

Rappresentazioni in serie di potenze delle

Funzioni di Bessel in \mathcal{R}

claudio magno

<https://www.cm-physmath.net/>

revisione
03 aprile 2024



Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

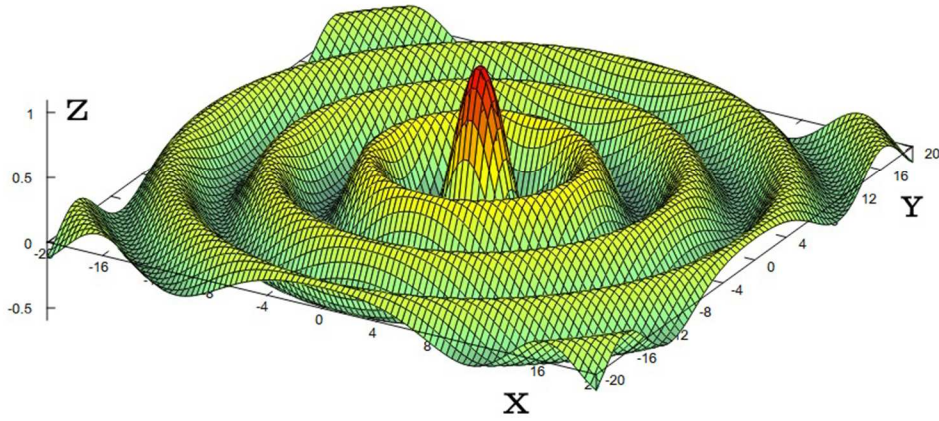


Fig. I-1 – Grafico della funzione $(x; y) \mapsto J_0(\rho) = z$ [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$] (GNUplot™ [19]).

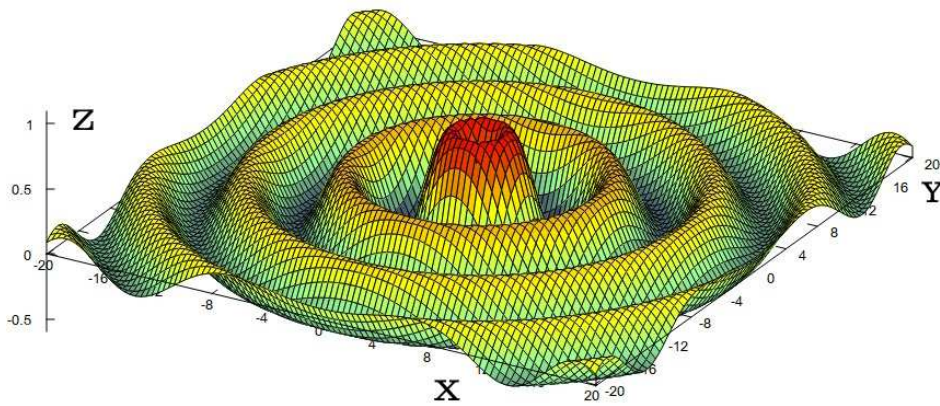


Fig. I-2 – Grafico della funzione $(x; y) \mapsto J_1(\rho) = z$ [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$].

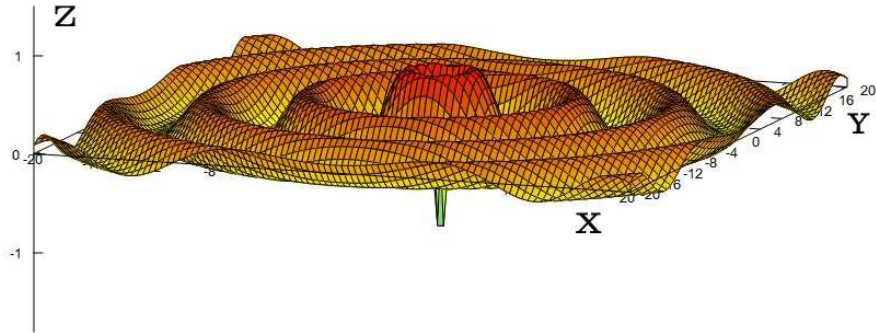


Fig. I-3 – Grafico della funzione $(x; y) \mapsto N_0(\rho) = z$ [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$].

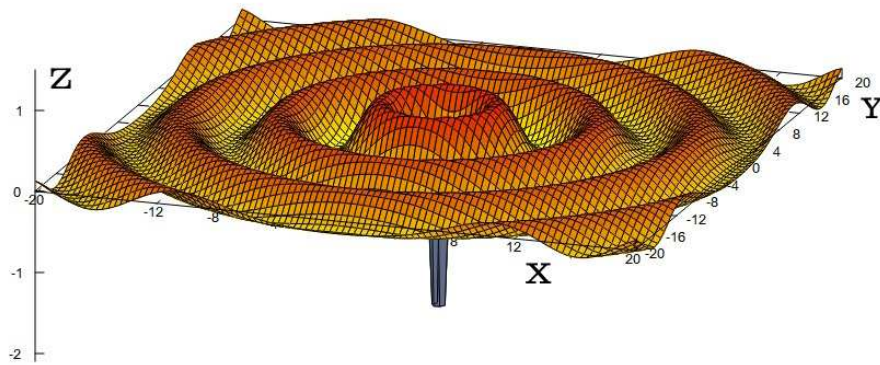


Fig. I-4 – Grafico della funzione $(x; y) \mapsto N_1(\rho) = z$ [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$].

INDICE

BACKGROUND INTRODUTTIVO	P. V
A. LE FUNZIONI DI BESSEL <i>ORDINARIE</i> DI 1° E DI 2° TIPO	P. 1
B. L'EQUAZIONE DI BESSEL NELLA FORMA <i>IPERGEOMETRICA CONFLUENTE</i>	P. 4
C. LE FUNZIONI DI BESSEL <i>IPERBOLICHE</i> DI 1° E DI 2° TIPO	P. 7
D. IDENTITÀ RICORSIVE GENERALI DELLE FUNZIONI J_ν , N_ν , I_ν E K_ν	P. 10
E. LE FUNZIONI DI BESSEL <i>SFERICO-ORDINARIE</i> DI 1° E DI 2° TIPO	P. 11
F. LE FUNZIONI DI BESSEL <i>SFERICO-IPERBOLICHE</i> DI 1° E DI 2° TIPO	P. 15
G. RIEPILOGO DELLE RAPPRESENTAZIONI IN SERIE REALI DELLE FUNZIONI DI BESSEL <i>ORDINARIE E IPERBOLICHE</i>	P. 19
H. RIEPILOGO DELLE RAPPRESENTAZIONI IN SERIE REALI DELLE FUNZIONI DI BESSEL <i>SFERICO-ORDINARIE E SFERICO-IPERBOLICHE</i>	P. 20
I. ORTOGONALITÀ DELLE FUNZIONI DI BESSEL	P. 21
J. APPROSSIMAZIONI DELLE FUNZIONI DI BESSEL	P. 22
J.1 IL SIMBOLO DI HANKEL	P. 22
J.2 L'APPROSSIMAZIONE ASINTOTICA PER $x \gg 1$	P. 23
J.3 IL LEMMA DI WATSON (FORMULAZIONE IN \mathbb{R})	P. 24
J.4 APPROSSIMAZIONI ASINTOTICHE IN REGIME INFINITESIMO ($0 < x \equiv o(1)$)	P. 28
K. RICETTE NUMERICHE ELEMENTARI PER LE FUNZIONI DI BESSEL	P. 29
L. DETERMINANTI WRONSKIANI DELLE EQUAZIONI CILINDRICHE	P. 30
PROBLEMA	P. 32
BIBLIOGRAFIA	P. 37

BACKGROUND INTRODUTTIVO

Le *Funzioni di Bessel* costituiscono un sotto-insieme della famiglia $\{C_\nu : \nu \in \mathbb{C}\}$, *continua* vs. ν , delle *Funzioni Cilindriche*, soluzioni dell'*Equazione di Bessel Ordinaria* (differenziale ordinaria del 2° ordine, omogenea, lineare), definita nell'insieme complesso $\{z \in \tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}\}$ ($z = 0$ è un punto di *singolarità regolare*, o *fuchsiana*, mentre $z = \infty$ è un punto di *singolarità essenziale*) da

$$\mathfrak{B}[\phi] \equiv z^2 \phi'' + z \phi' + (z^2 - \nu^2) \phi = 0, \quad (1)$$

con $z \mapsto \phi(z)$. Nel contesto dell'Analisi Operatoriale su una *varietà hilbertiana*,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &:= \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} \right) + \left(z - \frac{\nu^2}{z} \right) \equiv \left(1 \cdot \frac{d}{dz} + z \frac{d^2}{dz^2} \right) + \frac{1}{z} (z^2 - \nu^2) \\ &\equiv z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} + \frac{1}{z} (z^2 - \nu^2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

è un *operatore differenziale lineare* ^[15,3], di parametro (*continuo*) ν che specifica sia il *rango* dell'Eq. (1) che l'*ordine* delle soluzioni particolari di questa.

L'Eq. (1) – moltiplicata senza rischi per $z \neq 0$ vs. la definizione di \mathfrak{B} – si incontra nei modelli fenomenologici più disparati della Fisica Teorica (e.g., in Meccanica Analitica, in Astrofisica, in Elettrodinamica Classica e Quantistica), dell'Ingegneria (e.g., nella Teoria delle Comunicazioni Radar, attraverso la *Funzione-Q di Marcum*), nella Teoria dei Numeri, nella Teoria della *Trasformata di Fourier* (Analisi Armonica), in Statistica e Probabilità e, soprattutto, nella *separazione delle variabili* in certi modelli propagativi lineari a derivate parziali (Equazioni di *Laplace* e di *von Helmholtz*) condizionati 'alla frontiera' (*boundary-value problems*) e a *simmetria cilindrica*.

Per gli scopi espressamente introduttivi di questo math-notebook, non sembra opportuno iniziare dall'Eq. (1), definita in $\tilde{\mathbb{C}}$, come base della discussione. Benché questo approccio sia quello fondamentale, la restrizione a \mathbb{R} ^[17,1],

$$\mathfrak{B}[y] \equiv x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (2)$$

sarà considerata come il modello differenziale di riferimento, assumendo che $\{x, y(x), \nu\} \in \mathbb{R}$. Il rango ν dell'Eq. (2) e delle sue soluzioni (*cilindriche*) è detto solitamente (forse, in modo poco appropriato) *ordine*. Infatti, ν non va confuso con l'ordine di un'equazione differenziale, i.e., con quello della derivata superiore in una tale equazione.

Riguardo a fonti autorevoli sulla Teoria delle *Funzioni di Bessel*, si consulti la **Bibliografia** (v. [1], [2], [3], [4]). Vale la pena di ricordare, comunque, che lo studio sistematico di tali funzioni, dopo i primi riferimenti occasionali sulla loro esistenza (J. F. Riccati, Johann Bernoulli, L. Euler), fu iniziato da F. W. Bessel intorno al 1824, in relazione con il problema delle perturbazioni orbitali nei moti planetari. □

L'integrale generale dell'Eq. (2) si costruisce, al solito, combinando linearmente due suoi qualsiasi integrali particolari reciprocamente indipendenti. Se $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, allora, gli integrali *Ordinari di 1° tipo*, $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$, risultano linearmente *indipendenti* tra loro. Invece, l'indipendenza lineare viene meno se $\nu \equiv n \in \mathbb{Z}$, così che la soluzione cilindrica standard associata a $J_n(x)$ e linearmente indipendente da questa è deducibile, come limite vs. ν (forma indeterminata $\infty - \infty$), dalla *Funzione di Bessel Ordinaria di 2° tipo* (o *Funzione di Neumann*)

$$N_\nu(x) := (\cot \nu \pi) J_\nu(x) - (\csc \nu \pi) J_{-\nu}(x). \quad (3)$$

Però, si dimostra, diversamente da $J_\nu(x)$, che $N_\nu(x) \in \mathbb{R}$ solo se $x \in \mathbb{R}^+$, coerentemente con la presenza di un termine logaritmico nella rappresentazione di $N_n(x)$ come serie *analitica* in $[\varepsilon, +\infty)$ e, in modo specifico, come serie *generalmente* di potenze in $[\varepsilon, +\infty)$, con $\varepsilon = o(1)$.

La coppia $\{J_\nu(x), N_\nu(x)\} \subset \mathbb{R}$ è riconosciuta, $\forall \nu \in \mathbb{R}$, come il *sistema fondamentale* standard di soluzioni linearmente indipendenti dell'Eq. omogenea (2); precisamente, il determinante *wronskiano* $W(x)$ di tale coppia vale $2/(\pi x)$ (v. [1], [2], [3], [4], [7]). D'altra parte, anche mediante la coppia di *Funzioni di Bessel di 3° tipo* (*Funzioni Cilindriche di Hankel*) di rango ν , $\{H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)\}$, *coniugate* tra loro (in questo math-notebook, la *coniugazione complessa* viene indicata con l'apice-asterisco *) e definite dalle combinazioni

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) := J_\nu(x) + iN_\nu(x) \equiv (H_\nu^{(2)}(x))^* \\ H_\nu^{(2)}(x) := J_\nu(x) - iN_\nu(x) \equiv (H_\nu^{(1)}(x))^* \end{cases}, \quad (4)$$

si costruisce, evidentemente, l'integrale generale dell'Eq. (2) (il loro wronskiano vale $-4i/(\pi x)$).

A prima vista, la coppia (4) di soluzioni appare superflua; d'altra parte, in molti problemi fisici (di radiazione elettromagnetica, di diffusione gassosa, di scattering di particelle, di propagazione generica calcolata a distanze da una sorgente per le quali sia necessario il confronto con le lunghezze d'onda in gioco), è conveniente disporre di *entrambi* i sistemi fondamentali $\{J_\nu, N_\nu\}$ e $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$: circa il primo, perché $\{J_\nu(x), N_\nu(x)\} \subset \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R}^+$ e $\nu \in \mathbb{R}$; per il secondo, perché $H_\nu^{(1)}(x)$ e $H_\nu^{(2)}(x)$, fornendo valori esponenzialmente piccoli per $x \rightarrow +\infty$, si adattano meglio a rappresentare soluzioni (e.g., fisiche) nel regime asintotico $x \gg 1$, dove, in generale, risultano coinvolti parametri dispersivi *complessi*.

Nelle stime quantitative, può essere di importanza decisiva disporre di sistemi fondamentali di soluzioni *soddisfacenti numericamente*. Per dare un'idea del problema, $\{e^x, e^{-x}\}$ costituisce una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $y'' + y = 0$, come pure risulta esserlo la coppia $\{\cosh x, \sinh x\}$. Con questa, però, si verificano cancellazioni numeriche *troppo drastiche*, e.g., quando sia richiesta una stima di $e^{-x} \equiv \cosh x - \sinh x$ per $1 \ll x$, mentre, le coppie 'miste' $\{J_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x)\}$ e $\{J_\nu(x), H_\nu^{(2)}(x)\}$, rispettivamente, con $W(x) = 2i/(\pi x)$ e $-2i/(\pi x)$, forniscono, per $0 < x \ll 1$, soluzioni generali più stabili e rapidamente convergenti, quindi, meglio controllabili e numericamente *smooth* nei problemi 'di frontiera'. La scelta della prima o dell'altra coppia si trova *dipendere dal segno* della *parte immaginaria* della soluzione particolare ottenuta, come conseguenza prevedibile dell'effetto dei segni dei parametri complessi presenti (e.g., di dispersione ottica per distanze *intermedie* (o *di Fresnel*) o *grandi* in un mezzo elettromagnetico trasparente o, in un solido dielettrico, di dispersione deterministica à-la *Kramers-Kronig*).

Un passo ulteriore è costituito dalle *Funzioni di Bessel* di argomento *immaginario*, $\pm ix$, note come *Iperboliche* (o *Modificate*), di 1° e di 2° tipo, I_ν e K_ν , la prima *regolare* e l'altra *irregolare*. Queste risultano soluzioni particolari dell'equazione differenziale del 2° ordine (ordinaria, omogenea e lineare)

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0, \quad (5)$$

dove, analogamente che per J_ν e per N_ν , si assume $x \in \mathbb{R}$, per $I_\nu(x)$; $x \in \mathbb{R}^+$ in $K_\nu(x)$ e $\nu \in \mathbb{R}$, per entrambe le funzioni. La coppia $\{I_\nu(x), K_\nu(x)\} \subset \mathbb{R}$ costituisce il sistema standard fondamentale di soluzioni linearmente indipendenti per l'Eq. (5); infatti, si trova che $W(x) = -1/x$.

