Sistemi di

# Coordinate Curvilinee Ortogonali

in 3-dim

claudio magno

www.cm-physmath.net

revisione
13 agosto 2022

CM Portable MATH Notebook Series™

*René Descartes (1596-1650)*

# Indice

INTRODUZIONE p. III

Trasformazioni di Sistemi di Coordinate in 3-dim p. 1
Coordinate Curvilinee in 3-dim p. 2
Basi Vettoriali Duali per Sistemi di Coordinate Curvilinee in 3-dim p. 3
Coordinate Curvilinee Ortogonali in 3-dim p. 6
Le Forme Derivate Fondamentali in $\mathbb{R}^3$ in Coordinate Curvilinee Ortogonali p. 10
Rappresentazioni Integrali p. 15

APPLICAZIONI p. 17
Coordinate Rettangolari p. 17
Coordinate Cilindrico-Circolari p. 19
Coordinate Sferiche p. 22

Esercizi p. 26

Bibliografia p. 34

# INTRODUZIONE

Nelle applicazioni più avanzate del Calcolo Vettoriale, l'impiego del sistema di coordinate rettangolari (o cartesiane ortogonali) può rivelarsi poco conveniente perché inutilmente complicato. Ciò avviene, generalmente, a causa della *configurazione geometrica* del problema considerato, e.g., di quella emergente dalla simmetria che caratterizza il sistema fisico in questione. La configurazione geometrica che ne domina i modi interattivi può, infatti, suggerire la deduzione di molte proprietà dinamiche sia qualitative che quantitative.

Pertanto, il fatto che la base *ortonormale* rettangolare $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$ consista di vettori uniformi *totalmente* (i.e., *sia* in norma (modulo) *sia* in direzione *sia* in verso) non rende, in ogni caso, le coordinate rettangolari più convenienti di quelle sferiche per esprimere, e.g., il potenziale vettore magnetico generato dalla corrente di spostamento in un condensatore conico o la forza di Lorentz, in coordinate cilindriche, che si esercita tra due spire circolari coassiali.

In queste mie note, sono presentati, mi auguro, con dettaglio sufficiente, alcuni aspetti analitico-geometrici minimi su cui sono incardinate le forme *derivate* classiche più note: $\nabla\psi$ (*gradiente*), $\nabla\cdot\boldsymbol{K}$ (*divergenza*), $\nabla\times\boldsymbol{K}$ (*rotore*) e $\nabla^2\psi$ ($\equiv \nabla\cdot\nabla\psi$, *Laplaciano*) in sistemi di coordinate 3-dim *ortogonali* generiche (*non-cartesiane*), espansi da basi vettoriali *variabili*. Le rappresentazioni-limite *integrali* alternative corrispondenti sono pure costruite esplicitamente.

□

Lo scopo principale di quanto esposto qui è di offrire uno strumento introduttivo per rafforzare le proprie capacità operative, soprattutto, in vista di obiettivi come l'Elettrodinamica Classica, la Fisica Quantistica sia non-relativistica che relativistico-speciale. Così, di proposito, ho evitato ogni riferimento alle rappresentazioni *covariante* e *controvariante* delle coordinate, strumenti essenziali nella geometria (differenziale) dello Spazio-Tempo relativistico-generale.

La prosa è ridotta al minimo ma il contenuto formale pretende di mantenersi a livello *medio-alto*.
Il lavoro personale attraverso la ricostruzione dei passaggi dimostrativi e gli esercizi proposti è *essenziale* all'utilità di questo math-notebook. Per saperne un po' di più, bisogna rivolgersi alla **Bibliografia** finale, ovviamente.

C M

# Trasformazioni di Sistemi di Coordinate in 3-dim

La trasformazione delle coordinate rettangolari $(x; y; z)$ di un punto generico $\boldsymbol{r} \equiv x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ in quelle $(u; v; w)$ corrispondenti dello *stesso* punto vs. un certo altro dominio 3-dim *aperto* $\mathfrak{D}_{uvw} \subseteq \mathbb{R}^3$ è indicata con la terna simbolica di dipendenze funzionali scalari *dirette*

$$\begin{cases} x \equiv x(u, v, w) \\ y \equiv y(u, v, w) \\ z \equiv z(u, v, w) \end{cases} . \tag{1}$$

Si assuma, qui, che le Eq.i di trasformazione (1) siano, *almeno*, biunivoche generalmente (quindi, invertibili generalmente) e derivabili con continuità *due volte* generalmente (quindi, $\in \mathcal{C}^1(\mathfrak{D}_{uvw})$ generalmente). Si ricordi che il termine *generalmente* è usato nel significato specifico: *eccetto, al più, che per un numero finito di punti di* $\overline{\mathfrak{D}}_{uvw}$ (l'insieme-*chiusura di* $\mathfrak{D}_{uvw}$).

Il determinante *jacobiano*, non-nullo generalmente, della trasformazione dalle *vecchie* alle *nuove* coordinate, $(x; y; z) \mapsto (u; v; w)$, si scrive

$$J(u, v, w) \equiv \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{2}$$

L'invertibilità generale della trasformazione (1) implica sia l'*esistenza* che l'*unicità*, almeno locali generalmente, della terna di dipendenze funzionali scalari simboliche *inverse*

$$\begin{cases} u \equiv u(x, y, z) \\ v \equiv v(x, y, z) \\ w \equiv w(x, y, z) \end{cases} , \tag{3}$$

alla quale corrisponde il determinante *jacobiano*, non-nullo generalmente, della trasformazione *inversa*, almeno locale, dalle *nuove* alle *vecchie* coordinate, $(u; v; w) \mapsto (x; y; z)$,

$$J^{-1}(x, y, z) \equiv \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial x \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{4}$$

■

# Coordinate Curvilinee in 3-dim

In Geometria Differenziale, la $n$-pla di equazioni di (iper-)superfici parametriche *generalmente regolari* (v. [8], P. 439), ottenuta uguagliando ciascuna delle espressioni funzionali delle coordinate correnti a un parametro reale, definisce una $n$-pla di equazioni di (*iper*-) *superfici coordinate* parametriche in $\mathbb{R}^n$, quella, appunto, relativa all' $n$-pla $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}$ di valori parametrici *simultanei* assegnati.
Ad esempio, uguagliando ordinatamente la terna $\{u, v, w\}$ di coordinate trasformate alla terna di parametri $\{c_1, c_2, c_3\} \subset \mathbb{R}$, si ottiene la terna corrispondente di equazioni di *superfici coordinate* parametriche in $\mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow X \times Y \times Z$

$$\begin{cases} u(x, y, z) = c_1 \,, \\ v(x, y, z) = c_2 \,, \\ w(x, y, z) = c_3 \,. \end{cases} \tag{5}$$

Il vettore-posizione *associato* al punto generico $P \equiv (x; y; z)$ si scrive, solitamente vs. l'origine del sistema di riferimento rettangolare (i.e., il vettore 'esce' dall'origine del riferimento),

$$\boldsymbol{r} \equiv x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \boldsymbol{r}(x, y, z) \quad (\equiv P)\,. \tag{6}$$

D'altra parte, le dipendenze funzionali (1) per le coordinate rettangolari, determinano, a loro volta, la rappresentazione *composta* di $P \equiv (u; v; w)$,

$$\boldsymbol{r} \equiv x(u, v, w)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y(u, v, w)\,\hat{\boldsymbol{y}} + z(u, v, w)\,\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \boldsymbol{r}(u, v, w) \quad (\equiv P)\,. \tag{7}$$

Ora, se $v$ e $w$ sono mantenute invarianti secondo le Eq. (5), la trasformazione (1) rappresenta la $u$-linea (i.e., linea parametrizzata vs. $u$) generalmente regolare (v. [8], P. 11)

$$\underbrace{\boldsymbol{r}(u) \equiv x(u, c_2, c_3)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y(u, c_2, c_3)\,\hat{\boldsymbol{y}} + z(u, c_2, c_3)\,\hat{\boldsymbol{z}}}_{u\text{ - linea}}. \tag{7.1}$$

In modo analogo, se si prendono $\{u, w\} \equiv \{c_1, c_3\}$ e $\{u, v\} \equiv \{c_1, c_2\}$ invarianti nelle Eq. (1), si originano, rispettivamente, una $v$-linea e una $w$-linea generalmente regolari (almeno, *a-tratti*) per ogni coppia di valori reali parametrici assegnati,

$$\underbrace{\boldsymbol{r}(v) \equiv x(c_1, v, c_3)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y(c_1, v, c_3)\,\hat{\boldsymbol{y}} + z(c_1, v, c_3)\,\hat{\boldsymbol{z}}}_{v\text{ - linea}}, \tag{7.2}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{r}(w) \equiv x(c_1, c_2, w)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y(c_1, c_2, w)\,\hat{\boldsymbol{y}} + z(c_1, c_2, w)\,\hat{\boldsymbol{z}}}_{w\text{ - linea}}. \tag{7.3}$$

In tal modo, la terna vettoriale $\{\boldsymbol{r}(u), \boldsymbol{r}(v), \boldsymbol{r}(w)\}$ costituisce, in $\mathbb{R}^3$, un sistema di riferimento a coordinate curvilinee se la $u$-linea, la $v$-linea e la $w$-linea sono *regolari* ([§]). Queste sono dette *linee coordinate* e, in generale, *possono* corrispondere a *qualsiasi* tipo di linea, *retta* o *non*: tutto dipende dalla natura del sistema generatore (5).

