (1987);
- [4] EISBERG, R. M. - LERNER, L. S., *PHYSICS, Foundations and Applications*, VOL. **1**, § 4.3 & 8.3, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1981);
- [5] GIANCOLI, D. C., *PHYSICS for Scientists and Engineers*, 4TH ED., PRT. **1**, CH. 9, PEARSON-PRENTICE-HALL (2009);
- [6] SYMON, K. R., *Mechanics*, 3RD ED., § 4.6 to 4.9, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1971);
- [7] MARION, J. B. - THORNTON, S. T., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5TH ED., § 8.6-7, BROOKS-COLE PUBL. CO. (2003);
- [8] ARTHUR, W. - FENSTER, S. K., *Mechanics*, CH.S 4 & 8, HOLT, RINEHART AND WINSTON, INC. (1969);
- [9] ALONSO, M. - FINN, E. J., *Fundamental University Physics*, VOL. **III**, CH. 7, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1976);
- [10] FETTER, A. L. - WALECKA, J. D., *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, CH. 1, § 5, DOVER (2003);
- [11] GOLDSTEIN, H. - POOLE, C. - SAKKO, J., *Classical Mechanics*, 3RD ED., ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (2002);
- [12] SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of Theoretical Mechanics*, CH. 8, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1967);
- [13] LANDAU, L. D. - LIFSHITZ, E. M., *Mechanics*, 3RD ED., CH. IV, PERGAMON PRESS (1976).

Teoria Quantistica della Diffusione (scattering nucleare e sub-nucleare)

- [14] JOACHAIN, C. J., *Quantum Collision Theory*, VOL.S **1** & **2**, NORTH-HOLLAND PUBL. CO. (1975);
- [15] SITENKO, A. G., *Lectures in Scattering Theory*, PERGAMON PRESS (1971);
- [16] DAVIDOV, A. S., *Quantum Mechanics*, 2ND ED., CH. XIV, PERGAMON PRESS (1976);
- [17] AMREIN, W. O. - JAUCH, J. M. - SINHA, K., B., *Scattering Theory in Quantum Mechanics*, W. A. BENJAMIN. INC. (1977);
- [18] NEWTON, R. G., *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2ND ED., SPRINGER-VERLAG (1982);
- [19] SAKURAI, J. J. - NAPOLITANO, J., *Modern Quantum Mechanics*, 2ND ED., CH. 7, Pearson (ADDISON-WESLEY) PUBL. CO. (2011);
- [20] GOTTFRIED, K., - YAN, T.-M., *Quantum Mechanics - Fundamentals*, 2ND ED., § 30.4, Springer-Verlag (2003).
- [21] ENGE, H. A., *Introduction to Nuclear Physics*, CH. 13, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (1966);
- [22] ROY, R. R. - NIGAM, B. P., *NUCLEAR PHYSICS - Theory and Experiment*, JOHN WILEY & SONS, INC. (1967);
- [23] JACKSON, D. F., *Nuclear Reactions*, CH.S 6, 7, 8, 9, 10, HALSTED PRESS-JOHN WILEY & SONS, INC. (1970);
- [24] AUSTERN, N., *Direct Nuclear Reaction Theories*, JOHN WILEY (1970);
- [25] GLENDENNING, N. K., *Direct Nuclear Reactions*, WORLD SCIENTIFIC PUBL. CO. PTE., LTD. (2004);
- [26] HODGSON, P. E., *Nuclear Reactions and Nuclear Structure*, OXFORD UN. PRESS (1971);
- [27] HORNYAK, W. F., *Nuclear Structure*, ACADEMIC PRESS, INC. (1975);
- [28] DE SHALIT, A. - FESHBACH, H., *Theoretical Nuclear Physics*, VOL. **2** (*Nuc. Reac.s*), JOHN WILEY & SONS (1992).
- [29] PERKINS, D. H., *Introduction to High Energy Physics*, 4TH ED., CAMBRIDGE UN. PRESS. (2000; REPR. 2001);
- [30] WILLIAMS, W. S. C., *An Introduction to Elementary Particles*, 2ND ED., ACADEMIC PRESS (1971);
- [31] LEON, M., *Particle Physics: An Introduction*, ACADEMIC PRESS (1973).