Infine, la definizione convenzionale di $K_\nu(x)$ – in forma di limite per $\nu \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ – è data dalla *rappresentazione di Macdonald* (c/f/c definizione (3) di $N_\nu(x)$),

$$K_\nu(x) := (\pi/2) (\csc \nu\pi) (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)). \quad (6)$$

□

Il rango $\nu = \pm(m+1/2)$, dove è $m \in \mathbb{Z}_0^+$ ($:= \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$), corrisponde alle cosiddette *Funzioni di Bessel Sferiche*, *Ordinarie* e *Iperboliche*: $j_m, n_m, h_m^{(1)}, h_m^{(2)}$ e i_m, k_m . Quando siano considerate come funzioni *quasi-cilindriche* dello stesso tipo, 1° o 2° tipo, la loro forma *sintetica* generale comune è

$$c_m(x) := \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} C_{m+1/2}(x). \quad (7)$$

Esse soddisfano, rispettivamente, in analogia con le Eq.i (2) e (5), le equazioni differenziali (*non* di Bessel ma riducibili a quella di *Bessel* mediante la trasformazione di funzione incognita $u(x) \mapsto (\pi/(2x))^{1/2} y(x)$),

$$x^2 u'' + 2xu' + (x^2 - m(m+1))u = 0, \quad (8)$$

$$x^2 u'' + 2xu' - (x^2 + m(m+1))u = 0. \quad (9)$$

Tutte – e *sole* – le *Funzioni di Bessel Sferiche*, sia *Ordinarie* che *Iperboliche* sono esprimibili in *forma chiusa*, in termini di combinazioni di funzioni elementari (-potenze, goniometriche ed esponenziali), come mostrato più avanti. Esse ricorrono nel trattamento della propagazione ondulatoria *sferico-simmetrica*, sia *stazionaria* che *viaggiante* (*travelling*).

Osservazione 1

Dall'identità di derivazione composta 'a catena'

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(\alpha x)} \frac{d(\alpha x)}{dx} = \alpha \frac{dy(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\alpha x},$$

si ricavano le formule

$$\frac{dy}{d(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{dx} \equiv \frac{1}{\alpha} y'(x) \quad \text{e} \quad \frac{d^2 y}{d^2(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 y}{dx^2} \equiv \frac{1}{\alpha^2} y''(x).$$

Pertanto, l'omotetia $x \mapsto \alpha x$, con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, estende le Eq.i differenziali (2) e (5) alle forme rispettive

$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (10)$$

$$x^2 y'' + xy' - (\alpha^2 x^2 + \nu^2) y = 0, \quad (11)$$

dove, si noti bene (!), è $y \equiv y(x)$. Le loro soluzioni particolari (Cilindriche generalizzate, Ordinarie e Iperboliche) sono, quindi, del tipo (si noti la *diversità tra gli argomenti* delle funzioni nei due membri)

$$y(x) \equiv C_\nu(\alpha x). \quad (12)$$

Tale caratterizzazione si applica, in modo identico, alle Eq.i (8) e (9) delle *Equazioni di Bessel Sferiche* (Ordinarie e Iperboliche) e alle loro soluzioni. Queste risulteranno della forma (cf/c Eq. (7))

$$c_m(x) := \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} C_{m+1/2}(\alpha x). \quad (13)$$

La discussione che segue sarà riferita prevalentemente all'argomento $x \in \mathbb{R}$ ma l'esecuzione dell'omotetia $x \mapsto \alpha x$ non dovrebbe creare problemi circa la scrittura delle relazioni omotetiche corrispondenti. ■

Con il pensiero rivolto anche alle applicazioni *numeriche*, le varie *Funzioni di Bessel* sono discusse, in questo math-notebook, *solo* nelle rispettive rappresentazioni classiche in *serie di potenze reali*. Circa le loro rappresentazioni *integrali di bordo* (*contour integrals*) in \mathbb{C} , fondamentali per l'analisi teorica e fonti immediate – quando non esclusive! – di risultati importanti, si consultino [1], [2], [3], [4], [5], [6] nella **Bibliografia finale**.

**Rappresentazioni in serie di potenze in \mathbb{R} delle
FUNZIONI di BESSEL**

A. Le Funzioni di Bessel *Ordinarie* di 1° e di 2° tipo

Si assuma che sia, al più, $\{x, \nu\} \in \mathbb{R}^2$.

Si può determinare un integrale particolare dell'Eq. (2) con il *metodo di Frobenius* (v. [3], [4], [9], [10], [17.1]), ottenendo la cosiddetta *Funzione di Bessel Ordinaria* di 1° tipo, rango ν e argomento x (e.g., v. [1], [2], [3], [4], [6], [7]), generatrice di **tutti** gli altri tipi di *Funzioni di Bessel*,

$$x \mapsto J_\nu(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k + \nu + 1)} x^{2k}. \quad (14)$$

Convenzionalmente, come già indicato dall'Eq. (3), un secondo integrale *linearmente indipendente* da $J_\nu(x)$, $\forall \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, viene costruito mediante $J_\nu(x)$ nella forma di WEBER (H. M., 1842-1913)-SCHLÄFLI (L., 1814-1895)

$$x \mapsto N_\nu(x) := (\cot(\nu\pi))J_\nu(x) - (\csc(\nu\pi))J_{-\nu}(x). \quad (15)$$

A sua volta, la struttura dell'espressione $x \mapsto N_\nu(x)$, nota come la *Funzione di Bessel Ordinaria* di 2° tipo, di rango $\nu \notin \mathbb{Z}$ e di argomento x , implica che $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono *linearmente indipendenti* tra loro.

Invece, per quanto riguarda le *Funzioni di Bessel Ordinarie* di 2° tipo e di ordine $n \in \mathbb{Z}_0^+$, è opportuno premettere i dettagli delle espressioni esplicite del simbolo

$$\sigma_{k,n} := \psi(k+1) + \psi(k+n+1), \quad (16)$$

dove, è anche $k \in \mathbb{Z}_0^+$ e ψ è la *Funzione Digamma*, i.e., la funzione *derivata logaritmica* della *Funzione Γ* . Dalle uguaglianze (e.g., v. [17.2], CAP. 4, Eq.i (63), (65.1), e CAP. 5, **Esercizio 17.1**,

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(k+1) = -\gamma + \sum_{p=1}^k 1/p, \quad (17.1)$$

allora, $\forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}^+$, risulta

$$\psi(k+n+1) = -\gamma + \sum_{p=1}^{k+n} 1/p \equiv -\gamma + \sum_{p=1}^k 1/p + \sum_{p=1}^n 1/(k+p) \quad (17.2)$$

e, quindi, l'Eq. (16) assume l'espressione algebrica

$$\sigma_{k,n} = -2\gamma + 2 \sum_{p=1}^k 1/p + \sum_{p=1}^n 1/(k+p). \quad (18.1)$$

I casi particolari delle tre coppie parametriche $\{k, n\} \equiv \{0, 0\}$, $\{k, 0\}_{k \geq 1}$ e $\{0, n\}_{n \geq 1}$ non sono, però, deducibili formalmente dall'Eq. (18.1). Essi vanno esaminati singolarmente, a partire dalla definizione generale (16) e dalle uguaglianze (17.1). Si trova che

$$\bullet \quad \sigma_{0,0} \equiv \psi(1) + \psi(1) = -2\gamma, \quad (18.2)$$

$$\bullet \quad \sigma_{k \geq 1, 0} \equiv \psi(k+1) + \psi(k+1) = -2\gamma + 2 \sum_{p=1}^k 1/p, \quad (18.3)$$

$$\bullet \quad \sigma_{0, n \geq 1} \equiv \psi(1) + \psi(n+1) = -2\gamma + \sum_{p=1}^n 1/p. \quad (18.4)$$

Ora, la Teoria (v. [2], [3], [4]) dà l'espansione di HANKEL (H., 1839-1873), $\forall \{n, x\} \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{R}^+$,

$$N_n(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left(2J_n(x) \ln(x/2) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sigma_{k,n}}{2^{2k+n} k!(k+n)!} x^{2k+n} - \right. \\ \left. - (1 - \delta_{n,0}) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j-1)!}{2^{2j-n} j!} x^{2j-n} \right). \quad (19)$$

Nell'Eq. (19), il fattore di switch $(1 - \delta_{n,0}) \equiv 0 \vee 1$ 'scatta' secondo che sia $n = 0$ o $n \in \mathbb{Z}^+$.

Quindi, tenendo conto delle Eq.i (18.2), (18.3), (18.4) e (18.1), si scrivono

$$N_0(x) = \frac{1}{\pi} \left(2J_0(x) \ln(x/2) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sigma_{k,0}}{(2^k k!)^2} x^{2k} \right) \\ = \frac{2}{\pi} \left(\ln(x/2) + \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2} \left(\ln(x/2) + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \right) x^{2k} \right), \quad (20)$$

$$N_1(x) = \frac{1}{\pi} \left(2J_1(x) \ln(x/2) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sigma_{k,1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!} x^{2k+1} - \frac{2}{x} \right) \\ = \frac{2}{\pi} \left((\ln(x/2) + \gamma - 1/2)(x/2) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left(\ln(x/2) + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \frac{1}{2(k+1)} \right) x^{2k+1} - \frac{1}{x} \right). \quad (21)$$

L'Eq. (19), $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ($\forall n \in \mathbb{Z}^-$, si può applicare l'Idn. (43), v. P. 15) equivale all'espansione generale esplicita *uniformemente convergente* in \mathbb{R}^+ ,

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n!} \left(\ln(x/2) + \gamma - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) (x/2)^n + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} k!(k+n)!} \left(\ln(x/2) + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{k+p} \right) x^{2k+n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-p-1)!}{2^{2p-n} p!} x^{2p-n} \right). \quad (22)$$

□

L'integrale generale dell'Eq. (2) è sempre scrivibile, $\forall \nu \in \mathbb{R}$, secondo la combinazione lineare fondamentale *cilindrica*

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) \quad (23)$$

ma, se $\nu \notin \mathbb{Z}$, potrebbe risultare più conveniente la forma *analiticamente equivalente*

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \quad (23.1)$$

Osservazione 2

Nelle applicazioni, e.g., in Elettrodinamica e in Fisica Quantistica, la *divergenza logaritmica* di N_ν per $x \rightarrow 0^+$ va considerata molto seriamente circa l'*esclusione* di N_ν dalla soluzione *fisicamente significativa* più generale.

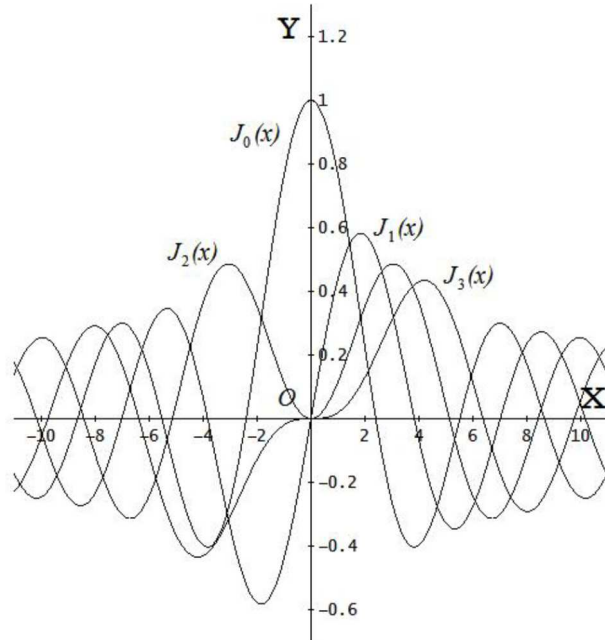


Fig. 1 – Grafici delle funzioni $x \mapsto J_0(x), J_1(x), J_2(x), J_3(x)$

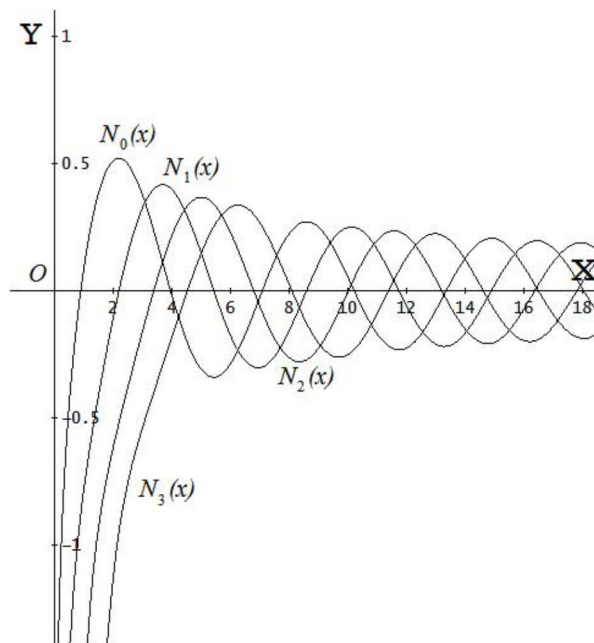


Fig. 2 – Grafici delle funzioni (logaritmicamente singolari) $x \mapsto N_0(x), N_1(x), N_2(x), N_3(x)$.

■

B. L'Equazione di Bessel nella forma *ipergeometrica confluyente*

È interessante notare che l'*Equazione di Bessel*, nelle forme (2) o (5), è riconducibile alla classe più generale delle equazioni differenziali *Ipergeometriche Confluenti* (proprietà condivisa, peraltro, da molte altre *Funzioni 'Speciali'*), i.e., la classe delle *equazioni differenziali ordinarie lineari del 2° ordine* della forma

$$xy'' + (\mu - x)y' - \alpha y = 0. \quad (24)$$

frequenti nell'Analisi classica e in ambiti applicativi importanti (e.g., nell'interazione coulombiana e in Fisica Quantistica).

Di queste, il *metodo di Frobenius* fornisce la *Funzione Ipergeometrica Confluyente* (o *Funzione di KUMMER* (E. E., 1810-1893), ${}_1F_1$, come integrale particolare se $\mu \notin \mathbb{Z}_0^-$ ($\equiv \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$) (v. [17.1]).

La funzione $x \mapsto {}_1F_1(\alpha, \mu; x)$ è rappresentabile mediante la serie di potenze, convergente in \mathbb{R} , *uniformemente* in ogni insieme compatto $\bar{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}$,

$$x \mapsto {}_1F_1(\alpha, \mu; x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!(\mu)_k} x^k. \quad (25)$$

Nell'Eq. (2), la trasformazione $x \mapsto w := 2ix$ dà $x = -iw/2 \wedge dw/dx = 2i$ e, quindi,

$$\bullet \quad y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = 2iy'(w), \quad (26.1)$$

$$\bullet \quad y''(x) \equiv \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{dw}{dx} \frac{d}{dw} (2iy'(w)) = -4y''(w). \quad (26.2)$$

[Analogamente, si può incominciare dall'Eq. (5), eseguendo la trasformazione $x \mapsto w := 2x$.]

Con la sostituzione delle espressioni delle derivate (26.1) e (26.2) nell'Eq. (2) e la semplificazione successiva, si ottiene l'equazione trasformata

$$w^2 y''(w) + w y'(w) - (w^2/4 + v^2) y(w) = 0. \quad (27)$$

A questo punto, se $v \notin \mathbb{Z}$ e si assume l'espressione della funzione incognita $y(w)$ della forma

$$y(w) := w^v e^{-w/2} \phi(w), \quad (28)$$

le rappresentazioni corrispondenti delle sue funzioni derivate 1^a e 2^a nella nuova funzione incognita ϕ risultano

$$\bullet \quad y'(w) = ((v w^{v-1} - w^v/2)\phi + w^v \phi') e^{-w/2}, \quad (28.1)$$

$$\bullet \quad y''(w) = ((v(v-1)w^{v-2} - v w^{v-1} + w^v/4)\phi + (2v w^{v-1} - w^v)\phi' + w^v \phi'') e^{-w/2}. \quad (28.2)$$

Pertanto, con le espressioni (28), (28.1) e (28.2), qualche semplificazione e la divisione finale per $w^{v+1} e^{-w/2}$ ($\neq 0$) nei suoi membri, l'Eq. (27) prende la forma *ipergeometrica confluyente* prevista

$$w \phi'' + (2v + 1 - w) \phi' - (v + 1/2) \phi = 0, \quad (29)$$

dove (cf/c Eq. (2)), essendo $\alpha \equiv v + 1/2 \wedge \mu \equiv 2v + 1$, i.e., ($v \equiv (\mu - 1)/2 \wedge \mu \equiv 2\alpha$), l'Eq. (25) porta a concludere che l'Eq. (29) possiede l'integrale particolare

$$\phi_1(w) \equiv {}_1F_1(v + 1/2, 2v + 1; w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(v + 1/2)_k}{k!(2v + 1)_k} w^k. \quad (29.1)$$

Come conseguenza delle Eq.i (29.1) e (28), l'Eq. (27) è soddisfatta, necessariamente, dall'integrale particolare

$$y_1(w) = w^\nu e^{-w/2} {}_1F_1(\nu + 1/2, 2\nu + 1; w) \equiv w^\nu e^{-w/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\nu + 1/2)_k}{k!(2\nu + 1)_k} w^k. \quad (30)$$