■

---

([§]) Sia $\gamma$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ed esista una funzione continua $\boldsymbol{r} : \mathfrak{I} \mapsto \mathbb{R}^3$, dove $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $\gamma$ ne è l'immagine. Si dice curva in $\mathbb{R}^3$ un insieme $\gamma$ in $\mathbb{R}^3$ con una sua parametrizzazione $\boldsymbol{r}(\tau)$, essendo $\tau \in \mathfrak{I}$. Se $\gamma$, di equazione $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\tau)$, è tale che $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{I})$ e se $\boldsymbol{r}'(\tau) \neq 0 \quad \forall\, \tau \in \mathfrak{I}$ (almeno a tratti), $\gamma$ è *regolare* (almeno a tratti). Il vettore *tangente localmente* a $\gamma$ è definito come $\boldsymbol{r}'(\tau) := \boldsymbol{T}(\tau)$,

## Basi Vettoriali Duali per Sistemi di Coordinate Curvilinee in 3-dim

Alla base vettoriale rettangolare usuale $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$, sono sempre associabili, per qualsiasi sistema trasformato $\{u, v, w\}$ di coordinate curvilinee ordinate, le coppie seguenti di basi vettoriali duali reciprocamente: la prima base, $\{\boldsymbol{T}_u, \boldsymbol{T}_v, \boldsymbol{T}_w\}$, è la terna ordinata *variabile* dei vettori *tangenti*, nel punto $P \equiv (x; y; z)$ generico, rispettivamente, alle $u$-, $v$- e $w$-*linee* coordinate; l'altra base, indicata con $\{\boldsymbol{N}_u, \boldsymbol{N}_v, \boldsymbol{N}_w\}$, è la terna ordinata *variabile* di vettori *ortogonali*, nello *stesso* punto $P \equiv (u; v; w)$ generico, alle *superfici* coordinate locali corrispondenti, rappresentate dalle Eq.i (5). La variabilità delle basi vettoriali duali $\{\boldsymbol{T}_u, \boldsymbol{T}_v, \boldsymbol{T}_w\}$ e $\{\boldsymbol{N}_u, \boldsymbol{N}_v, \boldsymbol{N}_w\}$ equivale al cambiamento *da punto a punto* (locale) dei vettori di ciascuna *sia* in modulo *sia* in direzione *sia* in verso. Le loro caratteristiche generali non solo ne suggeriscono rappresentazioni 'naturali' ovvie ma, da queste, si deducono prontamente le due basi vettoriali ordinate *unitarie* e *duali*, $\{\hat{\boldsymbol{t}}_u, \hat{\boldsymbol{t}}_v, \hat{\boldsymbol{t}}_w\}$ e $\{\hat{\boldsymbol{n}}_u, \hat{\boldsymbol{n}}_v, \hat{\boldsymbol{n}}_w\}$, costituite da *versori*. I vantaggi sia di intelligibilità formale che computazionali dell'uso di basi vettoriali *ortonormali* (i.e., ortogonali *e* unitarie) sono fin troppo evidenti!

Il vettore tangente in $P \equiv (u; v; w) \equiv \boldsymbol{r}$ alla $u$-linea (generalmente regolare), si esprime mediante la derivata fondamentale

$$\boldsymbol{T}_u \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \neq 0 . \tag{8}$$

Tipicamente, è $\|\boldsymbol{T}_u\| \equiv \|\boldsymbol{T}_u(u, v, w)\| \neq 1$ (norma *hilbertiana*).

Estendendo le stesse considerazioni alle altre due linee coordinate, si deduce la *base ortonormale* (*vettoriale unitaria*) *ordinata* dei versori *tangenti*

$$\{\hat{\boldsymbol{t}}_u, \hat{\boldsymbol{t}}_v, \hat{\boldsymbol{t}}_w\} \equiv \left\{ \frac{1}{h_u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \ \frac{1}{h_v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \ \frac{1}{h_w}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \right\}, \tag{9}$$

per la quale, risultano, in modo ovvio,

$$\begin{cases} h_u \equiv h_u(u, v, w) = \|\partial \boldsymbol{r}/\partial u\| = (x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2)^{1/2} > 0 \\ h_v \equiv h_v(u, v, w) = \|\partial \boldsymbol{r}/\partial v\| = (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2)^{1/2} > 0 \\ h_w \equiv h_w(u, v, w) = \|\partial \boldsymbol{r}/\partial w\| = (x_w'^2 + y_w'^2 + z_w'^2)^{1/2} > 0 \end{cases} . \tag{9.1}$$

La dipendenza dei versori tangenti (9) dalle coordinate trasformate $u, v, w$ è, dunque, esplicita.

Riguardo a una rappresentazione della base vettoriale unitaria coniugata $\{\hat{\boldsymbol{n}}_u, \hat{\boldsymbol{n}}_v, \hat{\boldsymbol{n}}_w\}$, basta notare che, per ogni superficie generalmente *regolare* $\Sigma$ di equazione cartesiana $f(x, y, z) = c$, essendo $c$ una *costante*, il versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ normale localmente a $\Sigma$ è esprimibile come

$$\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \hat{\boldsymbol{n}}(x, y, z) = \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|} \equiv \frac{f_x' \hat{\boldsymbol{x}} + f_x' \hat{\boldsymbol{y}} + f_x' \hat{\boldsymbol{z}}}{(f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2)^{1/2}} . \tag{10}$$

Quindi, dalle Eq.i cartesiane (5), si determina, nel punto generico $P \equiv (x; y; z) \equiv \boldsymbol{r} \in \Sigma$, la base vettoriale unitaria ordinata

$$\{\hat{\boldsymbol{n}}_u, \hat{\boldsymbol{n}}_v, \hat{\boldsymbol{n}}_w\} \equiv \{(1/\eta_u)\nabla u, \ (1/\eta_v)\nabla v, \ (1/\eta_w)\nabla w\}, \tag{11}$$

nella quale, analogamente alle Eq.i (9.1), si riconoscono i denominatori $> 0$

$$\begin{cases} \eta_u \equiv \eta_u(x,y,z) = \|\nabla u(x,y,z)\| = (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)^{1/2} \\ \eta_v \equiv \eta_v(x,y,z) = \|\nabla v(x,y,z)\| = (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)^{1/2} \\ \eta_w \equiv \eta_w(x,y,z) = \|\nabla w(x,y,z)\| = (w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2)^{1/2} \end{cases} . \tag{11.1}$$

Ora, va osservato che, mentre la rappresentazione (9) dei versori (e vettori) tangenti avviene nello spazio-immagine $\mathcal{S}_{uvw}$ *trasformato* delle *nuove* variabili $u, v, w$, quella (11) dei versori (e vettori) normali $\hat{\boldsymbol{n}}_\lambda$ è realizzata nello spazio *contro-immagine* (cartesiano) originario.
Questa *dualità geometrica* tra le basi vettoriali si rivela sintomatica dell'*ortogonalità* degli spazi generati dalle trasformazioni (1) e (3), esprimendosi nella

**Proposizione 1**

Le basi vettoriali ordinate

$$\{\boldsymbol{T}_u, \boldsymbol{T}_v, \boldsymbol{T}_w\} \equiv \{\partial \boldsymbol{r}/\partial u, \partial \boldsymbol{r}/\partial v, \partial \boldsymbol{r}/\partial w\} \quad \text{e} \quad \{\boldsymbol{N}_u, \boldsymbol{N}_v, \boldsymbol{N}_w\} \equiv \{\nabla u, \nabla v, \nabla w\},$$

generatrici, rispettivamente, delle basi ortonormali (9) e (11), costituiscono una coppia di terne vettoriali *reciproche*. ▲

**Dimostrazione**

Le Eq.i (1) e (3) fissano la dipendenza composta *chiusa*

$$u = u(x,y,z) \equiv u(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) . \tag{12}$$

Derivando formalmente vs. $u$ i termini nei due membri estremi dell'identità (12), risulta

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \nabla u, \tag{13}$$

avendo riconosciuto i vettori $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \equiv \dfrac{\partial x}{\partial u}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\hat{\boldsymbol{z}}$ e $\nabla u \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$.
Procedendo analogamente con le variabili $v$ e $w$, si ottengono le uguaglianze

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \nabla v \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \cdot \nabla w = 1 . \tag{14}$$

Invece, derivando formalmente vs. $v$ i termini nei due membri estremi dell'identità (12), si trova

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \nabla u, \tag{15}$$

come, pure, rispettivamente, valgono le uguaglianze

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \cdot \nabla u \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \nabla v \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \cdot \nabla v \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \nabla w \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \nabla w = 0 . \tag{16}$$

Quindi, per comodità, rinominata la terna $\{u, v, w\} := \{q_1, q_2, q_3\}$ ordinatamente, le Eq. (13), (14), (15) e (16) possono essere poste nella rappresentazione sintetica *à-la Kronecker*,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\mu} \cdot \nabla q_\nu = \delta_{\mu\nu}, \tag{17}$$

con $\{\mu, \nu\} \subset \{1,2,3\}$. Tale rappresentazione è quella di una coppia di terne vettoriali *reciproche*, q. e. d. (v., e.g., [1], [3],[4], [5], [9]).