Si può analizzare l'espressione di $y_1(w)$ esplicitando, per $k \in \mathbb{Z}^+$, i simboli di Pochhammer

$$\begin{cases} (\nu + 1/2)_k \equiv \frac{(2\nu + 1)(2\nu + 3)(2\nu + 5) \dots (2\nu + 2k - 1)}{2^k} \\ (2\nu + 1)_k \equiv (2\nu + 1)(2\nu + 2)(2\nu + 3) \dots (2\nu + k) \end{cases}$$

e, quindi, semplificandone il rapporto

$$\frac{(\nu + 1/2)_k}{(2\nu + 1)_k} = \frac{\cancel{(2\nu + 1)} \cancel{(2\nu + 3)} \cancel{(2\nu + 5)} \dots \cancel{(2\nu + 2k - 3)} (2\nu + 2k - 1)}{2^k \cancel{(2\nu + 1)} (2\nu + 2) \cancel{(2\nu + 3)} (2\nu + 4) \cancel{(2\nu + 5)} \dots (2\nu + k - 1) (2\nu + k)},$$

un controllo algebrico accurato di *induzione* fornisce il risultato generale seguente (lo si verifichi):

$$\frac{(\nu + 1/2)_k}{(2\nu + 1)_k} \equiv \begin{cases} \frac{1}{2^{3k/2}} \prod_{r=1}^{k/2} \left(\frac{k-1}{r+\nu} + 2 \right), & \text{per } k \text{ pari } \wedge \geq 2, \\ \frac{1}{2^{(3k-1)/2}} \prod_{r=1}^{(k-1)/2} \left(\frac{k}{r+\nu} + 2 \right), & \text{per } k \text{ dispari } \wedge \geq 3; \end{cases} \quad (31)$$

poi, utilizzando il *Simbolo di Kronecker* come 'switch' di *parità* tra le Idn. (31), l'integrale (30) prende la forma

$$y_1(w) = w^\nu e^{-w/2} \left(1 + \frac{w}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\delta_{(-1)^k, 1}}{2^{k/2}} \prod_{r=1}^{k/2} \left(\frac{k-1}{r+\nu} + 2 \right) + \frac{\delta_{(-1)^k, -1}}{2^{(k-1)/2}} \prod_{r=1}^{(k-1)/2} \left(\frac{k}{r+\nu} + 2 \right) \right) w^k \right),$$

dalla quale, infine, con il ritorno alla variabile indipendente originaria x ($\equiv -iw/2$, v. Eq. (24)), risulta (lo si verifichi)

$$y_1(x) = (2xi)^\nu e^{-ix} \left(1 + ix + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} \left(\frac{\delta_{(-1)^k, 1}}{2^{k/2}} \prod_{r=1}^{k/2} \left(\frac{k-1}{r+\nu} + 2 \right) + \frac{\delta_{(-1)^k, -1}}{2^{(k-1)/2}} \prod_{r=1}^{(k-1)/2} \left(\frac{k}{r+\nu} + 2 \right) \right) x^k \right) \equiv J_\nu(x). \quad (32.1)$$

□

La teoria generale delle *Funzioni Ipergeometriche*, sia *Gaussiane* che *Confluenti*, fissa l'esistenza di una *seconda* soluzione dell'Eq. (29), linearmente *indipendente* da $\phi_1(w)$ ma deducibile da essa mediante la coppia di isometrie (in senso algebrico)

$$\begin{cases} \bar{\alpha} := \alpha - \mu + 1 \equiv -\nu + 1/2 \\ \bar{\mu} := 2 - \mu \equiv -2\nu + 1 \end{cases}. \quad (\dagger)$$

Tale soluzione particolare è pure di forma *ipergeometrica confluyente* ed è data da

$$\phi_2(w) = w^{1-\mu} {}_1F_1(\bar{\alpha}, \bar{\mu}; w) \equiv w^{-2\nu} {}_1F_1(1/2 - \nu, 1 - 2\nu; w).$$

Allora, ancora dalla trasformazione (28), si ricava

$$y_2(w) = w^{-\nu} e^{-w/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/2 - \nu)_k}{k!(1 - 2\nu)_k} w^k$$

e, da questa, la sua x -rappresentazione,

$$y_2(x) = (2xi)^{-\nu} e^{-ix} \left(1 + ix + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} \left(\frac{\delta_{(-1)^k, 1}}{2^{k/2}} \prod_{r=1}^{k/2} \left(\frac{k-1}{r-\nu} + 2 \right) + \frac{\delta_{(-1)^k, -1}}{2^{(k-1)/2}} \prod_{r=1}^{(k-1)/2} \left(\frac{k}{r-\nu} + 2 \right) \right) x^k \right) \equiv J_{-\nu}(x) \quad (32.2)$$

L'integrale generale dell'Eq. (2), in forma *equivalente* a quella dell'Eq. (23), si scrive, mediante le Eq.i (32.1) e (32.2),

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

dove, $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{C}$ è una coppia di costanti arbitrarie qualsiasi. In ogni caso, risulta che le funzioni $J_{\pm\nu}(x) \in \mathbb{R}$.

■

Esercizio 1

Per le *Funzioni Cilindriche di Hankel* (v. Eq.i (4)), si verifichino le identità

$$\begin{aligned} \text{a. } H_{\nu}^{(1)}(x) &= (-1)^{-\nu} H_{-\nu}^{(1)}(x) && (\equiv H_{\nu}^{(2)}(x)^*), \\ \text{b. } H_{\nu}^{(2)}(x) &= (-1)^{\nu} H_{-\nu}^{(2)}(x) && (\equiv H_{\nu}^{(1)}(x)^*), \end{aligned}$$

valide $\forall \nu \in \mathbb{R}$. Si osservi che $(-1)^{\pm\nu} \equiv e^{\pm\nu\pi i} \equiv i^{\pm 2\nu} \in \mathbb{C}$.

Esercizio 2

Con riferimento alle Eq. (32.1) e (32.2), si verifichi che, $\forall \nu \in \mathbb{R}$, valgono le rappresentazioni ipergeometriche

$$\begin{aligned} J_{\nu}(x) &= \frac{(x/2)^{\nu} e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1; 2ix), \\ J_{-\nu}(x) &= \frac{(x/2)^{-\nu} e^{-ix}}{\Gamma(1-\nu)} {}_1F_1(1/2-\nu, +1-2\nu; 2ix). \end{aligned}$$

(†) Una presentazione essenziale ma *operativa* delle Equazioni Differenziali *Ipergeometriche* sia *Gaussiana* che *Confluente* e delle Funzioni-soluzione corrispondenti è contenuta nel math-notebook: *Equazioni Differenziali Ordinarie Lineari del 2° ordine a coefficienti variabili - Metodi di integrazione*, P. 15-20.

C. Le Funzioni di Bessel *Iperboliche* di 1° e di 2° tipo

Con l'omotetia immaginaria $x \mapsto ix \equiv e^{i(\pi/2)}x$, l'Eq. (2) assume la forma dell'Eq. (5),

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0. \quad (33)$$

Per iniziare, è necessario definire le identità di connessione tra le *Funzioni di Bessel di 1° e di 2° tipo Ordinarie* di argomento *immaginario* ix con le *Funzioni di Bessel di 1° e di 2° tipo cosiddette Iperboliche o Modificate*, di argomento x , rispettivamente, I_ν e K_ν (ν . [2], [3], [4]):

$$J_\nu(ix) := i^\nu I_\nu(x) \equiv e^{i(\pi/2)\nu} I_\nu(x), \quad (34.1)$$

$$N_\nu(ix) := i^{\nu+1} I_\nu(x) - (2/\pi) i^{-\nu} K_\nu(x). \quad (34.2)$$

Ciò consente di scrivere l'integrale generale dell'Eq. (33) in forma analoga a quella dell'Eq. (23):

$$y(x) = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x). \quad (35)$$

L'Eq. (34.2) si può esprimere, $\forall \nu \notin \mathbb{Z}$, mediante le *definizioni* convenzionali della *Funzione* K_ν di MACDONALD (H. M., 1865-1935),

$$x \mapsto K_\nu(x) \equiv (\pi/2) (\csc(\nu\pi)) (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)), \quad (36.1)$$

$$x \mapsto K_n(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (36.2)$$

Inoltre, combinando le Eq.i (34.1), (34.1) e (36.1), vale la definizione generatrice ulteriore

$$K_\nu(x) := (\pi/2) i^{\nu+1} (J_\nu(ix) + i N_\nu(ix)), \quad (36.3)$$

nella quale, il fattore $i^{\nu+1}$ ha l'effetto di rendere $K_\nu(x) \in \mathbb{R}$ sse anche $x \in \mathbb{R}$.

Eliminando $K_\nu(x)$ tra le Eq.i (34.2) e (36.1) e ricordando che $I_\nu(x)$ e $I_{-\nu}(x)$ risultano *linearmente indipendenti* quando $\nu \notin \mathbb{Z}$, si trova, in alternativa all'Eq. (34.2), che

$$N_\nu(ix) \equiv (i^{\nu+1} + i^{-\nu} \csc(\nu\pi)) I_\nu(x) - i^{-\nu} \csc(\nu\pi) I_{-\nu}(x). \quad (36.4)$$

□

Pertanto, l'integrale generale (35) possiede, per $\nu \notin \mathbb{Z}$, la forma *analiticamente equivalente* ma, talvolta, più maneggevole della forma (35),

$$y(x) = c_1 I_\nu(x) + c_2 I_{-\nu}(x). \quad (37)$$

Il calcolo numerico richiede le espansioni in serie di potenze sia di $I_\nu(x)$, $\forall \nu$, che di $K_n(x)$, per $n \in \mathbb{Z}$. La prima, si ottiene prontamente dall'Eq. (34.1), usando l'Eq. (15) direttamente:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &\equiv i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^{-\nu} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} (ix)^{2k+\nu} \\ &= (x/2)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(k+\nu+1)} x^{2k}, \end{aligned} \quad (38)$$

dalla quale, poi, mediante la definizione (36.1) di K_ν , si trova che, $\forall \nu \notin \mathbb{Z}$,

$$K_\nu(x) := \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k!} \left(\frac{(x/2)^{-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} - \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(k+\nu+1)} \right) x^{2k}; \quad (39)$$

Invece, $K_n(x)$ può essere ricavato dalla variante-limite (36.2) applicando lo stesso procedimento generatore dell'espansione (19) di $N_n(x)$. Si trova, $\forall \{n, x\} \subset \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ (v. [1], [2], [3], [4]),

$$K_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left(2I_n(x) \ln(x/2) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{k,n}}{2^{2k+n} k!(k+n)!} x^{2k+n} \right) + \downarrow$$

$$\downarrow + \frac{(1 - \delta_{n,0})}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (n-j-1)!}{2^{2j-n} j!} x^{2j-n}. \quad (40)$$

Anche qui, tenendo conto delle Eq.i (18.2), (18.3), (18.4) e (18.1), risultano esplicitamente i primi due elementi di ordine $n \in \mathbb{Z}_0^+$:

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln(x/2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{k,0}}{(2^k k!)^2} x^{2k}$$

$$= -\ln \frac{x}{2} - \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2^k k!)^2} \left(\ln(x/2) + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \right) x^{2k}, \quad (40.1)$$

$$K_1(x) = I_1(x) \ln(x/2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{k,1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!} x^{2k+1} + \frac{1}{x}$$

$$= (\ln(x/2) + \gamma - 1/2)(x/2) + \downarrow$$

$$\downarrow + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left(\ln(x/2) + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \frac{1}{2(k+1)} \right) x^{2k+1} + \frac{1}{x}, \quad (40.2)$$

Fig. 3 – Grafici delle funzioni $x \mapsto I_0(x), I_1(x), I_2(x), I_3(x)$.

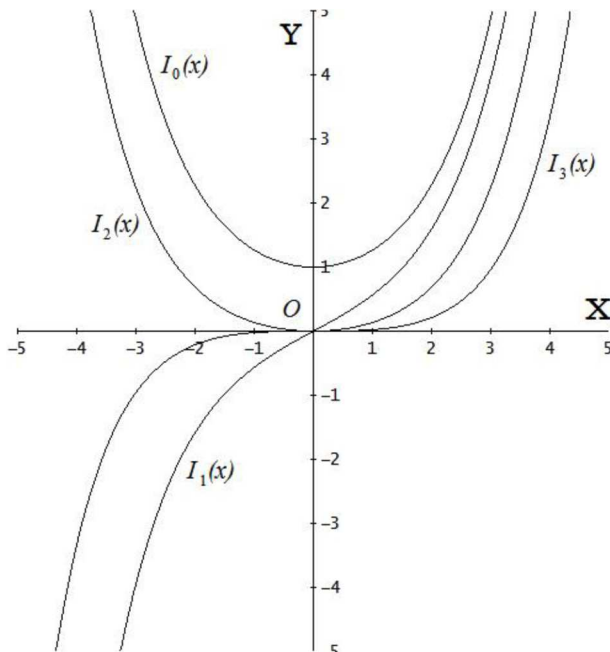
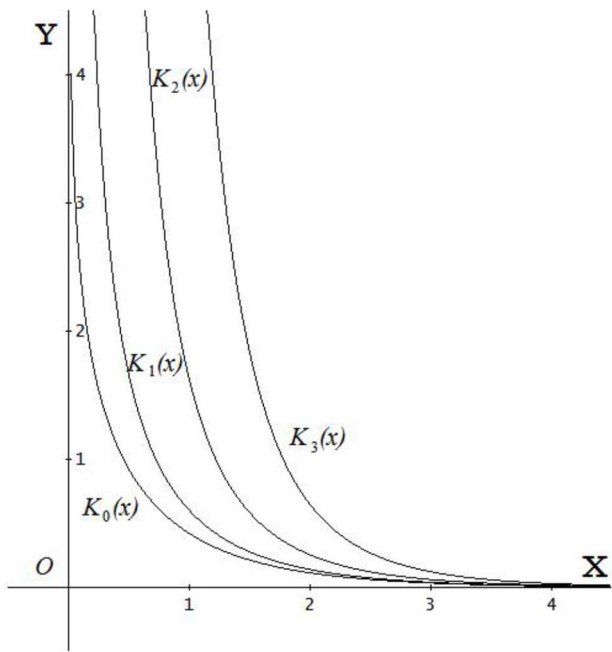


Fig. 4 – Grafici delle funzioni $x \mapsto K_0(x), K_1(x), K_2(x), K_3(x)$.



mentre, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, si determina l'espansione *uniformemente convergente* generale ($\forall n \in \mathbb{Z}^-$, vale l'Idn. (47.k), P. 10)

$$\begin{aligned}
 K_n(x) = & (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n!} \left(\ln(x/2) + \gamma - (1/2) \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) (x/2)^n + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+n} k!(k+n)!} \left(\ln(x/2) + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{k+p} \right) x^{2k+n} \right) + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p (n-p-1)!}{2^{2p-n} p!} x^{2p-n} \right). \quad (41.2)
 \end{aligned}$$

Da un controllo sia dei grafici che delle espansioni rispettive in serie di potenze, si conclude che soltanto le funzioni J_n e I_n , con $n \in \mathbb{Z}$, hanno *parità\disparità* definita da $(-1)^n$. Per $\nu \notin \mathbb{Z}$, i grafici, di J_ν e di I_ν restano confinati nel semipiano cartesiano *destro*, per ragioni evidenti di rappresentabilità in \mathbb{R} .

Circa le funzioni N_ν e K_ν , $\forall \nu$, l'assenza di parità definite e la presenza del termine *logaritmico* interno (v. Eq.i (19) e (40)) ne confinano, comunque, i grafici al semi-piano cartesiano (reale) destro. \square

Esercizio 3

Si verifichi l'identità seguente:

$$K_\nu(x) \equiv -\frac{\pi}{2} i^{1-\nu} H_\nu^{(2)}(-ix).$$

Esercizio 4

Si verifichino le rappresentazioni ipergeometriche seguenti:

$$\begin{aligned}
 I_\nu(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu e^{-x} {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1; 2x); \\
 K_\nu(x) &= \frac{\pi^{3/2}}{\sin(2\nu\pi)} (2x)^\nu e^{-x} \left(x^{-2\nu} \frac{{}_1F_1(1/2-\nu, 1-2\nu; 2x)}{\Gamma(1/2+\nu)\Gamma(1-2\nu)} - \frac{{}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1; 2x)}{\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(1+2\nu)} \right).
 \end{aligned}$$

■

D. Identità iterative generali delle funzioni J_ν , N_ν , I_ν e K_ν

Si indichi con B_ν la *Funzione di Bessel Ordinaria qualsiasi di 1° o di 2° tipo*, J_ν o N_ν , di rango $\nu \in \mathbb{R}$. Essa soddisfa le identità seguenti, facilmente ricavabili ($\nu \equiv m$ se $\nu \in \mathbb{Z}$):

$$\bullet \quad B_m(x) = (-1)^m B_{-m}(x), \quad (42)$$

$$\bullet \quad B_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} B_\nu(x) - B_{\nu-1}(x), \quad (43)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} B_\nu(x) = \frac{\nu}{x} B_\nu(x) - B_{\nu+1}(x), \quad (44.1)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} B_\nu(x) = B_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} B_\nu(x), \quad (44.2)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} B_\nu(x) = \frac{1}{2} (B_{\nu-1}(x) - B_{\nu+1}(x)), \quad (44.3)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} (x^\nu B_\nu(x)) = x^\nu B_{\nu-1}(x), \quad (45)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} (x^{-\nu} B_\nu(x)) = -x^{-\nu} B_{\nu+1}(x). \quad (46)$$

□

Per le funzioni I_ν e K_ν , $\forall \nu \in \mathbb{R}$, valgono identità analoghe a quelle espresse dalle Eq.i (42), ..., (46) ma *distinte* per le due famiglie di *Funzioni di Bessel Iperboliche*. Infatti, si hanno:

$$\bullet \quad I_m(x) = I_{-m}(x), \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \bullet \quad K_\nu(x) = K_{-\nu}(x), \quad (47.i, k)$$

$$\bullet \quad I_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) + I_{\nu-1}(x), \quad \bullet \quad K_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} K_\nu(x) + K_{\nu-1}(x), \quad (48.i, k)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} I_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I_{\nu+1}(x), \\ I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x), \end{cases} \quad \bullet \quad \frac{d}{dx} K_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\nu}{x} K_\nu(x) - K_{\nu+1}(x), \\ -K_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} K_\nu(x), \end{cases} \quad (49.i, k)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} I_\nu(x) = \frac{1}{2} (I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)), \quad \bullet \quad \frac{d}{dx} K_\nu(x) = -\frac{1}{2} (K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)), \quad (50.i, k)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} (x^\nu I_\nu(x)) = x^\nu I_{\nu-1}(x), \quad \bullet \quad \frac{d}{dx} (x^\nu K_\nu(x)) = -x^\nu K_{\nu-1}(x), \quad (51.i, k)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} (x^{-\nu} I_\nu(x)) = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x), \quad \bullet \quad \frac{d}{dx} (x^{-\nu} K_\nu(x)) = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x). \quad (52.i, k)$$

Esercizio 5

Si verifichino le identità (42), ..., (52.i, k).

■

E. Le Funzioni di Bessel *Sferico-Ordinarie* di 1° e di 2° tipo

Nel math-notebook [17.1], P. 3-6, è mostrato che il cambiamento di funzione incognita in \mathbb{R}

$$y(x) := (\alpha x)^{-1/2} \phi(x) \quad (53)$$

($\alpha \in \mathbb{R}^+$) trasforma l'equazione differenziale (in forma normale), $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$y'' + (2/x)y' + (\alpha^2 - n(n+1)/x^2)y = 0 \quad (54)$$

– che non è di Bessel! – nell'Equazione di Bessel (in forma normale)

$$\phi'' + (1/x)\phi + (\alpha^2 - n(n+1)/x^2)\phi = 0, \quad (55)$$

di ordine *semi-dispari* $n + 1/2$. Poiché $n + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, allora, dalle Eq.i (23.1) e (53), l'integrale generale dell'Eq. (54) può essere scritto

$$y(x) = x^{-1/2} (c_1 J_{n+1/2}(\alpha x) + c_2 J_{-(n+1/2)}(\alpha x)). \quad (56)$$

D'altra parte, è immediato ricavare, dall'Eq. (3), assegnando $\nu \equiv n + 1/2$, che

$$N_{n+1/2}(\alpha x) \equiv (-1)^{n+1} J_{-(n+1/2)}(\alpha x), \quad (57)$$

L'Eq. (54) è importante e molto frequente nelle applicazioni sia fisiche sia ingegneristiche che riguardano la *radiazione elettromagnetica*, la *diffusione stazionaria di un gas* e la *dinamica di una particella libera in regime quantistico di confinamento sferico*. I parametri α e n provengono, rispettivamente, dalle caratteristiche fisico-geometriche del sistema e dal processo di separazione delle variabili *sferiche* ($0 \leq x \mapsto r$) nell'equazione modellistica di propagazione. □

L'associazione di $x^{-1/2}$ con $J_{n+1/2}$ e con $J_{-(n+1/2)}$ porta alla definizione delle *Funzioni di Bessel Ordinarie*, cosiddette *Sferiche*, di 1° e di 2° tipo, che, a meno di fattori costanti, sono definite per $x \in \mathbb{R}^+$ e, convenzionalmente, date dalle espressioni rispettive (v. Eq. (13))

$$j_n(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} J_{n+1/2}(\alpha x); \quad (58.1)$$

$$n_n(\alpha x) := (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} J_{-(n+1/2)}(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} N_{n+1/2}(\alpha x), \quad (58.2)$$

In tal modo, l'integrale generale (56) può essere scritto nella forma alternativa equivalente

$$y(x) = c_1 j_n(\alpha x) + c_2 n_n(\alpha x). \quad (59)$$

Per esso, come è chiaro dalle Eq.i (58.1) e (58.2), si può assumere che sia $n \in \mathbb{Z}_0^+$, senza perdita di generalità.

L'espansione in serie di potenze di $j_n(\alpha x)$ si ottiene sostituendo $\nu \equiv n + 1/2$ nell'Eq. (14) e applicando la definizione (58.1), per $x \in \mathbb{R}^+$. Si trova

$$j_n(\alpha x) \equiv \frac{\pi^{1/2} (\alpha x)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k+n+3/2)} (\alpha x)^{2k}. \quad (60)$$

Poi, il fattore $\Gamma(k+n+3/2)$ nel termine generale dell'espansione può essere espresso mediante la *Formula di Duplicazione della Funzione Γ* (e.g., v. [17.2], Eq. (45)), riscritta nella forma

$$\Gamma(w + 1/2) = \pi^{1/2} \frac{\Gamma(2w)}{2^{2w-1} \Gamma(w)}. \quad (61)$$

Si ricordi che l'identità (61) è valida $\forall w \notin \mathbb{Z}_0^-$. L'identificazione $w \equiv k + n$ fornisce il risultato

$$\begin{aligned} \Gamma(k + n + 3/2) &\equiv \Gamma((k + n + 1/2) + 1) = (k + n + 1/2) \Gamma(k + n + 1/2) \\ &= \pi^{1/2} \frac{(2k + 2n + 1)}{2} \frac{\Gamma(2(k + n))}{2^{2(k+n)-1} \Gamma(k + n)} \equiv \pi^{1/2} (2k + 2n + 1) \frac{(2k + 2n - 1)!}{2^{2k+2n} (k + n - 1)!} \\ &\equiv \pi^{1/2} \frac{(2k + 2n + 1)(2k + 2n - 1)!}{2^{2k+2n} (k + n - 1)!} \frac{2k + 2n}{2k + 2n} \\ &= \pi^{1/2} \frac{(2k + 2n + 1)!}{2^{2k+2n+1} (k + n)!}. \end{aligned} \quad (61.1)$$

Quindi, con l'Idn. (61.1), l'Eq. (60) diventa

$$j_n(\alpha x) = (2\alpha x)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k + n)!}{k!(2k + 2n + 1)!} (\alpha x)^{2k}. \quad (62)$$

L'espressione (62) si rivela *scarsamente* efficiente per il calcolo numerico. La ragione tecnica di ciò sta, in buona parte, nella presenza *contemporanea* – pesante per la memoria RAM! – di fattoriali dipendenti dall'indice variabile k sia nel numeratore che nel denominatore del termine generale. L'utilità della rappresentazione in serie (62), però, è un'altra, come apparirà tra breve. \square

Per quanto riguarda la rappresentazione di $n_n(\alpha x)$ in serie di potenze, è utile considerare qualche dettaglio ulteriore. Se $\nu \equiv -(n + 1/2)$ nell'Eq. (2), si scrive l'espansione formale dell'Eq. (58.2), per $x \in \mathbb{R}^+$,

$$n_n(\alpha x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n \pi^{1/2}}{(\alpha x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k - n + 1/2)} (\alpha x)^{2k}. \quad (63)$$

È evidente che, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, esiste sempre un numero *finito* di valori di k tali che $k - n + 1/2 < 0$. Allora, $k - n + 1/2 \in (k - n, k - n + 1)$ così che, per prolungamento analitico (in senso reale), si ha, in tale intervallo (e.g., v. [17.2], Eq.i (10), (28) e, ancora, (45)),

$$\Gamma(k - n + 1/2) = \begin{cases} \frac{\Gamma(1/2)}{(-n + 1/2)_0} \equiv \pi^{1/2}, & \text{se } k = 0, \\ \frac{\Gamma(k + 1/2)}{(k - n + 1/2)_k} = \frac{\pi^{1/2} (2k - 1)!}{2^{2k-1} (k - 1)! (k - n + 1/2)_k}, & \text{se } k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (63.1)$$

Dalla specificazione delle Eq.i (62) e (63) per $n = 0$, si determinano due risultati interessanti,

$$\begin{aligned} j_0(\alpha x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} (\alpha x)^{2k} \equiv \frac{1}{\alpha x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} (\alpha x)^{2k+1} \\ &= \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} := \text{sinc}(\alpha x), \end{aligned} \quad (64.1)$$

$$n_0(\alpha x) = -\frac{\pi^{1/2}}{\alpha x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k + 1/2)} (\alpha x)^{2k} = -\frac{1}{\alpha x} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1} (k - 1)!}{2^{2k} k! (2k - 1)!} (\alpha x)^{2k} \right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha x} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\alpha x)^{2k} \right) = -\frac{1}{\alpha x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\alpha x)^{2k}$$

$$\equiv -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha x}, \quad (64.2)$$

combinando i quali, rispettivamente, con le Eq.i (58.1) e (58.2), si trovano le espressioni

$$J_{1/2}(\alpha x) = \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \sin(\alpha x), \quad (65.1)$$

$$J_{-1/2}(\alpha x) = \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \cos(\alpha x). \quad (65.2)$$

Pertanto, ponendo l'Idn. *ascendente* (43) nella sua forma *discendente* equivalente

$$B_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} B_{\nu}(x) - B_{\nu+1}(x), \quad (66)$$

si calcolano ($\nu = \pm 1/2$)

$$J_{3/2}(\alpha x) \equiv J_{1/2+1}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha x} J_{1/2}(\alpha x) - J_{-1/2}(\alpha x)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} - \cos(\alpha x) \right), \quad (67.1)$$

$$J_{-3/2}(\alpha x) \equiv J_{-1/2-1}(\alpha x) = -\frac{1}{\alpha x} J_{-1/2}(\alpha x) - J_{1/2}(\alpha x)$$

$$= -\left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \left(\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha x} + \sin(\alpha x) \right). \quad (67.2)$$

Ritornando alle definizioni (58.1) e (58.2), si scrivono, allora,

$$j_1(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} J_{3/2}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha x} \left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} - \cos(\alpha x) \right), \quad (68.1)$$

$$n_1(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} J_{-3/2}(\alpha x) = -\frac{1}{\alpha x} \left(\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha x} + \sin(\alpha x) \right). \quad (68.2)$$

Con lo stesso procedimento, disponendo, ora, di $J_{\pm 3/2}(\alpha x)$ e di $J_{\pm 1/2}(\alpha x)$, si trovano $J_{\pm 5/2}(\alpha x)$ e, quindi, $j_2(\alpha x)$ e $n_2(\alpha x)$, e così via. Le espressioni di queste due ultime sono

$$j_2(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} J_{5/2}(\alpha x) = \left(\frac{3}{(\alpha x)^3} - \frac{1}{\alpha x} \right) \sin(\alpha x) - \frac{3}{(\alpha x)^2} \cos(\alpha x), \quad (69.1)$$

$$n_2(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} J_{-5/2}(\alpha x) = -\left(\frac{3}{(\alpha x)^3} - \frac{1}{\alpha x} \right) \cos(\alpha x) - \frac{3}{(\alpha x)^2} \sin(\alpha x). \quad (69.2)$$

□

Le identità iterative generiche generali successive, in cui b_n un elemento *qualsiasi* della quaterna $\{j_n, n_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)}\}$, si determinano senza difficoltà per *induzione*:

$$\bullet \quad b_{n+1}(\alpha x) = -b_{n-1}(\alpha x) + \frac{2n+1}{\alpha x} b_n(\alpha x), \quad (70.1)$$

$$\bullet \quad \left. \frac{d}{du} b_n(u) \right|_{u=\alpha x} = \frac{n}{2n+1} b_{n-1}(\alpha x) - \frac{n+1}{2n+1} b_{n+1}(\alpha x), \quad (70.2)$$

$$\bullet \quad j_n(\alpha x) = (-1)^n (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{\sin u}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}, \quad (70.3)$$

$$\bullet \quad n_n(\alpha x) = (-1)^{n+1} (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{\cos u}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}, \quad (70.4)$$

$$\bullet \quad h_n^{(1)}(\alpha x) = (-1)^{n+1} i (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{e^{iu}}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}, \quad (70.5)$$

$$\bullet \quad h_n^{(2)}(\alpha x) = (-1)^n i (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{e^{-iu}}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}. \quad (70.6)$$

L'andamento grafico delle prime *Funzioni di Bessel Sferiche Ordinarie* è riportato nelle Fig. 5 e 6.

Fig. 5 – Grafici delle funzioni $x \mapsto j_0(x), j_1(x), j_2(x), j_3(x)$.

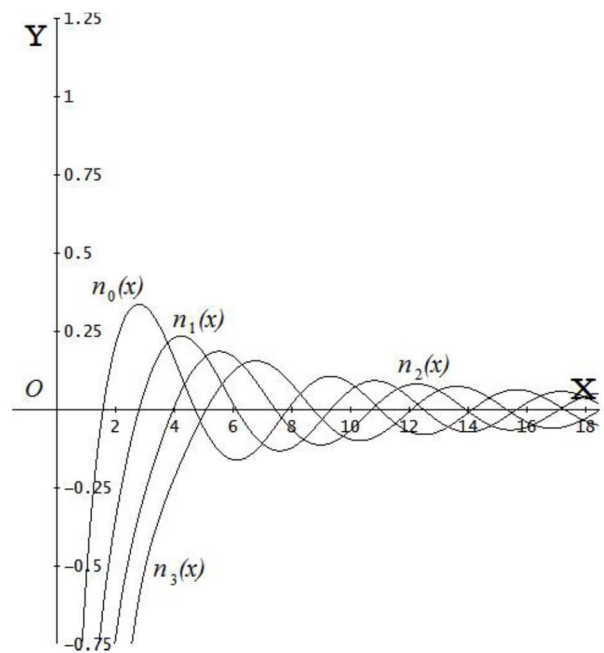
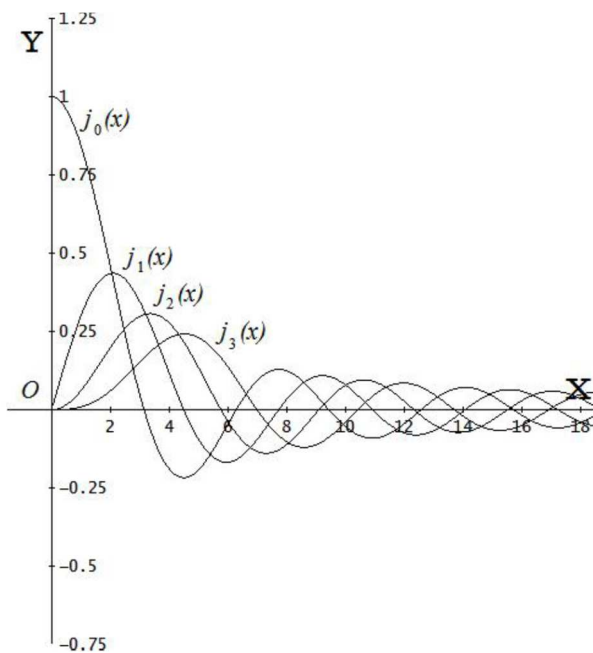


Fig. 6 – Grafici delle funzioni $x \mapsto n_0(x), n_1(x), n_2(x), n_3(x)$.

Esercizio 6

Si verifichino le identità (70.1), ..., (70.6).

F. Le Funzioni di Bessel *Sferico-Iperboliche* di 1° e di 2° tipo

In geometrie di propagazione stazionaria a simmetria *cilindrica* (e.g., *radiazione elettromagnetica smorzata emessa da un'antenna*, *diffusione smorzata di un gas di neutroni emessa da una barra di combustibile nucleare*, etc.), la separazione delle variabili (cilindriche) nell'equazione differenziale del 2° ordine a derivate parziali può fornire un'equazione *radiale* ($x \mapsto \rho \geq 0$) del tipo

$$y'' + (2/x)y' - (\alpha^2 + n(n+1)/x^2)y = 0, \quad (71)$$

dove, ancora (cf/c Eq. (55)), si ha $\{\alpha, n\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.

Lasciandosi guidare dalle forme rispettive degli integrali generali (35) e (59) e tenendo conto delle connessioni formali

$$j_n(\alpha x) \xrightarrow{\text{Eq. (58.1)}} J_{n+1/2}(\alpha x) \xrightarrow[\alpha \rightleftharpoons i\alpha]{\text{Eq. (34.1)}} I_{n+1/2}(\alpha x), \quad (72.1)$$

$$n_n(\alpha x) \xrightarrow{\text{Eq. (58.2)}} N_{n+1/2}(\alpha x) \wedge J_{-(n+1/2)}(\alpha x) \xrightarrow[\alpha \mapsto i\alpha]{\text{Eq. (34.1)}} I_{-(n+1/2)}(\alpha x), \quad (72.2)$$

necessarie per costruire $K_{n+1/2}(\alpha x)$ con l'Eq. (36.1), è evidente che l'integrale generale dell'Eq. (71) è esprimibile con la combinazione lineare

$$y = c_1 i_n(\alpha x) + c_2 k_n(\alpha x), \quad (73)$$

avendo definito, per $x \in \mathbb{R}^+$ (v. Eq. (13)),

$$x \mapsto i_n(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} I_{n+1/2}(\alpha x), \quad (74.1)$$

$$x \mapsto k_n(\alpha x) := \left(\frac{2}{\pi\alpha x} \right)^{1/2} K_{n+1/2}(\alpha x), \quad (74.2)$$

le cosiddette *Funzioni di Bessel Sferico-Iperboliche o Modificate* (cf/c le Eq.i (58.1) e (58.2)). I grafici di quelle dei primi ranghi interi inferiori sono mostrati a p. 18.