□

Un controllo dei *volumi caratteristici*, di segno *relativo*, costruiti dai **t-ps** (tri-prodotti scalari) delle terne ordinate locali reciproche $\{\boldsymbol{T}_u, \boldsymbol{T}_v, \boldsymbol{T}_w\}$ e $\{\boldsymbol{N}_u, \boldsymbol{N}_v, \boldsymbol{N}_w\}$, mostra che essi coincidono con gli *jacobiani* delle *inversioni* reciproche $\{x, y, z\} \rightleftarrows \{u, v, w\}$, v. le Eq.i (2) e (4).
Infatti, ricordando, all'occorrenza, che i determinanti di due matrici (quadrate) in $\mathbb{C}$ *mutuamente trasposte* sono *identici*, si trova esplicitamente, in termini di **t-ps**,

$$[\boldsymbol{T}_u\, \boldsymbol{T}_v\, \boldsymbol{T}_w] \equiv \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right] := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$$
$$= \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial x/\partial w & \partial y/\partial w & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \equiv J(u, v, w)\,; \qquad (18)$$

$$[\boldsymbol{N}_u\, \boldsymbol{N}_v\, \boldsymbol{N}_w] \equiv [\nabla u\ \nabla v\ \nabla w] \equiv \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w$$
$$= \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{vmatrix} \equiv J^{-1}(x, y, z)\,. \qquad (19)$$

Inoltre, poiché le due terne vettoriali sono *reciproche*, valgono le identità (v., e.g., [3], [4], [5], [8]) locali e biunivoche di *invertibilità*

$$J^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{J(u, v, w)}\,; \qquad (20)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\nabla v \times \nabla w}{J^{-1}(x, y, z)} \equiv \frac{\boldsymbol{N}_v \times \boldsymbol{N}_w}{[\boldsymbol{N}_u\, \boldsymbol{N}_v\, \boldsymbol{N}_w]}\,, \qquad (21.1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\nabla w \times \nabla u}{J^{-1}(x, y, z)} \equiv \frac{\boldsymbol{N}_w \times \boldsymbol{N}_u}{[\boldsymbol{N}_u\, \boldsymbol{N}_v\, \boldsymbol{N}_w]}\,, \qquad (21.2)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \frac{\nabla u \times \nabla v}{J^{-1}(x, y, z)} \equiv \frac{\boldsymbol{N}_u \times \boldsymbol{N}_v}{[\boldsymbol{N}_u\, \boldsymbol{N}_v\, \boldsymbol{N}_w]}\,; \qquad (21.3)$$

$$\nabla u = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{J(u, v, w)} \equiv \frac{\boldsymbol{T}_v \times \boldsymbol{T}_w}{[\boldsymbol{T}_u\, \boldsymbol{T}_v\, \boldsymbol{T}_w]}\,, \qquad (22.1)$$

$$\nabla v = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}}{J(u, v, w)} \equiv \frac{\boldsymbol{T}_w \times \boldsymbol{T}_u}{[\boldsymbol{T}_u\, \boldsymbol{T}_v\, \boldsymbol{T}_w]}\,, \qquad (22.2)$$

$$\nabla w = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{J(u, v, w)} \equiv \frac{\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v}{[\boldsymbol{T}_u\, \boldsymbol{T}_v\, \boldsymbol{T}_w]}\,. \qquad (22.3)$$

Non è inutile soffermarsi un attimo per focalizzare le dipendenze funzionali dei termini contenuti nei membri *sinistri* e, rispettivamente, *destri* delle identità (21.1), …, (22.3).

■

# Coordinate Curvilinee Ortogonali in 3-dim

Un sistema $\{u, v, w\}$ di coordinate curvilinee si dice *ortogonale* se le sue linee coordinate sono ortogonali *tra loro in ogni punto* dello spazio da esse generato. In tale circostanza, la base vettoriale ordinata unitaria corrente, $\{\hat{\boldsymbol{t}}_u, \hat{\boldsymbol{t}}_v, \hat{\boldsymbol{t}}_w\}$, è *localmente ortonormale*, nel senso che tali versori sono mutuamente *localmente ortogonali*.
La base vettoriale corrente verrà sempre intesa come *ordinata*, *ortonormale* e *destrorsa*, senza eccezione. In altri termini, le sue proprietà geometriche costitutive globali nel dominio (sotto-spazio) $\mathfrak{D}_{uvw} \subseteq \mathbb{R}^3$ sono:

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \tag{23}$$

con *commutatività* vs. gli indici di linea, $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \{u, v, w\}$;

$$\hat{\boldsymbol{t}}_u = \hat{\boldsymbol{t}}_v \times \hat{\boldsymbol{t}}_w, \qquad \hat{\boldsymbol{t}}_v = \hat{\boldsymbol{t}}_w \times \hat{\boldsymbol{t}}_u, \qquad \hat{\boldsymbol{t}}_w = \hat{\boldsymbol{t}}_u \times \hat{\boldsymbol{t}}_v, \tag{24}$$

con *anti-commutatività* dei fattori vettoriali associata alla *ciclicità* vs. gli indici di linea;

$$[\hat{\boldsymbol{t}}_u \ \hat{\boldsymbol{t}}_v \ \hat{\boldsymbol{t}}_w] \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_u \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_v \times \hat{\boldsymbol{t}}_w \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (>0), \tag{25}$$

con *ciclicità* vs. gli indici di linea e *positività* del volume (unitario) caratteristico.

□

**Proposizione 2**

Sia $\{u, v, w\}$ un sistema qualsiasi di coordinate curvilinee *ortogonali*.
Allora, $\forall \alpha \in \{u, v, w\}$, valgono localmente le identità vettoriali seguenti,

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \equiv \hat{\boldsymbol{n}}_\alpha . \ \blacktriangle \tag{26}$$

Dimostrazione

Dall'ortogonalità locale della terna ordinata (destrorsa) $\{\boldsymbol{T}_u, \boldsymbol{T}_v, \boldsymbol{T}_w\}$, segue, per la *proprietà di reciprocità* (17), quella della terna duale associata $\{\boldsymbol{N}_u, \boldsymbol{N}_v, \boldsymbol{N}_w\}$.
Pertanto, i volumi caratteristici (18) e (19) sono dati, rispettivamente, dai t-ps

$$[\boldsymbol{T}_u \ \boldsymbol{T}_v \ \boldsymbol{T}_w] \equiv \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right] \equiv J(u, v, w) = h_u h_v h_w > 0, \tag{27}$$

$$[\boldsymbol{N}_u \ \boldsymbol{N}_v \ \boldsymbol{N}_w] \equiv [\nabla u \ \nabla v \ \nabla w] \equiv \frac{1}{J(u, v, w)} = \eta_u \eta_v \eta_w > 0, \tag{28}$$

dove, per l'Eq. (20), anche la terna (28) è *positiva* e risulta localmente

$$h_u h_v h_w = \frac{1}{\eta_u \eta_v \eta_w} . \tag{29}$$

□

Ora, essendo $\{\hat{\boldsymbol{t}}_u, \hat{\boldsymbol{t}}_v, \hat{\boldsymbol{t}}_w\}$ una base vettoriale (ordinata) *ortonormale*, si può manipolare, e.g., la prima identità costitutiva (24) scrivendo, mediante le Eq.i (21.1), (21.2), (21.3), (28) e (29),

$$\hat{\boldsymbol{t}}_u \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_v \times \hat{\boldsymbol{t}}_w = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{h_v h_w} = \frac{\dfrac{\nabla w\times\nabla u}{J^{-1}(x,y,z)}\times\dfrac{\nabla u\times\nabla v}{J^{-1}(x,y,z)}}{h_v h_w} = \frac{(\eta_w \hat{\boldsymbol{n}}_w \times \eta_u \hat{\boldsymbol{n}}_u)\times(\eta_u\hat{\boldsymbol{n}}_u\times\eta_v\hat{\boldsymbol{n}}_v)}{(\eta_u\eta_v\eta_w)^2 h_v h_w}$$

$$= \frac{\hat{\boldsymbol{n}}_v\times\hat{\boldsymbol{n}}_w}{\eta_v\eta_w h_v h_w} \equiv \frac{\eta_u h_u \hat{\boldsymbol{n}}_u}{(\cancel{\eta_u\eta_v\eta_w})\,(\cancel{h_u h_v h_w})} \equiv \eta_u h_u \hat{\boldsymbol{n}}_u . \tag{30}$$

Poiché $\|\hat{\boldsymbol{t}}_u\| \equiv \|\hat{\boldsymbol{n}}_u\| = 1$ e $\eta_u h_u > 0$, la consistenza della sequenza di trasformazioni (30) implica che l'identità (26) vale, per $\alpha \equiv u$, sse $h_u \equiv 1/\eta_u$, i.e., sse $\|\partial \boldsymbol{r}/\partial u\| \equiv 1/\|\nabla u\|$ localmente.