Le espansioni in serie di potenze delle funzioni i_n e k_n si determinano agevolmente combinando le definizioni (74.1) e (74.2), rispettivamente, con le Eq.i (38) e (39). Risultano, per $x \in \mathbb{R}^+$,

$$i_n(\alpha x) = \frac{\pi^{1/2}(\alpha x)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(k+n+3/2)} (\alpha x)^{2k}, \quad (75.1)$$

$$k_n(\alpha x) = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k!} \left(\frac{(\alpha x/2)^{-(n+1)}}{\Gamma(k-n+1/2)} - \frac{(\alpha x/2)^n}{\Gamma(k+n+3/2)} \right) (\alpha x)^{2k}. \quad (75.2)$$

Ora, l'analisi sviluppata per le funzioni di *Bessel Sferiche Ordinarie* alle p. 12-15 può essere riformulata, riguardo alle *Funzioni Sferico-Iperboliche*, in modo sostanzialmente analogo; questa è, certamente, una delle conferme più straordinarie e profonde del parallelismo strutturale esistente tra la *Goniometria Circolare* e quella *Iperbolica* (v. [17.4]). □

Per $n = 0$, mediante le Id. (61.1), (63.1) e le proprietà fattoriali della *Funzione Γ* , si ottengono le espressioni

$$i_0(\alpha x) \equiv \frac{\pi^{1/2}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(k+3/2)} (\alpha x)^{2k} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! \pi^{1/2} (2k+1)!} \frac{2^{2k+1} k!}{2^{2k}} (\alpha x)^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (\alpha x)^{2k} \equiv \frac{\sinh(\alpha x)}{\alpha x} := \text{sinc}(i\alpha x), \quad (76.1)$$

$$\begin{aligned} k_0(\alpha x) &= \pi^{1/2} \left(\left(\frac{1}{\alpha x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(k+1/2)} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(k+3/2)} \right) (\alpha x)^{2k} \right) \\ &= \pi^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{2^{2k-1} (k-1)!}{\pi^{1/2} (2k-1)!} \frac{(\alpha x)^{2k}}{2^{2k}} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{2^{2k+1} k!}{\pi^{1/2} (2k+1)!} \frac{(\alpha x)^{2k}}{2^{2k}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} (\alpha x)^{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (\alpha x)^{2k} \\ &\equiv \frac{\cosh(\alpha x)}{\alpha x} - \frac{\sinh(\alpha x)}{\alpha x} = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha x}, \end{aligned} \quad (76.2)$$

entrambe in termini di *funzioni elementari*. Quando esse sono sostituite, rispettivamente, nelle Eq.i (74.1) e (74.2), si ottengono

$$I_{1/2}(\alpha x) = \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \sinh(\alpha x), \quad (77.1)$$

$$K_{1/2}(\alpha x) = \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} e^{-\alpha x}, \quad (77.2)$$

che costituiscono gli elementi generatori delle famiglie $\{I_{n+1/2}(\alpha x)\}$ e $\{K_{n+1/2}(\alpha x)\}$. Iniziando dalla famiglia di *1° tipo*, l'Eq. (36.1) dà, per $\nu \equiv n+1/2$,

$$I_{-(n+1/2)}(\alpha x) = I_{n+1/2}(\alpha x) + (-1)^n \frac{2}{\pi} K_{n+1/2}(\alpha x) \quad (78)$$

e, quindi, assegnato $n=0$, risulta, dalle Eq.i (77.1) e (77.2),

$$I_{-1/2}(\alpha x) = I_{1/2}(\alpha x) + \frac{2}{\pi} K_{1/2}(\alpha x) = \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \cosh(\alpha x). \quad (78.1)$$

Il processo generativo si può avviare specificando $\nu \equiv 1/2$ nell'Idn. ricorsiva (48.i),

$$\begin{aligned} I_{3/2}(\alpha x) &\equiv I_{1/2+1}(\alpha x) = -\frac{1}{\alpha x} I_{1/2}(\alpha x) + I_{-1/2}(\alpha x) \\ &= \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \left(\cosh(\alpha x) - \frac{\sinh(\alpha x)}{\alpha x} \right). \end{aligned} \quad (79.1)$$

Segue, dalla definizione (74.1),

$$i_1(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} I_{3/2}(\alpha x) = \frac{\cosh(\alpha x)}{\alpha x} - \frac{\sinh(\alpha x)}{(\alpha x)^2}. \quad (79.2)$$

Con $I_{3/2}(\alpha x)$ e $I_{1/2}(\alpha x)$ a disposizione, si trova, ora, $I_{5/2}(\alpha x)$ con lo stesso metodo. Il risultato, ponendo $\nu \equiv 3/2$ nell'Idn. ricorsiva (48.i), è

$$I_{5/2}(\alpha x) \equiv I_{3/2+1}(\alpha x) = -\frac{3}{\alpha x} I_{3/2}(\alpha x) + I_{1/2}(\alpha x)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \left(\left(1 + \frac{3}{(\alpha x)^2} \right) \sinh(\alpha x) - \frac{3}{\alpha x} \cosh(\alpha x) \right). \quad (80.1)$$

Infine, ricorrendo ancora all'Eq. (74.1), risulta

$$i_2(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} I_{5/2}(\alpha x) = \left(\frac{1}{\alpha x} + \frac{3}{(\alpha x)^3} \right) \sinh(\alpha x) - \frac{3}{(\alpha x)^2} \cosh(\alpha x), \quad (80.2)$$

e così via.

In generale, l'identità generatrice (cf/c Idn. (70.1))

$$i_{n+1}(\alpha x) = i_{n-1}(\alpha x) - \frac{2n+1}{\alpha x} i_n(\alpha x), \quad (81.1)$$

dimostrabile facilmente *per induzione*, velocizza la determinazione iterativa delle funzioni i_n .

Ad essa, si affianca l'identità ricorsiva *nidificata*, anch'essa dimostrabile *per induzione*,

$$i_n(\alpha x) = (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{\sinh u}{u} \right) \Bigg|_{u=\alpha x}, \quad (81.2)$$

La ricerca delle espressioni delle *Funzioni di Bessel Sferico-Iperboliche di 2° tipo* è un po' più rapida, grazie alla simmetricità completa dell'Idn. ricorsiva (48.k) vs. l'*ordine* ν .

Pertanto, poiché si ha

$$K_{-1/2}(\alpha x) = \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} e^{-\alpha x} \equiv K_{1/2}(\alpha x), \quad (82)$$

l'applicazione dell'Eq. (48.k) dà ($\nu = 1/2$)

$$\begin{aligned} K_{3/2}(\alpha x) &\equiv K_{1/2+1}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha x} K_{1/2}(\alpha x) + K_{-1/2}(\alpha x) \\ &= \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\alpha x} \right) e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad (82.1)$$

e, di conseguenza, dall'Eq. (74.2), si trova

$$k_1(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} K_{3/2}(\alpha x) = \left(\frac{1}{\alpha x} + \frac{1}{(\alpha x)^2} \right) e^{-\alpha x}. \quad (82.2)$$

Ancora, si può costruire, assegnando $\nu = 3/2$,

$$\begin{aligned} K_{5/2}(\alpha x) &\equiv K_{3/2+1}(\alpha x) = \frac{3}{\alpha x} K_{3/2}(\alpha x) + K_{1/2}(\alpha x) \\ &= \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3}{\alpha x} + \frac{3}{(\alpha x)^2} \right) e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad (83.1)$$

e, da questa,

$$k_2(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2 \alpha x} \right)^{1/2} K_{5/2}(\alpha x) = \left(\frac{1}{\alpha x} + \frac{3}{(\alpha x)^2} + \frac{3}{(\alpha x)^3} \right) e^{-\alpha x} \quad (83.2)$$

ma, in generale, è di gran lunga più comodo ricorrere all'identità ricorsiva generatrice, analoga all'identità (81.1) e, pure, dimostrabile facilmente *per induzione*,

$$k_{n+1}(x) = k_{n-1}(x) + \frac{2n+1}{x} k_n(x). \tag{84.1}$$

Infine, va ricordata l'identità ricorsiva *nidificata*, dimostrabile, come l'Idn. (84.1), *per induzione*,

$$k_n(\alpha x) = (-1)^n (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{e^{-\alpha x}}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}. \tag{84.2}$$

Fig. 7 – Grafici delle funzioni $x \mapsto i_0(x), i_1(x), i_2(x), i_3(x)$.

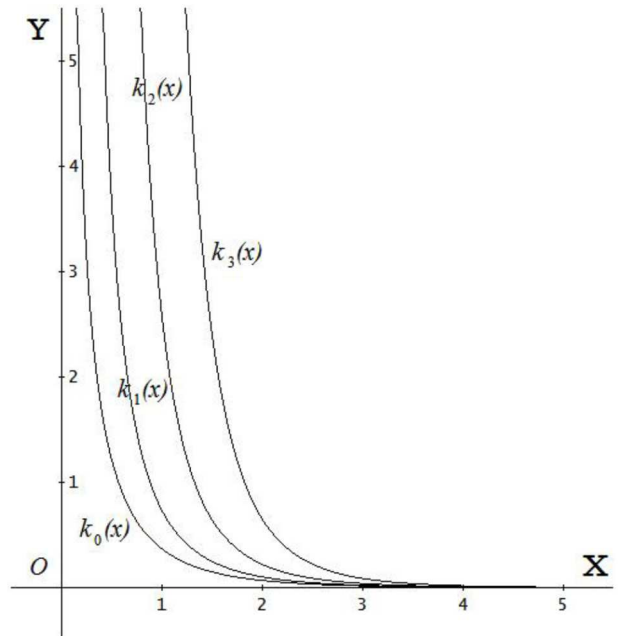
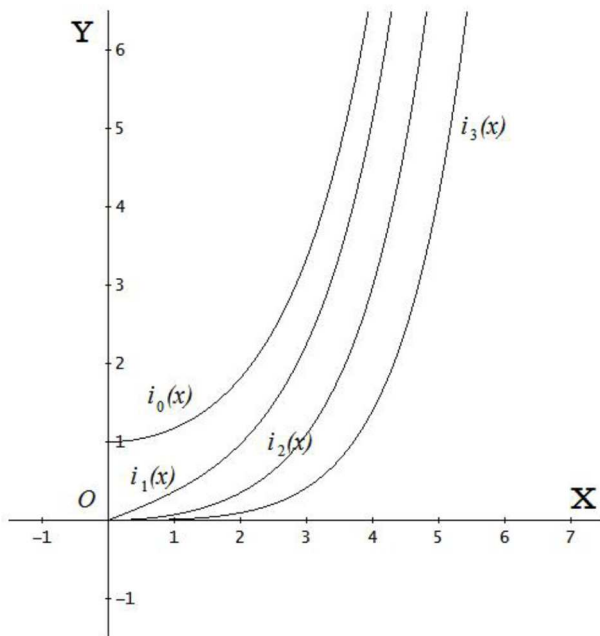


Fig. 8 – Grafici delle funzioni $x \mapsto k_0(x), k_1(x), k_2(x), k_3(x)$.

Osservazione 3

L'asserto a p. 3: "Tutte – e sole – le *Funzioni di Bessel Sferiche*, sia *Ordinarie* che *Iperboliche*, sono esprimibili in *forma chiusa*, mediante combinazioni di funzioni elementari (potenze, goniometriche ed esponenziali)", è verificato.

Esercizio 7

Si verifichino le identità (81.1), (81.2), (84.1), (84.2).

■

G. Riepilogo delle rappresentazioni in serie reali delle Funzioni di Bessel *Ordinarie e Iperboliche*

$$\bullet \quad x \mapsto J_\nu(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+1+k)} x^{2k} \equiv i^\nu I_\nu(-ix); \quad (85)$$

$$\bullet \quad x \mapsto N_\nu(x) := (\cot(\nu\pi))J_\nu(x) - (\cot(\nu\pi))J_{-\nu}(x). \quad (86)$$

In particolare, $\forall \nu \equiv n + 1/2$, l'Eq. (3) (o (86)) dà

$$N_{n+1/2}(\alpha x) = (-1)^{n+1} J_{-(n+1/2)}(\alpha x); \quad (86.1)$$

$\forall \nu \equiv n \in \mathbb{Z}_0^+$, si ricavano

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \right) x^{2k} \right), \quad (86.2)$$

$$\begin{aligned} N_n(x) &:= \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x), \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}^+, \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n!} \left(2 \ln \frac{x}{2} + 2\gamma - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} k!(k+n)!} \left(2 \ln \frac{x}{2} + 2\gamma - 2 \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{k+p} \right) x^{2k+n} \right. \\ &\quad \left. \downarrow - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-p-1)!}{2^{2p-n} p!} x^{2p-n} \right); \quad (86.3) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad x \mapsto H_\nu^{(1)}(x) := J_\nu(x) + iN_\nu(x); \quad (87)$$

$$\bullet \quad x \mapsto H_\nu^{(2)}(x) := J_\nu(x) - iN_\nu(x); \quad (88)$$

$$\bullet \quad x \mapsto I_\nu(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+1+k)} x^{2k} \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix); \quad (89)$$

$$\bullet \quad x \mapsto K_\nu(x) := (\pi/2)(\csc \nu\pi)(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)) \equiv K_{-\nu}(x). \quad (90)$$

In particolare, $\forall \nu \equiv n \in \mathbb{Z}_0^+$, si ricavano

$$K_0(x) = -\ln \frac{x}{2} - \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2^k k!)^2} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \right) x^{2k}, \quad (90.1)$$

$$\begin{aligned} K_n(x) &:= \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n!} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^n \right. \\ &\quad \left. \downarrow + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+n} k!(k+n)!} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{k+p} \right) x^{2k+n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p (n-p-1)!}{2^{2p-n} p!} x^{2p-n}. \quad (90.2) \end{aligned}$$

Là dove compare, $\gamma \equiv 0.5772156649\dots$ indica la *Costante di Euler-Mascheroni*. Inoltre, nelle manipolazioni numeriche, può rivelarsi utile la *Proprietà di Iterazione della Funzione Γ* per ottenere le identità

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu+1+k) &\equiv (\nu+k)(\nu+k-1)(\nu+k-2)\dots(\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1) \equiv (\nu+1)_k \Gamma(\nu+1) \\ &= (\nu)_k \Gamma(\nu), \end{aligned}$$

espresse in termini di *simboli di Pochhammer* $(\nu)_k$ (ν . [17.2], P. 15, **Esercizio 1.1**).

■

H. Riepilogo delle rappresentazioni in serie reali delle Funzioni di Bessel *Sferico-Ordinarie* e *Sferico-Iperboliche*

$$\bullet \quad x \mapsto j_n(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} J_{n+1/2}(\alpha x) \quad (91)$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{2^{n+1}(\alpha x)^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k+n+3/2)} (\alpha x)^{2k} \quad (91.1)$$

$$\equiv (-1)^n (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{\sin u}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}; \quad (91.2)$$

$$\bullet \quad x \mapsto n_n(\alpha x) := (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} J_{-(n+1/2)}(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} N_{n+1/2}(\alpha x) \quad (92)$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{2^n \pi^{1/2}}{(\alpha x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k-n+1/2)} (\alpha x)^{2k} \quad (92.1)$$

$$\equiv (-1)^{n+1} (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{\cos u}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}; \quad (92.2)$$

$$\bullet \quad x \mapsto h_n^{(1)}(\alpha x) := j_n(\alpha x) + i n_n(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} (J_{n+1/2}(\alpha x) + i N_{n+1/2}(\alpha x)) \equiv h_n^{(2)}(\alpha x)^* \quad (93)$$

$$= (-1)^{n+1} i (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{e^{iu}}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}; \quad (93.1)$$

$$\bullet \quad x \mapsto h_n^{(2)}(\alpha x) := j_n(\alpha x) - i n_n(\alpha x) \equiv \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} (J_{n+1/2}(\alpha x) - i N_{n+1/2}(\alpha x)) \equiv (h_n^{(1)}(\alpha x))^* \quad (94)$$

$$= (-1)^n i (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{e^{-iu}}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}; \quad (94.1)$$

$$\bullet \quad x \mapsto i_n(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2\alpha x} \right)^{1/2} I_{n+1/2}(\alpha x) \quad (95)$$

$$= \frac{\pi^{1/2} (\alpha x)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(k+n+3/2)} (\alpha x)^{2k} \quad (95.1)$$

$$= (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{\sinh u}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}; \quad (95.2)$$

$$\bullet \quad x \mapsto k_n(\alpha x) := \left(\frac{2}{\pi \alpha x} \right)^{1/2} K_{n+1/2}(\alpha x) \quad (96)$$

$$= (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} k!} \left(\frac{(\alpha x/2)^{-(n+1)}}{\Gamma(k-n+1/2)} - \frac{(\alpha x/2)^n}{\Gamma(k+n+3/2)} \right) (\alpha x)^{2k} \quad (96.1)$$

$$= (-1)^n (\alpha x)^n \left(\left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^n \frac{e^{-\alpha x}}{u} \right) \Big|_{u=\alpha x}. \quad (96.2)$$

■

I. Ortogonalità delle Funzioni di Bessel (v. [18.3] e [18.1])

La proprietà di *ortogonalità funzionale* riguarda, nel caso delle *Funzioni di Bessel*, le sole funzioni J_ν e quelle connesse *moltiplicativamente* alle J_ν , i.e., le funzioni j_n , quando $J_\nu \equiv J_{n+1/2}$, e le funzioni n_n e $N_{n+1/2}$, quando $J_\nu \equiv J_{-(n+1/2)}$. La questione, fondamentale in Fisica Quantistica e in Elettrodinamica, rientra nella Teoria delle *Funzioni Ortogonali in un intervallo limitato*. Se ne può trovare una discussione elementare e concisa, e.g., in [17.3], P. 10-13.