□

Analogamente, si dimostrano le identità $\hat{\boldsymbol{t}}_v \equiv \eta_v h_v \hat{\boldsymbol{n}}_v$ e $\hat{\boldsymbol{t}}_w \equiv \eta_w h_w \hat{\boldsymbol{n}}_w$. Quindi, $\forall\, \alpha \in \{u, v, w\}$, vale la condizione locale, propria di un sistema di coordinate *ortogonali*,

$$h_\alpha \equiv \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \right\| = (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2)^{1/2} = \frac{1}{\eta_\alpha} \equiv \frac{1}{\|\nabla \alpha\|} = (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2)^{1/2} . \tag{31}$$

La combinazione delle identità (11) e (26) fornisce le formule seguenti *a variabili separate*, valide *localmente* per qualsiasi sistema $\{u, v, w\}$ di coordinate *ortogonali*:

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha(u, v, w) \equiv \frac{1}{\eta_\alpha(x, y, z)} \nabla \alpha(x, y, z); \tag{32}$$

da queste, inversamente, si ottengono

$$\nabla \alpha(x, y, z) = \eta_\alpha(x, y, z)\, \hat{\boldsymbol{n}}_\alpha(x, y, z) \equiv \frac{1}{h_\alpha(u, v, w)} \hat{\boldsymbol{t}}_\alpha(u, v, w), \tag{33}$$

$\forall\, \alpha \in \{u, v, w\}$.

□

Per un sistema qualsiasi di coordinate curvilinee *ortogonali* $\{u, v, w\}$, i termini $h_u, h_v, h_w$ sono detti **fattori di scala**. Essi risultano *fondamentali* nella scrittura corretta di quantità geometriche differenziali trasformate, fornendo la *correzione specifica alla distorsione locale delle coordinate di linea* $u, v, w$ *vs.* l'andamento *rettilineo* (cartesiano), assunto come di *riferimento fondamentale*.

Se, $\forall\, \alpha \in \{u, v, w\}$, $s_\alpha \equiv s(\alpha) \geq 0$, rappresenta la *distanza* (o coordinata *naturale*) misurata lungo l'$\alpha$-linea, allora, dall'Eq. (9), si può scrivere

$$\boldsymbol{T}_\alpha \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s_\alpha} \frac{d s_\alpha}{d \alpha} .$$

Considerazioni differenziali elementari (v. [8], P. 24) mostrano che $\partial \boldsymbol{r}/\partial \alpha \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_\alpha$. Quindi, in modo alternativo all'Eq. (9), si perviene alla rappresentazione *naturale* importante

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \frac{d s_\alpha}{d \alpha} \hat{\boldsymbol{t}}_\alpha . \tag{34}$$

Il confronto tra l'Eq. (34) e gli elementi della base ortonormale (9) fornisce l'uguaglianza

$$h_\alpha = d s_\alpha / d\alpha \;\; (\approx (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2)^{1/2}), \tag{35}$$

che, dalla definizione di differenziale 1° di una funzione di una sola variabile, equivale a

$$ds_\alpha = h_\alpha d\alpha \ \ (\approx (\alpha'^2_x + \alpha'^2_y + \alpha'^2_z)^{1/2} d\alpha). \tag{36}$$

In parole: *le lunghezze infinitesime di archi di linee coordinate ortogonali corrispondono alle variazioni delle coordinate di linea moltiplicate per i fattori di scala rispettivi.*

Pertanto, l'Eq. (34) è esprimibile come

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = h_\alpha \hat{\boldsymbol{t}}_\alpha, \tag{37}$$

dalla quale, con trasformazioni elementari sul versore $\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha$, si trovano alcune identità generali, semplici ma comode in molte circostanze.
Infatti, mantenendo come sistema di riferimento ortogonale *fondamentale* quello *rettangolare* e combinando le Eq.i (1) e (6) nell'Eq. (37), si scrive

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \equiv \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \equiv \frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\hat{\boldsymbol{z}}\right). \tag{38}$$

Il confronto della rappresentazione (38) con quella generale evidente

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \equiv (\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + (\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}} \tag{39}$$

– valida localmente, oltretutto, vs. qualsiasi altro sistema di riferimento di coordinate ortogonali assunto come fondamentale (e.g., cf/c **Esercizio 5**) – fornisce le identità cercate:

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \tag{40.1}$$

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \tag{40.2}$$

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial z}{\partial \alpha}. \tag{40.3}$$

Ora, riprendendo l'Eq. (37), l'*ortogonalità* del sistema $\{u, v, w\}$ di coordinate curvilinee implica localmente, per invarianza formale, la validità della combinazione lineare differenziale *esatta*

$$d\boldsymbol{r} = \sum_{\alpha = u, v, w} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} d\alpha \equiv (h_u du)\hat{\boldsymbol{t}}_u + (h_v dv)\hat{\boldsymbol{t}}_v + (h_w dw)\hat{\boldsymbol{t}}_w \equiv d\boldsymbol{r}(u, v, w). \tag{41}$$

Da questa, si ha che la *lunghezza* dell'arco di linea infinitesimo limitato dai punti $P \equiv (u; v; w)$ e $P + dP \equiv (u + du; v + dv; w + dw)$ è esprimibile dallo *scalare invariante* (invariante vs. qualsiasi sistema di riferimento *ortogonale* dotato della stessa metrica e dello stesso prodotto interno)

$$ds \approx \|d\boldsymbol{r}\| \equiv (d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r})^{1/2} = ((h_u du)^2 + (h_v dv)^2 + (h_w dw)^2)^{1/2} = ds(u, v, w). \tag{42}$$

□

Nelle coordinate curvilinee *ortogonali* $u, v, w$, l'elemento differenziale infinitesimo di *volume* $d\Omega \subset \mathfrak{D}_{uvw}$ è il *parallelepipedoide* a spigoli possibilmente *curvilinei* uscenti da $P \equiv (u; v; w)$, i quali, a meno di infinitesimi di ordine $\geq 2$, approssimano lunghezze infinitesime del 1° ordine di linea coordinata nel *verso* localmente tangente (quindi, in direzione *rettilinea*) (cfr/c Eq. (34)). Il volume corrispondente del parallelepipedo infinitesimo *approssimante* si scrive

$$
\begin{aligned}
d\Omega &= (\hat{\boldsymbol{t}}_u ds_u)\cdot(\hat{\boldsymbol{t}}_v ds_v)\times(\hat{\boldsymbol{t}}_w ds_w) \equiv \underbrace{[\hat{\boldsymbol{t}}_u\ \hat{\boldsymbol{t}}_v\ \hat{\boldsymbol{t}}_w]}_{\equiv 1} ds_u ds_v ds_w \\
&= h_u h_v h_w du\, dv\, dw \equiv J(u,v,w) du\, dv\, dw\,.
\end{aligned} \tag{43}
$$

Il risultato espresso dall'Eq. (43) non è inatteso! La positività evidente di $J(u,v,w)$ dipende dalla scelta della base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{t}}_u, \hat{\boldsymbol{t}}_v, \hat{\boldsymbol{t}}_w\}$ di riferimento come una terna vettoriale *positiva*, i.e., destrorsa, v. Eq. (25). Pertanto, la negatività eventuale di viene attribuita, necessariamente, alla presenza di una o tre variazioni locali negative delle coordinate di linea, $du$, $dv$, $dw$, vs. la terna (destrorsa) dei vettori tangenti rispettivi.

□

Infine, gli elementi differenziali infinitesimi d'*area* sono tre, ciascuno dei quali, ottenuto, *al 1º ordine* associando due degli altri spigoli *rettilinei approssimanti* mentre il terzo spigolo risulta, dalle Eq. (24), normale al *rettangolo* generato dai primi due.
Poiché esistono due vettori normali a una superficie regolare, localmente *opposti*, è necessario stabilire quale sia quello di verso *positivo* (o *emergente* dalla superficie). Il prodotto vettoriale convenzionale genera un riferimento destrorso (la cosiddetta *regola della mano destra* della Fisica elementare), conseguenza della definizione rigorosa di *superficie orientata* (v. [8], P. 451-455).
Ora, l'area $d\boldsymbol{S}_u$ della 'base' del parallelepipedo approssimante nell'Eq. (43) è data dal prodotto vettoriale che la definisce. Com'è noto, tale *rappresentazione vettoriale* è caratterizzata dal versore normale alla base, $\hat{\boldsymbol{t}}_u$. Si ha, dunque (al 1º ordine di approssimazione infinitesima),

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{S}_u &:= (\hat{\boldsymbol{t}}_v ds_v)\times(\hat{\boldsymbol{t}}_w ds_w) \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_u (h_v dv)(h_w dw) \\
&= \hat{\boldsymbol{t}}_u h_v h_w dv\, dw\,.
\end{aligned} \tag{44.1}
$$

□

Con una permutazione ciclica degli indici di linea nell'Eq. (44.1), si ottengono le aree infinitesime analoghe a quelle delle altre due facce del parallelepipedo approssimante (43),

$$d\boldsymbol{S}_v = \hat{\boldsymbol{t}}_v h_u h_w du\, dw\,, \tag{44.2}$$

$$d\boldsymbol{S}_w = \hat{\boldsymbol{t}}_w h_u h_v du\, dv\,. \tag{44.3}$$

Le Eq.i (44.1), (44.2) e (44.3) costituiscono gli elementi d'area infinitesimi generali delle superfici coordinate locali ovunque in $\mathfrak{D}_{uvw}$.