Il modo in cui l'*ortogonalità* va intesa e applicata alle funzioni J_ν si fonda sulle due proposizioni generali seguenti:

Proposizioni

- La funzione $x \mapsto J_n(x) \equiv (-1)^n J_{-n}(x)$, con $n \in \mathbb{Z}_0^+$, possiede un numero *infinito* di radici reali disposte simmetricamente rispetto all'origine, dove esiste la radice $x = 0$ *solo se* $n \neq 0$. Tutte le radici di J_n , con $n \neq 0$, sono *semplici*, eccetto $x = 0$, che è di molteplicità n .
- Le radici della funzione $x \mapsto J_\nu(x)$, quando sia $\nu \in (-1, +\infty)$, sono di numero *infinito*, reali, *positive* e tutte *semplici* [dal Teorema di VON LOMMEL (E. C. J., 1837-1899)]. ▲ (†)

Ora, sia $\nu \geq -1/2$ e sia $x_{\nu,m}$ la radice positiva m -sima di J_ν , quindi, tale che $J_\nu(x_{\nu,m}) = 0$, e che $0 < x_{\nu,1} < x_{\nu,2} < \dots < x_{\nu,m} < \dots$, con $m \in \mathbb{Z}^+$. Fissato un valore qualsiasi $L \in \mathbb{R}^+$ e definita la successione numerica crescente di indice m

$$\{\alpha_m\} := \{x_{\nu,m}/L\}, \tag{97}$$

si consideri la successione associata di funzioni nell'intervallo $(0, L)$, anch'essa di indice m ,

$$\{x \mapsto J_\nu(\alpha_m x)\} \equiv \{x \mapsto J_\nu(x_{\nu,m} x/L)\}. \tag{98}$$

Si dimostra (v. [6]) che tale successione di funzioni costituisce un *sistema ortogonale in* $(0, L)$ vs. la *funzione-peso* $w(x) = x$, nel senso che

$$\int_0^L J_\nu(\alpha_m x) J_\nu(\alpha_r x) x dx = (L^2/2) (J_{\nu+1}(x_{\nu,m}))^2 \delta_{m,r}. \tag{99}$$

Come è evidente dalle Eq.i (58.1) e (58.2), poiché le radici di $J_\nu \equiv J_{n+1/2}$ sono anche quelle di j_n mentre le radici di $J_\nu \equiv J_{-(n+1/2)}$ sono anche quelle di n_n e di $N_{n+1/2}$, allora, si deducono immediatamente gli integrali di ortogonalizzazione (con *funzioni-peso* $w(x) = x^2$, per le funzioni j_n e n_n , mentre $w(x) = x$, per le funzioni $N_{n+1/2}$)

$$\int_0^L j_n(\alpha_m x) j_n(\alpha_r x) x^2 dx = (L^2/2) (x_{n+1/2,m} j_n(x_{n+1/2,m}))^2 \delta_{m,r}, \tag{100.1}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L n_n(\alpha_m x) n_n(\alpha_r x) x^2 dx &\equiv \int_0^L N_{n+1/2}(\alpha_m x) N_{n+1/2}(\alpha_r x) x dx \\ &= (L^2/2) (x_{-(n+1/2),m} n_n(x_{-(n+1/2),m}))^2 \delta_{m,r}. \end{aligned} \tag{100.2}$$

■

(†) La questione delicata – molto importante nelle applicazioni – della determinazione delle *radici* delle *Funzioni di Bessel* è affrontata nitidamente in [3], § 5.9-10-11, e, anche, in [1], [4] e [6]; né vanno trascurate le tabelle in [3] e [12].

J. Approssimazioni delle Funzioni di Bessel

J.1 Il Simbolo di Hankel

Sia assegnato $\nu \in \mathbb{R}$, tale che $\nu - 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Inoltre, sia $j \in \mathbb{Z}^+$.

Per ridurre il rapporto

$$g_{\nu,j} := \frac{\Gamma(1/2 + \nu + j)}{\Gamma(1/2 + \nu - j)} \equiv \frac{\Gamma((1/2 + \nu) + j)}{\Gamma((1/2 + \nu) - j)} \quad (101)$$

a forma algebrica elementare, conviene iniziare dall'identità (e.g., v. [17.2], Eq. (26))

$$\Gamma(1/2 + x) \Gamma(1/2 - x) = \pi / \cos \pi x,$$

dal cui *prolungamento massimale* in \mathbb{R} , si può scrivere, dopo il cambiamento $x \mapsto j - \nu$,

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2 + (j - \nu)) \Gamma(1/2 - (j - \nu)) &= \frac{\pi}{\cos(\pi(j - \nu))} \equiv \frac{\pi}{\cos(\pi j) \cos(\nu \pi) + \cancel{\sin(\pi j) \sin(\nu \pi)}} \\ &= (-1)^j \pi / \cos(\nu \pi), \end{aligned}$$

o, in modo equivalente,

$$\Gamma(1/2 - (j - \nu)) = \frac{(-1)^j \pi}{\cos(\nu \pi) \Gamma((1/2 - \nu) + j)}. \quad (101.1)$$

Sostituendo l'espressione (101.1) nel denominatore dell'Eq. (101), risulta

$$g_{\nu,j} = \frac{(-1)^j \cos(\nu \pi)}{\pi} \Gamma((1/2 + \nu) + j) \Gamma((1/2 - \nu) + j). \quad (101.2)$$

Il prodotto tra le funzioni Γ nell'Eq. (101.2) può essere ridotto mediante la *Proprietà Iterativa* (9) in [17.2]. Procedendo separatamente, per comodità, con ciascun Γ -fattore, si ha,

definito $\lambda := 1/2 + \nu$,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Gamma((1/2 + \nu) + j) &\equiv \Gamma(\lambda + j) \\ &= (\lambda + j - 1)(\lambda + j - 2) \dots (\lambda + 2)(\lambda + 1) \lambda \Gamma(\lambda) \\ &= (j - 1/2 + \nu)(j - 3/2 + \nu) \dots (3/2 + \nu)(1/2 + \nu) \Gamma(1/2 + \nu); \end{aligned} \quad (101.3)$$

analogamente, dopo aver definito $\mu := 1/2 - \nu$,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Gamma((1/2 - \nu) + j) &\equiv \Gamma(\mu + j) \\ &= (\mu + j - 1)(\mu + j - 2) \dots (\mu + 2)(\mu + 1) \mu \Gamma(\mu) \\ &= (j - 1/2 - \nu)(j - 3/2 - \nu) \dots (3/2 - \nu)(1/2 - \nu) \Gamma(1/2 - \nu). \end{aligned} \quad (101.4)$$

Sostituendo i prodotti (101.3) e (101.4) nell'Eq. (101.2), questa diventa

$$\begin{aligned} g_{\nu,j} &= (-1)^j \frac{\cancel{\cos \nu \pi}}{\pi} \underbrace{((j - 1/2)^2 - \nu^2)((j - 3/2)^2 - \nu^2) \dots ((3/2)^2 - \nu^2)((1/2)^2 - \nu^2)}_{j \text{ fattori}} \frac{\pi}{\cancel{\cos \nu \pi}} \\ &= \frac{1}{2^{2j}} (4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9) \dots (4\nu^2 - (2j - 3)^2)(4\nu^2 - (2j - 1)^2) \\ &\equiv \frac{1}{2^{2j}} \prod_{m=1}^j (4\nu^2 - (2m - 1)^2). \end{aligned} \quad (101.5)$$

Si osservi che, per $\nu = \pm(s - 1/2)$, con $s \in \mathbb{Z}^+$, il prodotto (101.5) è *nullo*. Questo rende ragione

della condizione iniziale $\nu - 1/2 \notin \mathbb{Z}$, con la quale, sono evitate le divergenze dei Γ -termini nell'Eq. (101) quando $(1/2 + \nu \pm j) \in \mathbb{R}_0^-$.

Mediante l'Eq. (101.5), viene introdotta la notazione sintetica $h_{\nu,j}$, nota come *Simbolo di Hankel* (v. [3], [6]), utilizzata nella rappresentazione dei coefficienti di certe serie asintotiche relative alle *Funzioni di Bessel* (v. § J.3, Eq.i (107), ..., (113)):

$$h_{\nu,j} := \frac{g_{\nu,j}}{j!} = \frac{\Gamma(1/2 + \nu + j)}{j! \Gamma(1/2 + \nu - j)}. \quad (102)$$

La definizione (102) è estendibile anche a $j = 0$, avendosi, per sostituzione diretta, $h_{\nu,0} = 1$.

Quindi, in forma algebrica elementare, si scrive

$$h_{\nu,j} = \begin{cases} 1, & \text{per } j = 0, \\ \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9) \dots (4\nu^2 - (2j - 1)^2)}{2^{2j} j!} \equiv \frac{\prod_{m=1}^j (4\nu^2 - (2m - 1)^2)}{2^{2j} j!}, & \forall j \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad \downarrow (102.1)$$

Per il *Simbolo di Hankel*, vale, $\forall j \in \mathbb{Z}_0^+$, la formula iterativa evidente

$$h_{\nu,j+1} = \frac{4\nu^2 - (2j + 1)^2}{4(j + 1)} h_{\nu,j}. \quad (102.2)$$

□

J.2 Approssimazione asintotica per $x \gg 1$ (v. [5], [8])

Frequentemente (e.g., in molti problemi di Fisica Teorica), è necessario conoscere accuratamente come una funzione di Bessel qualsiasi, ordinaria o iperbolica, si comporta per valori 'grandi' (i.e., $\gg 1$) del suo argomento x . In questa circostanza, il computer è di scarso aiuto se usato 'di forza bruta', senza un'analisi numerica preventiva, *meditata e specifica!*

□

Il punto di partenza convenzionale è la *rappresentazione integrale* seguente di $K_\nu(x)$ (v. [1], [5],[6]), valida $\forall \nu \in (-1/2, +\infty)$ e, qui, ristretta a $x \in \mathbb{R}^+$:

$$K_\nu(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\nu-1/2} (1 + t/(2x))^{\nu-1/2} dt. \quad (103)$$

La limitazione sui valori di ν è irrilevante, valendo, $\forall \nu \in \mathbb{R}$, la proprietà di simmetria *indiciale* $K_\nu(x) \equiv K_{-\nu}(x)$ (v. Eq. (90) o (47.k)), verificabile elementarmente.

Nel seguito di questa discussione, si assumerà ν fissato.

Circa il calcolo dell'integrale nella rappresentazione (103), l'idea più immediata (e fuorviante!) da cui si potrebbe essere indotti è quella di espandere $(1 + t/(2x))^{\nu-1/2}$ come serie binomiale e, quindi, di integrare termine-a-termine la somma ottenuta, confidando (?) nella sua convergenza *uniforme* in \mathbb{R}^+ . Ma neppure la condizione che sia, *almeno*, $t < 2x$, può essere mantenuta *definitivamente* durante l'integrazione in \mathbb{R}^+ ! Dunque, la via analitica esatta è preclusa!

Resta l'*approssimazione asintotica*.

L'integrale (103) appartiene alla classe degli *Integrali di Laplace* (v. [8]). La sua funzione integranda

contiene il fattore e^{-t} , *dominante* per $t \rightarrow +\infty$ e $\forall x$ finito. Ciò comporta che la prosecuzione *formale* nell'integrazione termine-a-termini – analiticamente *non giustificabile* – introduce solo un errore *piccolo esponenzialmente* nel risultato, in forza del *Lemma di Watson* (v. [2], [3], [5], [6], [7]). Anzi, il Lemma di Watson fornisce il risultato esplicitamente, con l'integrale *convergente* proprio al valore x -parametrico $K_\nu(x)$.

□

J.3 Il Lemma di Watson (formulazione in \mathbb{R})

Sia $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ una funzione *generalmente continua*, tale che

$$f(t) \sim t^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$$

definitivamente per $t = o(1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Inoltre, la funzione integrale (*à-la Laplace*)

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

sia, definitivamente, semplicemente convergente per $x \rightarrow +\infty$. Allora, per $x \rightarrow +\infty$, F possiede il comportamento asintotico

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \Gamma(k + \lambda) x^{-(k + \lambda)}. \blacktriangle \quad (\text{I})$$

□

Nel caso della rappresentazione integrale (103) di $K_\nu(x)$, si esegua la trasformazione $t \mapsto xt$ nel differenziale integrando, ottenendo la rappresentazione *à-la Laplace-Watson*

$$K_\nu(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{e^{-x} x^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{\nu-1/2} (1+t/2)^{\nu-1/2} dt. \quad (\text{II})$$

Nella rappresentazione (II), si riconosce $f(t) \equiv t^{\nu-1/2} (1+t/2)^{\nu-1/2}$. Inoltre, per $t = o(1)$, vale definitivamente l' \mathcal{M} -espansione

$$f(t) \equiv t^{\nu-1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k} \binom{\nu-1/2}{k} \right) t^k \equiv t^{(\nu+1/2)-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^k k! \Gamma(\nu+1/2-k)} t^k,$$

dalla quale, si deducono le quantità parametriche

$$\lambda \equiv \nu + 1/2, \quad c_k \equiv \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^k k! \Gamma(\nu+1/2-k)}. \quad (\text{III})$$

L'espansione asintotica (II) segue per sostituzione diretta nell'Eq. (I) delle espressioni (III) di λ e di c_k .

□

Comunque, se si ignora il *Lemma di Watson* e si sostituisce l'espansione *puramente formale*

$$(1+t/(2x))^{\nu-1/2} \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\nu-1/2}{k} (t/(2x))^k \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)} (t/(2x))^k$$

nell'Eq. (103), scambiando le operazioni di integrazione e di somma di una serie (come *sarebbe* lecito in regime di convergenza *uniforme* in un intervallo *compatto*), si determina, dall'Eq. (103),

$$K_\nu(x) \doteq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu+1/2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{k! \Gamma(\nu+1/2-k) (2x)^k} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\nu-1/2+k} dt$$

$$\begin{aligned} &\cong \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + k)}{k! \Gamma(\nu + 1/2 - k) (2x)^k} \\ &\cong \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h_{\nu,k}}{(2x)^k} . \end{aligned} \quad (104)$$

Qui, il simbolo relazionale \cong significa: *uguaglianza puramente formale*.

Arrestando l'espansione *formale* (104) al termine di indice arbitrario $k \equiv M (\in \mathbb{Z}^+)$, secondo l'accuratezza richiesta, si ottiene un'approssimazione di $K_\nu(x)$, per $1 \ll x$, a meno di un errore avente un ordine di grandezza *non-superiore* a quello del primo termine trascurato. Solitamente, il controllo numerico si rivela di un'accuratezza sorprendente e piuttosto stabile nonostante il numero esiguo di addendi necessari e, soprattutto, il carattere *divergente* della serie (104) stessa (verificabile, e.g., con il *Criterio del Rapporto*)! Ciò è tipico delle *Serie Asintotiche* (v. [3], [5]).

Correttamente, per $x \gg 1$, si ha

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \sum_{k=0}^M \frac{h_{\nu,k}}{(2x)^k} + \mathcal{O}(x^{-(M+1)}) \\ &\sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{18x} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)}{3!(8x)^3} + \dots \right) . \end{aligned} \quad \downarrow (105)$$

□



Hermann Hankel (v. cit. a P. 2)

Per l'espressione (105), Hankel introdusse (~ 1869) due *somme* finite ausiliarie *complementari*, $\Phi_\nu(x)$ e $\Psi_\nu(x)$. Rispettivamente, Φ_ν e Ψ_ν sono funzioni *pari* e *dispari* di potenze *negative* di x . Esse, insieme, costituiscono una sequenza ordinata di $M + 1$ addendi (con M arbitrario) presi *alternatamente* dall'una e dall'altra somma, iniziando da $\Phi_\nu(x)$, la somma *pari*.

Tali *Somme di Hankel* sono rappresentabili esplicitamente nelle forme seguenti:

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x) &:= \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{h_{\nu,2k}}{(2x)^{2k}} \\ &\equiv 1 - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)(4\nu^2 - 49)}{4!(8x)^4} - \dots \\ &\quad \downarrow - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)(4\nu^2 - 49)(4\nu^2 - 81)(4\nu^2 - 121)}{6!(8x)^6} + \dots , \end{aligned} \quad (106.1)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\nu(x) &:= \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{h_{\nu, 2k+1}}{(2x)^{2k+1}} \\ &\equiv \frac{4\nu^2 - 1}{1!8x} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)}{3!(8x)^3} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)(4\nu^2 - 49)(4\nu^2 - 81)}{5!(8x)^5} - \dots \\ &\quad \downarrow - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)(4\nu^2 - 49)(4\nu^2 - 81)(4\nu^2 - 121)(4\nu^2 - 169)}{7!(8x)^7} + \dots \end{aligned} \quad (106.2)$$

I fattori goniometrici contenuti nei termini generali delle somme (106.1) e (106.2) selezionano gli addendi *non-nulli* di queste al variare dell'indice k . Dalla loro forma, è immediato verificare che

$$K_\nu(x) \sim (\pi/(2x))^{1/2} e^{-x} (\Phi_\nu(ix) + \Psi_\nu(ix)). \quad (107)$$

Infatti, in $\Phi_\nu(x)$ e in $\Psi_\nu(x)$, definite come somme di addendi di segno *alterno*, la trasformazione $x \mapsto ix$, rendendo tali segni tutti *positivi*, genera l'espansione asintotica (105). Inoltre, la somma $\Phi_\nu(x)$, contenendo, *lei sola*, un addendo costante, domina definitivamente su $\Psi_\nu(x)$, per $x \gg 1$. L'espansione (107) è la *generatrice* delle espansioni asintotiche di tutte le altre *Funzioni di Bessel* considerate. Dopo aver introdotto la notazione sintetica

$$\vartheta_\nu(x) := x - (\nu + 1/2)\pi/2, \quad (108)$$

dall'identità (cf/c **Esercizio 1**, P. 11)

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv (2/\pi) i^{-(\nu+1)} K_\nu(-ix), \quad (109)$$

si ottiene facilmente ([†])

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim (2/(\pi x))^{1/2} e^{i\vartheta_\nu} (\Phi_\nu(x) + i\Psi_\nu(x)). \quad (110.1)$$

La funzione di Hankel $H_\nu^{(2)}$ è la *coniugata* complessa di $H_\nu^{(1)}$. Quindi,

$$H_\nu^{(2)}(x) \sim (2/(\pi x))^{1/2} e^{-i\vartheta_\nu} (\Phi_\nu(x) - i\Psi_\nu(x)); \quad (110.2)$$

poiché, rispettivamente, $J_\nu(x) \equiv \Re H_\nu^{(1)}(x)$ e $N_\nu(x) \equiv \Im H_\nu^{(1)}(x)$, allora,

$$J_\nu(x) \sim (2/(\pi x))^{1/2} (\Phi_\nu(x) \cos \vartheta_\nu - \Psi_\nu(x) \sin \vartheta_\nu), \quad (111)$$

$$N_\nu(x) \sim (2/(\pi x))^{1/2} (\Phi_\nu(x) \cos \vartheta_\nu + \Psi_\nu(x) \sin \vartheta_\nu). \quad (112)$$

Infine, sfruttando la connessione tra la *Funzione di Bessel Iperbolica* (o *Modificata*) di 1° tipo (o *regolare*) I_ν , e la *Funzione di Bessel Ordinaria* di 1° tipo J_ν (v. Eq. (34.1) o (89)), si trova che

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} (\Phi_\nu(ix) - i\Psi_\nu(ix)) \equiv \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{h_{\nu,k}}{(2x)^k}. \quad (113)$$

([†]) Per una verifica dell'Eq (109), si sostituisca l'Eq. (3) nell'Eq. (87); poi, si esprimano le funzioni $J_{\pm\nu}$ mediante le funzioni $I_{\pm\nu}$ (v. Eq. (85)) e, all'occorrenza, si osservi che $e^{i\pi\nu} \equiv i^{-2\nu} = (-1)^\nu$. Il resto è algebra semplice.

Osservazioni 4

- a. J_ν e N_ν tendono a comportarsi come le funzioni *coseno* e *seno*, rispettivamente. Le loro radici appaiono spaziate quasi regolarmente a intervalli di ampiezza $\Delta x \approx \pi$; la spaziatura Δx tende a π per $x \rightarrow +\infty$. Pertanto, quando $x \gg 1$, stime *meno raffinate* di quelle fornite dalle Eq.i (111) e (112) danno

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} (\cos \vartheta_\nu(x) + O(x^{-1})), \quad (114.1)$$

$$N_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} (\sin \vartheta_\nu(x) + O(x^{-1})), \quad (114.2)$$

i.e., per $x \rightarrow +\infty$, le *Funzioni di Bessel Ordinarie* mostrano un comportamento oscillatorio, di *modulazione d'ampiezza* (involuppo) infinitesima asintoticamente come $|x|^{-1/2}$.

- b. Si è visto che il comportamento asintotico di $H_\nu^{(1)}(x)$ e di $H_\nu^{(2)}(x)$ dipende definitivamente da quello di un esponenziale complesso mentre quelli di $I_\nu(x)$ e di $K_\nu(x)$ dipendono da un fattore esponenziale reale crescente e, rispettivamente, decrescente. Questo fenomeno, talvolta, è sufficiente per trascurare convenientemente l'una o l'altra di tali funzioni nell'analisi asintotica.
- c. Nel caso delle *Funzioni di Bessel Sferiche*, sia *Ordinarie* che *Iperboliche*, si ha $\nu = \pm(m - 1/2)$, con $m \in \mathbb{Z}_0^+$ (v. Osservazione 3, P. 18). La serie formale (104) si riduce, allora, alla somma di un numero *finito* di addendi e le approssimazioni asintotiche (107), ..., (113) diventano *soluzioni esatte*.
- d. L'analisi asintotica descritta sopra trova applicazioni nella diffusione radiativa EM a distanze *intermedie* e *grandi* e nella propagazione quantistica non-relativistica *à-la Born in onde distorte* (DWBA) tipica della fenomenologia sub-atomica.

□

J.4 Approssimazioni asintotiche in regime infinitesimo ($0 < x \equiv o(1)$)

Nel limite $x \rightarrow 0^+$, l'analisi asintotica diventa più agevole di quella sviluppata per $x \gg 1$, potendo, in questo caso, usare direttamente le rappresentazioni in serie analitiche (85), ..., (90.2).

Fissato, in generale, $\nu \in \mathbb{R}^+$, salvo dove sia specificato altrimenti, ecco un elenco di risultati utili:

$$\bullet \quad J_0(x) \sim 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} \sim I_0(-ix); \quad (115.1)$$

$$\bullet \quad J_\nu(x) \sim \frac{x^\nu}{2^\nu \nu \Gamma(\nu)} \left(1 - \frac{x^2}{4(\nu+1)} + \frac{x^4}{32(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{x^6}{384(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \right. \\ \left. \downarrow + \frac{x^8}{6144(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} \right) \sim i^\nu I_\nu(-ix), \quad (115.2)$$

valida $\forall \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$;

$$\bullet \quad N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2) + O(x^2) \sim -\frac{2}{\pi} K_0(x); \quad (116.1)$$

$$\bullet \quad N_\nu(x) \sim -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu} \sim -\frac{2}{\pi} K_\nu(x); \quad (116.2)$$

$$\bullet \quad H_0^{(1)}(x) \sim 1 + i \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2) \sim 1 + i N_0(x) \sim H_0^{(2)}(x)^*; \quad (117.1)$$

$$\bullet \quad H_\nu^{(1)}(x) \sim i \frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu} \sim -i N_\nu(x) \sim H_\nu^{(2)}(x)^*; \quad (117.2)$$

$$\bullet \quad I_0(x) \sim 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} \sim J_0(ix); \quad (118.1)$$

$$\bullet \quad I_\nu(x) \sim \frac{x^\nu}{2^\nu \nu \Gamma(\nu)} \left(1 + \frac{x^2}{4(\nu+1)} + \frac{x^4}{32(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{x^6}{384(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \right. \\ \left. \downarrow + \frac{x^8}{6144(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} \right) \sim i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad (118.2)$$

valida $\forall \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$;

$$\bullet \quad K_0(x) \sim -\ln x - \gamma + \ln 2 \sim -\frac{\pi}{2} N_0(x); \quad (119.1)$$

$$\bullet \quad K_\nu(x) \sim \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^\nu} \sim -\frac{\pi}{2} N_\nu(x) \sim K_{-\nu}(x). \quad (119.2)$$

Osservazione 5

Nei casi in cui i valori di ν e di x sono *diversi* da quelli fin qui considerati – purché *ammissibili* – (e.g., in presenza di simmetrie e, soprattutto, delle funzioni *derivate* delle *Funzioni di Bessel*, come nel calcolo di un wronskiano), l'analisi asintotica va *preceduta* da trasformazioni opportune (reperibili dalla teoria) che riducano le espressioni in gioco alle *sole* quattro funzioni fondamentali J_ν , N_ν , I_ν e K_ν ($H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ sono riconducibili prontamente a J_ν e a N_ν).

■

K. Ricette numeriche elementari per le Funzioni di Bessel

Nel trattamento numerico delle varie *Funzioni ‘Speciali’*, le *Funzioni di Bessel* presentano, spesso, le difficoltà maggiori. Però, l’affidarsi in modo passivo alle routines dei pur migliori programmi di calcolo (e.g., *Maxima*^{fr-sfwr} [16], *SciLab*^{fr-sfwr} [18], *Mathematica*TM, *Octave*^{fr-sfwr}, *Matlab*TM, ...) non si rivela sempre conveniente sia per la richiesta di interazione alquanto pesante con la memoria RAM sia, soprattutto, per la difficoltà di un *controllo locale* accurato del processo effettivo di calcolo. Qualsiasi routine generale, quand’ anche ‘robusta’, dovrebbe essere *preparata* al problema specifico, *mai* abbandonata a sé stessa fiduciosamente! La *salutare* diffidenza del ‘resta in comando di ogni routine, *piegandola* in modo *mirato* a ciò che ti serve’ risulta, alla lunga, remunerativa.

La pratica numerica da *layman* – filtrata attraverso perplessità e frustrazioni innumerevoli – mi ha lasciato alcune ‘buone regole’ di taglio in \mathbb{R}^+ , condensate nella tabella sottostante e applicabili nel range indiciale $\nu \in [0, 15]$, circa l’uso dell’una o dell’altra serie approssimante. Per $\nu > 15$, si consultino [6], CAP. 13, [8] e [9]. La tabella resta sempre in attesa di miglioramenti significativi.

$C_\nu(x)$	Serie Analitica	Serie Asintotica
$J_\nu(x)$	Eq.i (85), (115.1), (115.2), per $x \leq 6$	Eq. (112), per $x > 6$
$N_\nu(x)$	Eq.i (86), (86.1), (86.2), (86.3), (110.1), (110.2), per $x \leq 4$	Eq. (113), per $x > 4$
$I_\nu(x)$	Eq.i (89), (118.1), (118.2), per $x \leq 12$ o per $x \leq \nu$	Eq. (114), per $x > 12$ o per $x > \nu$
$K_\nu(x)$	Eq.i (90), (90.1), (90.2), (119.1), (119.2), per $x \leq 1.5$	Eq.i (107), (105), per $x > 1.5$

Infine, il tracciamento del grafico di *qualsiasi* funzione cilindrica C_ν richiede cura per realizzare un raccordo ‘regolare’ (*smooth*) tra il ramo *analitico* e quello *asintotico*. Necessariamente, devono essere assicurate le *condizioni di regolarità alla frontiera* ($\in \mathcal{C}^1$: *smooth boundary conditions*),

$$\begin{cases} C_\nu^-(x_0) = C_\nu^+(x_0) \\ (dC_\nu(x_0)/dx)^- = (dC_\nu(x_0)/dx)^+ \end{cases}, \quad (114)$$

dove, x_0 è l’ascissa del *punto di raccordo* tra i due rami. L’effetto appropriato sembra dipendere sia dal numero di addendi di ciascuna serie (troncata), ‘aggiustato’ tenendo conto del valore di ν (in un’ottica ‘fai-da-te’, un numero di addendi compreso tra 250 e 500 è, in generale, largamente sufficiente per una serie *analitica*; per una serie *asintotica*, un impiego di 10 o 12 addendi può rivelarsi, addirittura, eccessivo ... tutto dipende dal valore di x_0) sia dagli andamenti quanto più ‘regolari’ possibile di $(dC_\nu(x_0)/dx)^-$ (derivata sinistra *analitica*) e di $(dC_\nu(x_0)/dx)^+$ (derivata destra *asintotica*) ciascuna nel semi-intorno rispettivo di x_0 e lì calcolata.

Talvolta, sorprendentemente, una scelta indovinata di x_0 , raffinata con pazienza (*trial-an’-error*) o, più semplicemente, ... ‘coraggiosa’, diversa dai valori indicati nella tabella precedente, può rivelarsi di successo. ■

L. Determinanti Wronskiani delle Equazioni Cilindriche

Nel BACKGROUND INTRODUTTIVO, PP. V-VII, si è fatto cenno alla varietà di *Funzioni Cilindriche* necessarie per applicazioni consistenti in regimi *differenti tra loro*, compreso quello di *raccordo empirico di contiguità (boundary)* discusso al paragrafo **K**. È chiaro che l'impiego coordinato di due Funzioni Cilindriche e delle loro derivate 1^e , Eq.i (114), rimanda alla verifica della loro mutua *indipendenza lineare* e, pertanto, al calcolo del loro *determinante Wronskiano*; esplicitamente, al calcolo di *identità iterative generali* (PP. 10-18 e 20). Questo controllo *deve precedere* l'applicazione di *qualsiasi* algoritmo numerico per una programmazione consistente.

Nel math-notebook EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI - METODI DI INTEGRAZIONE, Eq. (59), P. 25, è riportata la formula di *Liouville-Jacobi* del determinante *Wronskiano* di due soluzioni *linearmente indipendenti* dell'equazione *omogenea* (1) definite in \mathcal{J} ,

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x_0) e^{-\int p(x)dx},$$

con $W(x_0) \neq 0, \forall x_0 \in \mathcal{J}$.

Nel caso del Wronskiano W_B di un *sistema fondamentale* qualsiasi $\{C_1(x), C_2(x)\}$ di Funzioni Cilindriche, soluzioni dell'Equazione di Bessel di rango ν ($\in \mathcal{C}$, in generale), si scrive

$$W_B(x) \equiv \begin{vmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ C_1'(x) & C_2'(x) \end{vmatrix} = W_B(x_0) e^{-\int p(x)dx}. \quad (115)$$

Quindi, l'Eq. (1) è soddisfatta dalle identità

$$\begin{aligned} x^2 C_1'' + x C_1' + (x^2 - \nu^2) C_1 &= 0 \\ x^2 C_2'' + x C_2' + (x^2 - \nu^2) C_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{i.e., dalle} \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(x C_1') + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) C_1 &= 0 \\ \frac{d}{dx}(x C_2') + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) C_2 &= 0 \end{aligned},$$

in rappresentazione operatoriale (1.1). A loro volta, le due ultime forme sono equivalenti a

$$\left(\frac{d}{dx}(x C_1')\right) C_2 + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) C_1 C_2 = 0, \quad (16.1)$$

$$\left(\frac{d}{dx}(x C_2')\right) C_1 + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) C_1 C_2 = 0, \quad (16.2)$$

Ora, sottraendo membro-a-membro l'Idn. (16.1) dall'Idn. (16.2), si ottiene

$$\frac{d}{dx}(x(C_1 C_2' - C_2 C_1')) = \frac{d}{dx}(x W_B) = 0$$

integrando la quale e dividendo per $x \neq 0$, risulta

$$W_B(x) = \frac{\beta}{x} \equiv W_B(x_0) e^{-\int p(x)dx}. \quad (17)$$

La costante di integrazione β , *specificata* di ogni sistema fondamentale $\{C_1, C_2\}$ è, in ogni caso, *indipendente* da x . La si può determinare dal

$$\lim_{x \rightarrow x_0} xW(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} xW_B(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} = \beta, \quad (17.1)$$

$\forall x_0 \in \mathcal{J}$ scelto in modo conveniente per i calcoli (il processo di limite deve sempre *seguire* quello del calcolo dell'esponente integrale).

□

Come esempio-guida, si consideri $C \equiv J_\nu$, con $\nu \notin \mathbb{Z}$, momentaneamente, e si scelga $x_0 = 0$.

Se $|x| < 1$, allora, $\dots < x^{2k} < x^{2(k-1)} < \dots < x^{2 \cdot 1} < x^{2 \cdot 0} \equiv 1$. Quindi, si ha definitivamente che

$$x^{2k} = 1 + O(x^2) \quad (18)$$

nel regime $\lim_{|x| \rightarrow 0} J_\nu(x)$. La condizione (18) è *equivalente* ad affermare che, nell'espansione (14), il contributo *dominante* della rappresentazione in serie proviene *soltanto dal primo termine*, quello di indice $k = 0$. Ne segue che

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{(-1)^0}{(2^2)^0 0! \Gamma(\nu+1)} (1 + O(x^2)) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \quad (19.1)$$

e, analogamente,

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{2^\nu}{x^\nu \Gamma(1-\nu)} \quad (19.2)$$

Per quanto riguarda le funzioni J'_ν e $J'_{-\nu}$, si può far ricorso, e.g., all'Idn. (44.3), P. 10 (v., anche, [3], P. 205, Eq.i (5.4.13) e (5.4.14); [2], P. 103, Eq.i (5.3.6)), ottenendo, rispettivamente,

$$J'_\nu(x) \approx \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \quad (20.1)$$

$$J'_{-\nu}(x) \approx -\frac{2^\nu \nu x^{\nu-1}}{\Gamma(1-\nu)} \quad (20.2)$$

Introducendo le espressioni (19.1), ..., (20.1) nell'Eq. (115) e tenendo conto dell'Eq. (117), si trova

$$W_B(x) \equiv \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = -\frac{2 \sin(\nu\pi) / \pi}{x} \equiv \frac{\beta}{x} \quad (21)$$

applicando la *Proprietà di Riflessione* della Funzione Γ , prolungata analiticamente (in senso reale) a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ (v., e.g., [18.2], P. 10). Se $\nu \in \mathbb{Z}$, si ha $W_B(x) \equiv 0$, i.e., J_ν e $J_{-\nu}$ diventano linearmente *dipendenti* vs. l'indice parametrico *continuo* ν che, di fatto, funge da variabile associata a x . Da qui traggono origine in \mathcal{C} , mediante rappresentazioni integrali (*contour integrations*) opportune, le definizioni in serie di Funzioni Cilindriche ulteriori caratterizzate, nell'origine dei loro argomenti, da singolarità essenziali (logaritmiche), com'è noto.