■

# Le Forme Derivate Fondamentali in 3-dim in Coordinate Curvilinee Ortogonali

Come si è accennato nell'INTRODUZIONE, la conoscenza della struttura rappresentativa generale di ciascuna delle forme fondamentali di derivazione, $\boldsymbol{\nabla}\psi$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{K}$ e $\nabla^2\psi$, indipendente dal sistema di coordinate *ortogonali* scelto, si rivela cruciale per il trattamento di molti modelli teorici differenziali condivisi sia dalla Fisica che dall'Ingegneria (Meccanica Analitica, Elettrodinamica, Fluidodinamica, Elasticità e Meccanica Ondulatoria nei mezzi continui, Acustica, Teoria del Trasporto molecolare, etc.). In particolare, nei problemi cosiddetti *di Sturm-Liouville* agli auto-valori, la conoscenza della struttura della forma **laplaciana** di $\psi$, i.e., $\nabla^2\psi\ (\equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi)$, risulta essenziale per la separabilità delle variabili nella ricerca di soluzioni stazionarie o perturbative di equazioni differenziali dinamiche a derivate parziali.

Dalla determinazione della struttura rappresentativa generale del vettore $\boldsymbol{\nabla}\psi$, si deducono, con una certa *cautela*, quelle delle altre espressioni derivate.

**Proposizione 3**

Si supponga che valgano le dipendenze funzionali biunivoche (1) e (3) e si consideri la funzione scalare $(u;v;w)\mapsto\psi(u,v,w)\in\mathcal{C}^1(\mathfrak{D}_{uvw})$ di variabili coordinate ortogonali, dove $\mathfrak{D}_{uvw}\subseteq\mathbb{R}^3$ è un dominio *aperto*. Allora, in $\mathfrak{D}_{uvw}$, vale la rappresentazione generale locale

$$\boldsymbol{\nabla}\psi \equiv \frac{1}{h_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\hat{\boldsymbol{t}}_u+\frac{1}{h_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\hat{\boldsymbol{t}}_v+\frac{1}{h_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\hat{\boldsymbol{t}}_w.\ \blacktriangle \tag{45}$$

Dimostrazione

Della definizione di $\boldsymbol{\nabla}\psi$ in coordinate rettangolari,

$$\boldsymbol{\nabla}\psi(x,y,z):=\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{46}$$

si costruisce la rappresentazione $\boldsymbol{\nabla}\psi(x,y,z)\equiv\boldsymbol{\nabla}\psi(u(x,y,z)),v(x,y,z),w(x,y,z))$ mediante le formule di derivazione parziale composta

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial z}=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial\psi}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial z}\end{cases}. \tag{47}$$

Sostituendo le espressioni (47) nell'Eq. (46), si possono riordinare i termini in modo da scrivere

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial u}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial v}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial v}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial w}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial w}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\\ &\equiv \frac{\partial\psi}{\partial u}\boldsymbol{\nabla}u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\boldsymbol{\nabla}v+\frac{\partial\psi}{\partial w}\boldsymbol{\nabla}w,\\ &\equiv \frac{1}{h_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\hat{\boldsymbol{t}}_u+\frac{1}{h_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\hat{\boldsymbol{t}}_v+\frac{1}{h_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\hat{\boldsymbol{t}}_w\equiv\boldsymbol{\nabla}_{uvw}\psi(u,v,w),\end{aligned}$$

avvalendosi, nel passaggio conclusivo, delle identità (33), necessarie per esprimere *tutti* i termini in funzione delle *sole* coordinate $u, v, w$, q. e. d. .

□

Osservazione 1

La fattorizzazione (unicamente!) *operatoriale* vs. $\psi$ nell'Eq. (45) mette in evidenza l'espressione generale dell'operatore differenziale $\nabla$ (gradiente o del) nel dominio $\mathfrak{D}_{uvw}$,

$$\nabla \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{\boldsymbol{t}}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{\boldsymbol{t}}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w} \equiv \nabla_{uvw} . \tag{48}$$

■

**Proposizione 4**

Si supponga che valgano le dipendenze funzionali biunivoche (1) e (3) vs. alla funzione vettoriale $(u;v;w) \mapsto \boldsymbol{K}(u,v,w) \equiv \sum_{\alpha=u,v,w} K_\alpha \hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{D}_{uvw})$, dove $\mathfrak{D}_{uvw} \subseteq \mathbb{R}^3$ è un dominio *aperto* di variabili coordinate ortogonali.
Allora, in $\mathfrak{D}_{uvw}$, si ha la rappresentazione generale della divergenza di $\boldsymbol{K}$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{K} \equiv \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w K_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u K_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v K_w)\right). \; \blacktriangle \tag{49}$$

Si ricordi che $h_u h_v h_w \equiv J(u,v,w)$, Eq. (43).

Dimostrazione

Poiché $\{\hat{\boldsymbol{t}}_u, \hat{\boldsymbol{t}}_v, \hat{\boldsymbol{t}}_w\}$ è una base ortonormale *positiva*, combinando la proprietà costitutiva (24) con l'Eq. (33), si determinano le identità *a variabili miste* ($h_\alpha \equiv h_\alpha(u,v,w)$, $\nabla\alpha \equiv \nabla\alpha(x,y,z)$)

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{t}}_u \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_v \times \hat{\boldsymbol{t}}_w = h_v h_w \nabla v \times \nabla w , \\ \hat{\boldsymbol{t}}_v \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_w \times \hat{\boldsymbol{t}}_u = h_w h_u \nabla w \times \nabla u , \\ \hat{\boldsymbol{t}}_w \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_u \times \hat{\boldsymbol{t}}_v = h_u h_v \nabla u \times \nabla v . \end{cases} \tag{50}$$

In tal modo, la funzione vettoriale $\boldsymbol{K}$ può essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &\equiv K_u \hat{\boldsymbol{t}}_u + K_v \hat{\boldsymbol{t}}_v + K_w \hat{\boldsymbol{t}}_w \\ &= h_v h_w K_u \nabla v \times \nabla w + h_w h_u K_v \nabla w \times \nabla u + h_u h_v K_w \nabla u \times \nabla v , \end{aligned}$$

dalla quale, tenendo conto della scomposizione additiva di $\boldsymbol{K}$ in $\mathfrak{D}_{uvw}$, dell'identità fondamentale $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{F}) \equiv \boldsymbol{F}\cdot(\nabla\phi) + (\nabla\cdot\boldsymbol{F})\phi$ (si veda, e.g., [9], Eq. (31)) e dell'Eq. (33), si ottiene, identificando $\phi \equiv h_v h_w K_u$ e $\boldsymbol{F} \equiv \nabla v \times \nabla w$,

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(K_u \hat{\boldsymbol{t}}_u) &\equiv \nabla\cdot(h_v h_w K_u \nabla v \times \nabla w) \\ &= (\nabla v \times \nabla w)\cdot\nabla(h_v h_w K_u) + \big(\nabla\cdot(\nabla v \times \nabla w)\big) h_v h_w K_u \\ &\equiv \frac{1}{h_v h_w}\hat{\boldsymbol{t}}_u \cdot \nabla(h_v h_w K_u) + \cancel{\big(\nabla\cdot(\nabla v \times \nabla w)\big) h_v h_w K_u} . \end{aligned} \tag{51}$$

Il secondo addendo nell'Eq. (51) risulta *nullo* perché (v., e.g., [9], Eq.i (33) e (75)), si ha

$$\nabla\cdot(\nabla v \times \nabla w) = \nabla w \cdot \cancel{(\nabla \times \nabla v)} - \nabla v \cdot \cancel{(\nabla \times \nabla w)} = 0 + 0 \equiv 0 .$$

Quindi, mediante l'Eq. (45), l'Eq. (51) assume una forma in cui, ora, *tutti* i suoi termini dipendono esplicitamente dalle *sole* coordinate $u, v, w$,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(K_u\hat{\boldsymbol{t}}_u) &= \frac{1}{h_v h_w}\,\hat{\boldsymbol{t}}_u\cdot\left(\hat{\boldsymbol{t}}_u\,\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w K_u)+\hat{\boldsymbol{t}}_v\,\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(h_v h_w K_u)+\hat{\boldsymbol{t}}_w\,\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_v h_w K_u)\right)\\
&\equiv \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w K_u)\,. \qquad (52.1)
\end{aligned}
$$

La ciclicità vs. gli indici di linea dà prontamente, dall'Eq. (52.1), gli altri due termini necessari,

$$\nabla\cdot(K_v\hat{\boldsymbol{t}}_v) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u K_v)\,, \qquad (52.2)$$

$$\nabla\cdot(K_w\hat{\boldsymbol{t}}_w) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v K_w)\,. \qquad (52.3)$$

Si conclude per l'asserto sommando i risultati (52.1) (52.2) e (52.3), q. e. d. .

■

**Proposizione 5**

Sotto le stesse ipotesi della **Proposizione 4**, vale la rappresentazione generale del rotore di $\boldsymbol{K}$:

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{K} \equiv{}& \frac{1}{h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}(h_w K_w)-\frac{\partial}{\partial w}(h_v K_v)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_u+\frac{1}{h_w h_u}\left(\frac{\partial}{\partial w}(h_u K_u)-\frac{\partial}{\partial u}(h_w K_w)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_v + \\
&+\frac{1}{h_u h_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v K_v)-\frac{\partial}{\partial v}(h_u K_u)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_w \qquad (53)
\end{aligned}
$$

$$\equiv \frac{1}{J(u,v,w)}\begin{vmatrix} h_u\hat{\boldsymbol{t}}_u & h_v\hat{\boldsymbol{t}}_v & h_w\hat{\boldsymbol{t}}_w\\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\ h_u K_u & h_v K_v & h_w K_w \end{vmatrix}\,. \blacktriangle \qquad (53.1)$$

**Dimostrazione**

Mediante le Eq. (32) e (33), risulta conveniente rappresentare la funzione vettoriale $\boldsymbol{K}$ nella forma *a variabili miste*

$$\boldsymbol{K} \equiv K_u\hat{\boldsymbol{t}}_u+K_v\hat{\boldsymbol{t}}_v+K_w\hat{\boldsymbol{t}}_w = h_u K_u\nabla u+h_v K_v\nabla v+h_w K_w\nabla w\,.$$

Poiché $\nabla\times(\phi\boldsymbol{F}) = (\nabla\times\boldsymbol{F})\phi-\boldsymbol{F}\times\nabla\phi$ e $\nabla\times\nabla\phi = 0$ (v., e.g., [1], [2], [3], [4], [5], [6]), allora, dalla scomposizione additiva di $\boldsymbol{K}$ in $\mathfrak{D}_{uvw}$, si scrive, assegnando $\phi\equiv h_u K_u$ e $\boldsymbol{F}\equiv\nabla u$,

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(K_u\hat{\boldsymbol{t}}_u) &\equiv \nabla\times(h_u K_u\nabla u)\\
&= \cancel{(\nabla\times\nabla u)h_u K_u}-\nabla u\times\nabla(h_u K_u) \equiv \nabla(h_u K_u)\times\nabla u\\
&\equiv \left(\hat{\boldsymbol{t}}_u\,\frac{1}{h_u}\frac{\partial(h_u K_u)}{\partial u}+\hat{\boldsymbol{t}}_v\,\frac{1}{h_v}\frac{\partial(h_u K_u)}{\partial v}+\hat{\boldsymbol{t}}_w\,\frac{1}{h_w}\frac{\partial(h_u K_u)}{\partial w}\right)\times\frac{1}{h_u}\hat{\boldsymbol{t}}_u\\
&= \frac{1}{h_w h_u}\frac{\partial(h_u K_u)}{\partial w}\,\hat{\boldsymbol{t}}_v-\frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial(h_u K_u)}{\partial v}\,\hat{\boldsymbol{t}}_w\,, \qquad (54.1)
\end{aligned}
$$

dove ci si è avvalsi delle Eq.i (45), (33) e della proprietà costitutiva (24).
Nel primo e nell'ultimo membro della catena di identità (54.1), *tutti* i termini dipendono in modo esplicito dalle *sole* coordinate $u, v, w$.
Poi, a partire dall'identità (54.1) stessa, variando gli indici di linea ciclicamente, si determinano le altre due combinazioni lineari vettoriali necessarie,

$$\nabla \times (K_v \hat{\boldsymbol{t}}_v) = \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial (h_v K_v)}{\partial u} \hat{\boldsymbol{t}}_w - \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial (h_v K_v)}{\partial w} \hat{\boldsymbol{t}}_u , \tag{54.2}$$

$$\nabla \times (K_w \hat{\boldsymbol{t}}_w) \equiv \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial (h_w K_w)}{\partial v} \hat{\boldsymbol{t}}_u - \frac{1}{h_w h_u} \frac{\partial (h_w K_w)}{\partial u} \hat{\boldsymbol{t}}_v . \tag{54.3}$$

La dimostrazione si conclude sommando i risultati (54.1), (54.2) e (54.3), q. e. d. .
La verifica della rappresentazione simbolica (e comoda) (53.1) è un esercizio elementare.

■

**Proposizione 6**

Si supponga che sussistano le dipendenze funzionali biunivoche (1) e (3) per la funzione scalare $(u; v; w) \mapsto \psi(u, v, w) \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{D}_{uvw})$ di variabili coordinate ortogonali e sia $\psi(u, v, w)$ derivabile almeno *due volte* nel dominio *aperto* $\mathfrak{D}_{uvw} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Allora, in $\mathfrak{D}_{uvw}$, vale la rappresentazione generale

$$\nabla^2 \psi \equiv \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) \right) \tag{55}$$

$$\equiv \frac{1}{J(u, v, w)} \sum_{\alpha = u, v, w} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_u h_v h_w}{h_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \psi \equiv \nabla^2_{u,v,w} . \ \blacktriangle \tag{55.1}$$

**Dimostrazione**

L'Eq. (45) fornisce le componenti scalari di $\nabla \psi$ nel dominio $\mathfrak{D}_{uvw}$, quindi, $\forall\, \alpha \in \{u, v, w\}$,

$$\hat{\boldsymbol{t}}_\alpha \cdot \nabla \psi \equiv (1/h_\alpha)(\partial \psi / \partial \alpha) .$$

Quindi, operando sull'identità $\nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot \nabla \psi$, si applica l'espressione formale di $\nabla \cdot \boldsymbol{K}$ in $\mathfrak{D}_{uvw}$, espressa dall'Eq. (49), sostituendo $K_\alpha \equiv (1/h_\alpha)(\partial \psi / \partial \alpha)$. Ne risulta l'identità (55), q. e. d. .

□

**Osservazione 2**

Come per l'operatore $\nabla$ (cfr/c l'Eq. (48), anche riguardo all'operatore $\nabla^2$ si individua, con la fattorizzazione *operatoriale* vs. $\psi$ nell'Eq. (55), la struttura generale vs. un sistema di coordinate curvilinee ortogonali *qualsiasi*:

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum_{\alpha = u, v, w} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_u h_v h_w}{h_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \equiv \nabla^2_{uvw} , \tag{55.2}$$

dove, al solito, vale l'uguaglianza $h_u h_v h_w \equiv J(u, v, w)$.

■

La dimostrazione della **Proposizione 6** sfrutta in modo sintetico (e conveniente) le strutture già acquisite delle operazioni di *gradiente* e di *divergenza* in $\mathfrak{D}_{uvw}$.

D'altra parte, se si preferisce seguire un procedimento più elementare, meccanico e (relativamente) sicuro in situazioni specifiche, è essenziale *evitare accuratamente* scritture istintive ma, in generale, *errate*, quali, e.g.,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi &\equiv \left(\hat{\boldsymbol{t}}_u\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}+\hat{\boldsymbol{t}}_v\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}+\hat{\boldsymbol{t}}_w\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{t}}_u\frac{1}{h_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\hat{\boldsymbol{t}}_v\frac{1}{h_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\hat{\boldsymbol{t}}_w\frac{1}{h_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)\\ &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right).\end{aligned}$$

In questa, infatti, stata applicata – in maniera *semplicistica* – la sola proprietà costitutiva (23) del prodotto interno tra vettori ortogonali, trascurando di eseguire *anche* le *derivazioni dei versori* contenuti nell'espressione di $\boldsymbol{\nabla}\psi$, i quali, se non sono *variabili* in modulo, lo sono, però, sia *in direzione* che *in verso* vs. le stesse coordinate $u, v, w$!

Quindi, $\forall\,\{\mu,\nu\}\subset\{u,v,w\}$, l'operazione differenziale corretta (successiva a quella distributiva della somma vs. il prodotto dei vettori $\boldsymbol{\nabla}$ e $\boldsymbol{\nabla}\psi$) è

$$\left(\hat{\boldsymbol{t}}_\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{t}}_\nu\frac{1}{h_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)=\left(\hat{\boldsymbol{t}}_\mu\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{t}}_\nu}{\partial\mu}\right)\frac{1}{h_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}+\delta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right). \tag{56}$$

A questo punto, la prosecuzione del calcolo richiede la conoscenza della dipendenza esplicita di $\hat{\boldsymbol{t}}_\nu$ dalla coordinata $\mu$, così da poter determinare il vettore $\partial\hat{\boldsymbol{t}}_\nu/\partial\mu$.

### Un procedimento operativo generale

Quando sia stato specificato il sistema di equazioni (1) di trasformazione *diretta* delle coordinate rettangolari $(x;y;z)$, una sequenza logica delle equazioni per il calcolo degli *elementi differenziali* nelle coordinate $\{u,v,w\}$ *trasformate* è data da

Eq. (7) $\mapsto$ Eq. (9.1) $\mapsto$ Eq. (42) $\mapsto$ Eq. (48) $\mapsto$ Eq. (49) $\mapsto$ Eq. (53.1) $\mapsto$ Eq. (55.2).

■

## Rappresentazioni Integrali

In molteplici questioni di carattere sia teorico che applicativo, l'equivalenza – dove sussista – tra rappresentazioni integrali e differenziali è di rilevanza operativa difficilmente sottovalutabile.
La disponibilità di queste rappresentazioni alternative non risulta solo conveniente nella scelta dei procedimenti risolutivi più diretti. Non è raro, infatti, che essa faccia emergere, dalle strutture più interne dei modelli matematici implicati, simmetrie e regolarità altrimenti elusive.

Qui, ci si limiterà a riformulare alcuni risultati fondamentali in termini di risultati ottenuti nelle pagine precedenti in questo documento. Determinazioni *generali* di tali risultati fondamentali, i.e., *indipendenti dal sistema di coordinate utilizzato*, sono presentate, e.g., in [1], [3], [4], [5], [9], sotto condizioni analitiche specifiche opportune (e.g., v. la discussione approfondita in [8]).