□

L'analisi precedente si applica identicamente a *qualsiasi* sistema fondamentale, $\{C_1(x), C_2(x)\}$ o $\{c_1(x), c_2(x)\}$, di Funzioni Cilindriche. I calcoli, non-difficili ma che richiedono sempre un'attenzione particolare all'analisi condotta nel regime-limite $|x| \rightarrow 0$, portano ai risultati citati nel BACKGROUND INTRODUTTIVO. È un invito per una verifica personale.

■■■

Problema

Una membrana circolare di raggio b e *densità radiale* (i.e., massa/distanza-dal-centro) uniforme \mathcal{D} viene tesa fissandone il bordo a un telaio sottile e rigido. Inizialmente in quiete sotto la *forza di tensione* uniforme T (incognita), la membrana riceve, quindi, una sollecitazione impulsiva nel suo centro, che ne provoca *piccole* vibrazioni. Se queste insorgono in regime *dinamico* di *isolamento* sostanziale della membrana e se ω_0 ne indica la frequenza ciclica *fondamentale*,

I. si determini un'espressione della forza di tensione T nella membrana;

II. nella membrana viene tagliato un foro concentrico di raggio $b/5$.

Si determini la *variazione percentuale* di ω_0 necessaria perché la tensione iniziale T nella membrana resti *invariata*.

Soluzione

I. Chiaramente, il problema è a supporto (dominio spaziale) bi-dimensionale e a simmetria cilindrico-azimutale.

In coordinate cilindrico-azimutali piane, l'ampiezza delle *piccole* vibrazioni, $z = z(\rho, \varphi, t)$, dipendente anche dalla coordinata temporale t , deve soddisfare l'equazione ondulatoria *stazionaria* del moto (dato l'*isolamento dinamico* della membrana)

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mathcal{D}}{T} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) z(\rho, \varphi, t) = 0,$$

equivalente alla forma esplicita

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\mathcal{D}}{T} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) z(\rho, \varphi, t) = 0. \quad (1)$$

In questo caso, la *condizione ai limiti* è $z(b, \varphi, t) = 0$. Si noti che, dimensionalmente, $[z] = \text{lunghezza}$.

Con il *metodo di separazione delle variabili*, si pone

$$z(\rho, \varphi, t) := R(\rho) F(\varphi) Z(t).$$

Quindi, l'equazione del moto (1) si riscrive

$$F(\varphi) Z(t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) R(\rho) + \frac{R(\rho) Z(t)}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F(\varphi) = \frac{\mathcal{D}}{T} R(\rho) F(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} Z(t). \quad (2)$$

Dividendo completamente l'Eq. (2) per $R(\rho) F(\varphi) Z(t) \neq 0$, con $[R(\rho)] = \text{lunghezza}$, si ottiene

$$\frac{1}{R(\rho)} \left(\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 F(\varphi)} \frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \frac{\mathcal{D}}{T} \frac{1}{Z(t)} \frac{\partial^2 Z(t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

La separazione delle variabili (indipendenti) realizzata con l'Eq. (3), valida $\forall \{\rho, \varphi, t\}$ ammissibile, implica che le espressioni dei due membri siano uguali *simultaneamente* a una costante opportuna di *separazione*, che va assegnata in coerenza con la dinamica specifica del sistema-membrana. Sarà subito chiara la scelta

$$\frac{\mathcal{D}}{T} \frac{1}{Z(t)} \frac{\partial^2 Z(t)}{\partial t^2} = -k^2, \quad (4)$$

equivalente all'*equazione temporale* d'onda stazionaria viaggiante

$$\frac{\partial^2 Z(t)}{\partial t^2} + \omega^2 Z(t) = 0, \quad (5)$$

nella quale, è definita la *frequenza ciclica* d'onda

$$\omega := k \left(\frac{T}{\mathcal{D}} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Da un controllo *dimensionale*, si trova che $[(T/\mathcal{D})^{1/2}] = \text{lunghezza} \cdot (\text{tempo})^{-1}$ e $[\omega] = (\text{tempo})^{-1}$. Allora, deve risultare $[k] = (\text{lunghezza})^{-1}$. Se si assume $k \equiv 2\pi/\lambda := \hat{\lambda}^{-1}$, il numero di lunghezze d'onda contenute nella lunghezza ciclica $2\pi \cdot 1$ della circonferenza armonica di raggio $\rho = 1$, segue che k può essere interpretato come *numero d'onda*. In sostanza, $(T/\mathcal{D})^{1/2}$ corrisponde alla *velocità di propagazione* ondosa vibrazionale stazionaria.

La soluzione generale dell'Eq. temporale (5) è della forma consueta

$$Z(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t .$$

Dal confronto tra le Eq.i (3) e (4), segue che

$$\frac{1}{R(\rho)} \left(\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 F(\varphi)} \frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -k^2 ,$$

i.e., dovendo preservare *anche* la stazionarietà della soluzione azimutale (angolare), si ha

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \left(\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{F(\varphi)} \frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} \equiv m^2 , \quad (7)$$

con $m \in \mathcal{Z}^+$. La soluzione generale dell'*equazione azimutale*,

$$\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} + m^2 F(\varphi) \equiv 0 , \quad (8)$$

è, pertanto, formalmente identica a quella dell'Eq. temporale (5):

$$F(\varphi) = c_3 \cos(m\varphi) + c_4 \sin(m\varphi) .$$

Infine, dall'Eq. (7), si estrae la *parte radiale* pura dell'equazione d'onda complessiva:

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \left(\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + k^2 \rho^2 = m^2 ,$$

per la quale, definite le variabili $\xi := k\rho$ e $\Psi(\xi) := R(\xi/k) \equiv R(\rho)$, semplificando e riordinando i termini, si arriva all'*Equazione di Bessel*

$$\frac{\partial^2 \Psi(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi(\xi)}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2} \right) \Psi(\xi) = 0 . \quad (9)$$

La soluzione generale dell'Eq. (9) si scrive:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= c_5 J_m(\xi) + c_6 N_m(\xi) \\ &\equiv c_5 J_m(k\rho) + c_6 N_m(k\rho) \equiv R(\rho) , \end{aligned} \quad (10)$$

i.e., come combinazione lineare delle *Funzioni di Bessel* di 1° e di 2° tipo, di ordine m . D'altra parte, nel caso di una membrana *intera*, le funzioni di 2° tipo, N_m , vanno *escluse* poiché presentano una *singolarità logaritmica* per $\rho = 0$.

Pertanto, assegnata $c_6 = 0$, l'*unica* soluzione *fisica* radiale è data da

$$R(\rho) = c_5 J_m(k\rho) . \quad (11)$$

Inoltre, l'ordine inferiore delle vibrazioni (frequenza ciclica minima) è $m = 0$. Ne segue che la prima radice, di $J_0(k\rho)$ è $\xi_0 \approx 2.40483 \equiv kb$, che corrisponde a una *semi-lunghezza* d'onda stazionaria, uguale al raggio della membrana, $\lambda/2 = b$.

Quindi, sostituendo

$$k = \frac{\xi_0}{b} \approx \frac{2.40483}{b}$$

nell'Eq. (6), con $\omega \equiv \omega_0$, e risolvendo vs. T , si ottiene

$$T = \left(\frac{\omega_0}{k} \right)^2 \mathcal{D} \approx \left(\frac{\omega_0 b}{2.40483} \right)^2 \mathcal{D} \approx 0.17292 (\omega_0 b)^2 \mathcal{D}. \quad (12)$$

Per completezza, la soluzione generale (stazionaria) dell'Eq. (2) del moto z -vibrotorio (assiale) della membrana è data dal prodotto

$$z(\rho, \varphi, t) = c_5 J_m(k\rho)(c_3 \cos m\varphi + c_4 \sin m\varphi)(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t). \quad (13)$$

□

II. La presenza del foro concentrico di raggio $\rho = b/5$, escludendo il centro della membrana, modifica la soluzione generale (13). Così, ora che anche le *Funzioni di Bessel* di 2° tipo, le N_m , sono ammissibili, si scrive

$$z(\rho, \varphi, t) = (c_5 J_m(k\rho) + c_6 N_m(k\rho))(c_3 \cos(m\varphi) + c_4 \sin(m\varphi))(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)). \quad (14)$$

D'altra parte, in regime stazionario, la nuova configurazione del sistema aggiunge la condizione *anti-nodale* (i.e., estremante) ulteriore di frontiera,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} z(\rho, \varphi, t) \right|_{\rho=b/5} = 0. \quad (15)$$

In altre parole, il bordo del foro, essendo *libero*, esegue spostamenti massimi z -trasversali di vibrazione in corrispondenza di $\rho = b/5, \forall \{\varphi, t\}$. Pertanto,

- al bordo *fisso*, $\rho = b$, alla *nuova* frequenza ciclica fondamentale $\bar{\omega}_0$ delle *piccole* vibrazioni, si ha

$$z(b, \varphi, t) \equiv 0 = c_5 J_0(\bar{k}b) + c_6 N_0(\bar{k}b), \text{ da cui, si calcola}$$

$$\frac{c_5}{c_6} = -\frac{N_0(\bar{k}b)}{J_0(\bar{k}b)}. \quad (16.1)$$

- al bordo *libero*, $\rho = b/5$, invece, dalla condizione (15), deve aversi, $\forall \{\varphi, t\}$,

$$c_5 \left. \frac{d}{d\rho} J_0(\bar{k}\rho) \right|_{\rho=b/5} + c_6 \left. \frac{\partial}{\partial \rho} N_0(\bar{k}\rho) \right|_{\rho=b/5} = 0, \text{ da cui, si calcola}$$

$$\frac{c_5}{c_6} \frac{d}{d\rho} J_0(\bar{k}b/5) + \frac{\partial}{\partial \rho} N_0(\bar{k}b/5) = 0. \quad (16.2)$$

Introducendo l'espressione (16.1) di c_5/c_6 nella relazione vincolare (16.2), risulta la *condizione mista*

$$\left(\frac{d}{d\rho} J_0(\bar{k}b/5) \right) N_0(\bar{k}b) - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} N_0(\bar{k}b/5) \right) J_0(\bar{k}b) = 0; \quad (17)$$

quest'ultima, a sua volta, in forza dell'identità

$$\frac{d}{dx} B_\nu(x) = \frac{\nu}{x} B_\nu(x) - B_{\nu+1}(x)$$

(si veda, e.g., P. 13, Eq. (44.1)), in cui, B_ν indica, indifferentemente, J_ν o N_ν e si ponga $x := \bar{k}b/5$, equivale a scrivere

$$J_1(\bar{k}b/5) N_0(\bar{k}b) - N_1(\bar{k}b/5) J_0(\bar{k}b) = 0. \quad (18)$$

La risoluzione (numerica) vs. \bar{k} dell'Eq. (18) (v. [14], P. 415, **Table 9.7**) dà, come valore *minimo* (fondamentale)

$$\bar{k} \approx \frac{2.57363}{b}.$$

Dunque, in presenza del foro, la forza di tensione *piana* nella membrana è esprimibile, alla *nuova* frequenza ciclica fondamentale $\bar{\omega}_0$ delle *piccole* vibrazioni z -assiali, come

$$\bar{T} = \left(\frac{\bar{\omega}_0}{k} \right)^2 \mathcal{D} \approx \left(\frac{\bar{\omega}_0 b}{2.57363} \right)^2 \mathcal{D} \approx 0.15098 (\bar{\omega}_0 b)^2 \mathcal{D}. \quad (19)$$

Ora, se si mantiene invariata la tensione nella membrana, $\bar{T} \equiv T$, dall'uguaglianza

$$0.15098 (\bar{\omega}_0 b)^2 \mathcal{D} = 0.17292 (\omega_0 b)^2 \mathcal{D},$$

si ottiene il rapporto

$$\frac{\bar{\omega}_0}{\omega_0} \approx 1.07019.$$

Da questo, la stima percentuale (o logaritmica)

$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \equiv \frac{\bar{\omega}_0 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\bar{\omega}_0}{\omega_0} - 1 \approx 0.07019 \approx 7\% \quad (20)$$

indica una *crescita* della frequenza ciclica fondamentale di vibrazione della membrana.

■■■



George Neville Watson (1886-1965),

autore del capolavoro monumentale e fondamentale
A TREATISE ON THE THEORY OF BESSEL FUNCTIONS [1],
un riferimento classico ancora non facilmente ignorabile
sui fondamenti della Teoria delle *Funzioni di Bessel*.

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [2], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in uno zip-archivio scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-phymath.net/libr_page.html.

- [1] WATSON, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2ND ED., CAMBRIDGE UN. PRESS (1944; REPR., 1996);
- [2] LEBEDEV, N. N., *Special Functions and Their Applications*, DOVER PUBL.S (1965; REPR. 1972);
- [3] GATTESCHI, L., *Funzioni Speciali*, CAPP. V & VII, U.T.E.T. (1973);
- [4] HOCHSTADT, H., *The Functions of Mathematical Physics*, WILEY INTERSCIENCE (1971);
- [5] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, CH. 14, 7TH ED., ACADEMIC PRESS (2013);
- [6] OLVER, F. W. J., *Asymptotics and Special Functions*, ACADEMIC PRESS (1974);
- [7] TEMME, N. M., *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);
- [8] ANDREWS, G. E. - ASKEY, R. - ROY, R., *Special Functions*, CAMBRIDGE UN. PRESS (1999);
- [9] SPIEGEL, M. R., *ADVANCED MATHEMATICS for Scientists and Engineers*, CH. 10, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1971);
- [10] SPIEGEL, M. R., *Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, CH. 6, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1974);
- [11] BENDER, C. M. - ORSZAG, S. A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1978);
- [12] APOSTOL, T. M., *Calculus*, 2ND ED., VOL. II, P. 182-184, JOHN WILEY & SONS, INC. (1969);
- [13] BRONSON, R., *Differential Equations*, CH. 20, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (2006);
- [14] CARRIER, G. F. - KROOK, M. - PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable*, P. 228-239, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1966);
- [15] ABRAMOWITZ, M. - STEGUN, I. A., EDS., *Handbook of Mathematical Functions*, DOVER PUBLICATIONS, INC. (1972), REF.: AMS-55 (versione senza tavole numeriche);
- [16] OLVER, F. W. J. - LOZIER, D. W. - BOISVERT, R. F. - CLARK, C. W., ED.S, *N.I.S.T. Handbook of Mathematical Functions*, CAMBRIDGE UN. PRESS (2010) (link: <https://dlmf.nist.gov/>);
- [17] PRESS, W. H. - FLANNERY, B. P. - TEUKOLSKY, S. A. - VETTERLING, W. T., *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*, 3RD ED., CAMBRIDGE UN. PRESS (2007);
- [18] L'AUTORE (CM) [math-notebooks PDF],
- [18.1] EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI - METODI DI INTEGRAZIONE;
 - [18.2] PROPRIETÀ E APPLICAZIONI IN \mathcal{R} DELLA FUNZIONE GAMMA;
 - [18.3] FUNZIONI ORTOGONALI IN \mathcal{R} - METODI, RISULTATI E UN'INTRODUZIONE ALLA TEORIA DI STURM-LIOUVILLE, P. 11-14;
 - [18.4] STRUTTURA ANALITICA DELLA GONIOMETRIA IPERBOLICA.

Mathematics freeware

(software rilasciati sotto la *GNU* (General Public License):

- [19] **Maxima**™: <https://sourceforge.net/projects/maxima/files/> ;
- [20] **Octave**™ <https://www.gnu.org/software/octave/#install> ;
- [21] **SciLab**™: <https://www.scilab.org/download/scilab-2023.0.0;>
- [22] **R**™: <https://cran.r-project.org/bin/windows/base/> ;
- [23] **FreeMat**™: <https://sourceforge.net/projects/freemat/files/> ;
- [24] **EMT**™ (Euler Math Toolbox): <http://euler.rene-grothmann.de/download.html> ;
- [25] **GeoGebra**™: https://wiki.geogebra.org/it/Riferimenti:Installazione_di_GeoGebra ;
- [26] **EffeDiX**™: <https://www.paololazzarini.it/effedix/> ;
- [27] **GNUplot**™: <http://www.gnuplot.info/> .