□

**Proposizione 7**

Siano $\overline{S} \equiv \partial\Omega$ e $C \equiv \partial S$ *interni* al dominio *aperto* $\mathfrak{D}_{uvw} \subseteq \mathbb{R}^3$. $\overline{S}$ è una superficie *chiusa*, *frontiera* del volume *à-la Gauss* finito $\Omega$; $S \equiv \overline{S} \setminus \partial S$ è la superficie *aperta* finita corrispondente, bordata dalla linea *à-la Stokes* $C$ *chiusa*. Inoltre, si assuma che il *Teorema della Media Integrale* valga generalmente in $\mathfrak{D}_{uvw}$, opportunamente adattato a *qualsiasi* tipo di integrale (vettoriale).
Allora, dalle rappresentazioni operatoriali

$$\hat{\boldsymbol{t}}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{\boldsymbol{t}}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{\boldsymbol{t}}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w} \equiv \boldsymbol{\nabla} \equiv \lim_{\Omega \to 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_{\overline{S}} (d\boldsymbol{S}), \tag{57}$$

$(d\boldsymbol{S} \equiv \hat{\boldsymbol{n}}\, dS)$ si traggono le identità seguenti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\psi &\equiv \boldsymbol{\nabla}_{uvw}\psi(u,v,w) = \hat{\boldsymbol{t}}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \hat{\boldsymbol{t}}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \hat{\boldsymbol{t}}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial \psi}{\partial w} \\ &\equiv \left( \lim_{\Omega \to 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_{\overline{S}} (d\boldsymbol{S}) \right) \psi \equiv \lim_{\Omega \to 0} \frac{1}{\Omega} \oiint_{\overline{S}} \psi\, d\boldsymbol{S}. \ \blacktriangle \end{aligned} \tag{58}$$

Dalla Teoria (v., e.g., [3], [4], [5]), è possibile trasformare l'integrale-limite di *superficie* (58) in un integrale-limite di *volume* e, da questo, arrivare a un'espressione alternativa di $\boldsymbol{\nabla}\psi$ eliminando elementi infinitesimi di misura aventi ordini $\geq 2$.
Quindi, per il *Teorema della Media Integrale*, si scrive, in modo equivalente,

$$\boldsymbol{\nabla}\psi \equiv \lim_{\Omega \to 0} \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\psi\, d\Omega = \frac{1}{J(u,v,w)\,du\,dv\,dw} \boldsymbol{\nabla}\psi(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) J(\bar{u},\bar{v},\bar{w})\,du\,dv\,dw \approx \ldots$$

(dove, le terne coordinate $(\bar{u};\bar{v};\bar{w}) \wedge (u;v;w) \in \Omega \to 0$)

$$\begin{aligned} \ldots &\approx \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \hat{\boldsymbol{t}}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \hat{\boldsymbol{t}}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \hat{\boldsymbol{t}}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial \psi}{\partial w} \right) h_u h_v h_w \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} h_v h_w \hat{\boldsymbol{t}}_u + \frac{\partial \psi}{\partial v} h_u h_w \hat{\boldsymbol{t}}_v + \frac{\partial \psi}{\partial w} h_u h_v \hat{\boldsymbol{t}}_w \right) \\ &\equiv \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \left( \frac{\partial}{\partial u}(\hat{\boldsymbol{t}}_u h_v h_w \psi) - \psi \frac{\partial}{\partial u}(\hat{\boldsymbol{t}}_u h_v h_w) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial v}(\hat{\boldsymbol{t}}_v h_u h_w \psi) - \psi \frac{\partial}{\partial v}(\hat{\boldsymbol{t}}_v h_u h_w) \right) + \right. \\ &\qquad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial w}(\hat{\boldsymbol{t}}_w h_u h_v \psi) - \psi \frac{\partial}{\partial w}(\hat{\boldsymbol{t}}_w h_u h_v) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}(\hat{\boldsymbol{t}}_u h_v h_w \psi) - \psi\,\cancel{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{S}_u}{\partial v\,\partial w}\right)}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial v}(\hat{\boldsymbol{t}}_v h_u h_w \psi) - \psi\,\cancel{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{S}_v}{\partial w\,\partial u}\right)}\right) + \right.\text{↲}$$

$$\text{↳} \left. + \left(\frac{\partial}{\partial w}(\hat{\boldsymbol{t}}_w h_u h_v \psi) - \psi\,\cancel{\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{S}_w}{\partial u\,\partial v}\right)}\right)\right) \approx \ldots$$

(trascurando i termini contenenti variazioni del 3° ordine nelle aree vettoriali *infinitesime* (cf/c le Eq.i (44.1), (44.2) e (44.3) precedenti)

$$\approx \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\hat{\boldsymbol{t}}_u h_v h_w \psi) + \frac{\partial}{\partial v}(\hat{\boldsymbol{t}}_v h_u h_w \psi) + \frac{\partial}{\partial w}(\hat{\boldsymbol{t}}_w h_u h_v \psi)\right)\;; \tag{58.1}$$

□

$$\nabla \cdot \boldsymbol{K} \equiv \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w K_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u K_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v K_w)\right)$$

$$\equiv \left(\lim_{\Omega \to 0}\frac{1}{\Omega}\oiint_S (d\boldsymbol{S})\right)\cdot \boldsymbol{K} \equiv \lim_{\Omega \to 0}\frac{1}{\Omega}\oiint_S \boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{S} \equiv \lim_{\Omega \to 0}\frac{1}{\Omega}\iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{K}\, d\Omega, \tag{59}$$

per il *Teorema di Gauss* (v., e.g., [1], [3], [4], [5], [9]), etc. ;

□

$$\nabla \times \boldsymbol{K} \equiv \frac{1}{h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}(h_w K_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v K_v)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_u + \frac{1}{h_w h_u}\left(\frac{\partial}{\partial w}(h_u K_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w K_w)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_v + \text{↲}$$

$$\text{↳} + \frac{1}{h_u h_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v K_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u K_u)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_w$$

$$\equiv \left(\lim_{\Omega \to 0}\frac{1}{\Omega}\oiint_S d\boldsymbol{S}\right)\times \boldsymbol{K} \equiv \lim_{\Omega \to 0}\frac{1}{\Omega}\oiint_S d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{K} \equiv \lim_{\Omega \to 0}\frac{1}{\Omega}\iiint_\Omega \nabla \times \boldsymbol{K}\, d\Omega \tag{60}$$

(ancora, v., e.g., [1], [3], [4], [5], [8]), etc. .

Inoltre, se il *Teorema di Stokes* vale lungo la frontiera $C$ di una superficie *infinitesima* $S$, il *rotore* di $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ in $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}(u, v, w)$, essendo $\boldsymbol{r}$ un punto *interno* a $S$, è rappresentabile come integrale *di linea*, risultando

$$\nabla_{u;v;w} \times \boldsymbol{K} \equiv \frac{1}{h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}(h_w K_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v K_v)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_u + \frac{1}{h_w h_u}\left(\frac{\partial}{\partial w}(h_u K_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w K_w)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_v + \text{↲}$$

$$\text{↳} + \frac{1}{h_u h_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v K_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u K_u)\right)\hat{\boldsymbol{t}}_w$$

$$\equiv \left(\lim_{S \to 0}\frac{1}{S}\oint_C d\xi\right)\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) \equiv \left(\lim_{S \to 0}\frac{1}{S}\oint_C \boldsymbol{K}(\xi)\cdot d\xi\right)\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}). \tag{61}$$

■■■

# APPLICAZIONI

Come si è premesso nell'INTRODUZIONE, non esiste, di per sé, alcuna ragione formale perché il sistema di coordinate *rettangolari* in $\mathbb{R}^3$ sia da privilegiare come *fondamentale* rispetto a tutti gli altri; però, ne esiste certo una pratica, apparendo *sensato* e *conveniente* fissare come prioritario un sistema di riferimento ortogonale le cui linee coordinate, oltre a essere immagini geometriche intuitive di $\mathbb{R}$, sono *rette*, i.e., linee illimitate *a curvatura nulla* ovunque, per le quali, le superfici coordinate associate sono *piani*, i.e., superfici illimitate aventi *curvature principali* (v. [[10]], P. 478) *nulle* ovunque. Questa scelta rimanda a contesti analoghi, e.g., l'attribuzione convenzionale (pure arbitraria) dell'ordinamento vs. lo 'zero' delle immagini numeriche sulla retta.
Le relazioni *formali generali* ricavate nelle pagine precedenti dovrebbero rispondere in modo sufficiente ai problemi di trasformazione 3-dim più frequenti in ambito sia classico che quantistico non-relativistico e quantistico-relativistico.

Come esempi, sono presentati i risultati relativi alle tre rappresentazioni coordinate di maggior interesse e frequenza, quelle *rettangolare*, *cilindrico-circolare* e *sferica*, delle quali, sono indicate le equazioni-sorgente generali rispettive.
In ogni caso, l'eseguibilità dei calcoli relativi a trasformazioni di coordinate ortogonali *qualsiasi* dipende dalla conoscenza delle *dipendenze funzionali* (1) delle coordinate *rettangolari*, necessarie per la rappresentazione (7) di $\boldsymbol{r}$ e, quindi, dalla determinazione, con le Eq. (9.1), dei *fattori di scala* appropriati. L'attività computazionale – generalmente elementare – si riduce all'adattamento delle relazioni formali già ricavate alle *geometrie* specifiche.

## Coordinate Rettangolari

Le coordinate *rettangolari* sono trasformate ordinatamente *in sé stesse*,

$$(x;y;z) \mapsto (u;v;w) \equiv (x;y;z), \tag{62}$$

*dall'operatore identità*, rappresentabile mediante la *matrice jacobiana identità*

$$\mathbf{J}(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} \partial x/\partial x & \cancel{\partial x/\partial y} & \cancel{\partial x/\partial z} \\ \cancel{\partial y/\partial x} & \partial y/\partial x & \cancel{\partial y/\partial z} \\ \partial z/\partial x & \cancel{\partial z/\partial y} & \partial z/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{62.1}$$

Ovviamente, il *determinante jacobiano* e il suo inverso (v. Eq. (20)) valgono entrambi $1$,

$$J^{-1}(x,y,z) \equiv \frac{1}{J(x,y,z)} = 1 \equiv h_x h_y h_z\,. \tag{63}$$

Dalle Eq. (9) e (6), la base ortonormale dei versori *tangenti* localmente si scrive

$$\{\hat{\boldsymbol{t}}_x, \hat{\boldsymbol{t}}_y, \hat{\boldsymbol{t}}_z\} \equiv \left\{\frac{1}{h_x}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}, \frac{1}{h_y}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}, \frac{1}{h_z}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right\} \equiv \left\{\frac{1}{h_x}\hat{\boldsymbol{x}}, \frac{1}{h_y}\hat{\boldsymbol{y}}, \frac{1}{h_z}\hat{\boldsymbol{z}}\right\}. \tag{64}$$

Quindi, uguagliando gli elementi ordinatamente, le identificazioni

$$\{\hat{\boldsymbol{t}}_x, \hat{\boldsymbol{t}}_y, \hat{\boldsymbol{t}}_z\} := \{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}, \tag{65}$$

$$h_x = h_y = h_z \equiv 1 \tag{66}$$

sono immediate (e scontate).

Analogamente, dall'Eq. (11), la base ortonormale dei versori *normali* localmente è data da

$$\{\hat{\boldsymbol{n}}_x, \hat{\boldsymbol{n}}_y, \hat{\boldsymbol{n}}_z\} \equiv \left\{\frac{1}{\eta_x}\nabla x,\ \frac{1}{\eta_y}\nabla y,\ \frac{1}{\eta_z}\nabla z\right\} = \left\{\frac{1}{\eta_x}\,\hat{\boldsymbol{x}},\ \frac{1}{\eta_y}\,\hat{\boldsymbol{y}},\ \frac{1}{\eta_z}\,\hat{\boldsymbol{z}}\right\}, \tag{67}$$

con le conclusioni evidenti

$$\{\hat{\boldsymbol{n}}_x, \hat{\boldsymbol{n}}_y, \hat{\boldsymbol{n}}_z\} := \{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}, \tag{68}$$

$$\eta_x = \eta_y = \eta_z \equiv 1. \tag{69}$$

Le superfici coordinate *rettangolari* sono costituite dalla terna parametrica di *piani*

$$\{x = c_1\ (:= 0),\quad y = c_2\ (:= 0),\quad z = c_3\ \ (:= 0)\}, \tag{70}$$

mentre l'elemento differenziale infinitesimo di *linea* assume, attraverso le Eq.i (41) e (42), le rappresentazioni vettoriale e scalare ovvie

$$d\boldsymbol{r} = \sum_{\alpha = x, y, z} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} d\alpha = \hat{\boldsymbol{x}}\, dx + \hat{\boldsymbol{y}}\, dy + \hat{\boldsymbol{z}}\, dz\,, \tag{71.1}$$

$$ds \approx \|d\boldsymbol{r}\| = ((dx)^2 + (dv)^2 + (dw)^2)^{1/2}. \tag{71.2}$$

L'elemento differenziale infinitesimo di *volume* e i tre elementi differenziali infinitesimi d'*area* corrispondenti si ottengono adattando le Eq.i (43) e (44.1), (44.2), (44.3). Risultano

$$d\Omega = J(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 1 \cdot dx\, dy\, dz \equiv dx\, dy\, dz\,, \tag{72}$$

$$\begin{cases} d\boldsymbol{S}_x = \hat{\boldsymbol{x}}\, h_y h_z\, dy\, dz = \hat{\boldsymbol{x}}\, dy\, dz\,, \\ d\boldsymbol{S}_y = \hat{\boldsymbol{y}}\, h_x h_z\, dx\, dz = \hat{\boldsymbol{y}}\, dx\, dz\,, \\ d\boldsymbol{S}_z = \hat{\boldsymbol{z}}\, h_x h_y\, dx\, dy = \hat{\boldsymbol{z}}\, dx\, dy\,. \end{cases} \tag{73}$$

Circa le forme derivate fondamentali, le Eq. (44), (48), (52) e (54) si riducono elementarmente alle espressioni rispettive ben note,

$$\nabla\psi(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\,, \tag{74}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{K} \equiv \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}\,, \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{K} &\equiv \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \\ &\equiv \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{76}$$

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r})}{\partial z^2}\,. \tag{77}$$

■

## Coordinate Cilindrico-circolari

La trasformazione delle coordinate rettangolari in quelle *cilindrico-circolari* (*cilindriche*) è

$$(x;y;z) \mapsto (u;v;w) \equiv (\rho;\varphi;z), \tag{78}$$

essendo $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \;(:= \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, la distanza dall'*asse* $Z$ (di simmetria), $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$;

Eq. (1) ⇒

$$\begin{cases} x \equiv x(\rho,\varphi,z) := \rho\cos\varphi, \\ y \equiv y(\rho,\varphi,z) := \rho\sin\varphi, \\ z \equiv z(\rho,\varphi,z) := z, \end{cases} \tag{79}$$

Eq. (2) ⇒

$$J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\varphi & \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\varphi & \partial y/\partial z \\ \partial z/\partial\rho & \partial z/\partial\varphi & \partial z/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho; \tag{80}$$

Eq. (3) ⇒

invertendo le Eq. (79), si ottiene il sistema di equazioni scalari

$$\begin{cases} \rho \equiv \rho(x,y,z) = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \varphi \equiv \varphi(x,y,z) = \tan^{-1}(y/x) \quad ; \\ z \equiv z(x,y,z) = z \end{cases} \tag{81}$$

Eq. (4) ⇒

$$\begin{aligned} J^{-1}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \partial\rho/\partial x & \partial\rho/\partial y & \partial\rho/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \\ \partial z/\partial x & \partial z/\partial y & \partial z/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x/(x^2+y^2)^{1/2} & y/(x^2+y^2)^{1/2} & 0 \\ -y/(x^2+y^2) & x/(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+y^2)^{-1/2} \equiv \rho^{-1}; \end{aligned} \tag{82}$$

Eq. (5) ⇒

la terna di superfici coordinate parametriche

$$\{\rho(x,y,z) = c_1, \quad \varphi(x,y,z) = c_2, \quad z(x,y,z) = c_3\}, \tag{83}$$

è costituita, rispettivamente, da una *superficie cilindrica* (a sezione circolare) illimitata secondo il suo asse (l'asse $Z$), da un *piano* contenente l'asse $Z$ e da un *piano* parallelo al piano $X \times Y$.

Eq. (7) ⇒

$$\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}}\rho\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\rho\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}z; \tag{84}$$

Eq. (9.1) ⇒

Tenendo conto che la base ortonormale rettangolare è invariante sia nelle direzioni che nei versi dei suoi elementi, si calcolano, a partire dall'Eq. (84),

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{x}}\rho\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\rho\cos\varphi, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \hat{\boldsymbol{z}} \tag{85.1}$$

e, quindi, i fattori di scala *cilindrici* sono

$$h_\rho \equiv \|\partial \boldsymbol{r}/\partial \rho\| = 1, \qquad h_\varphi \equiv \|\partial \boldsymbol{r}/\partial \rho\| = \rho, \qquad h_z \equiv \|\partial \boldsymbol{r}/\partial z\| = 1\,. \tag{85.2}$$

Segue che

$\boxed{\text{Eq. (9)} \Rightarrow}$

$$\{\hat{\boldsymbol{t}}_\rho, \hat{\boldsymbol{t}}_\varphi, \hat{\boldsymbol{t}}_z\} := \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{z}}\} \equiv \left\{\frac{1}{h_\rho}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}, \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}, \frac{1}{h_z}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right\}, \tag{86}$$

i.e., dalle Eq. (85.1), (85.2) e (39), si ottengono le identità

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\varphi \equiv (\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi \equiv (\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \equiv \cancel{(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}}} + (\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}. \tag{87}$$

Le identità (87) possono essere poste sinteticamente nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Poiché la matrice (quadrata) nell'Eq. (88) ha i termini *reali* e il suo determinante è generalmente *non-nullo*, essa risulta invertibile per *trasposizione* riga $\rightleftarrows$ colonna, i.e.,

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}. \tag{89}$$

La forma matriciale (89) corrisponde al sistema lineare di identità *inverse* vs. le Eq. (87)

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi \equiv (\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi \equiv (\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \equiv \cancel{(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}})\hat{\boldsymbol{\rho}}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\hat{\boldsymbol{\varphi}}} + (\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}. \tag{90}$$

È opportuno disporre anche delle derivate dei versori cilindrici vs. le coordinate cilindriche. Mediante le Eq. (87), si calcolano

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial z} = 0; \tag{91.1}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial z} = 0; \tag{91.2}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{z}}}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{z}}}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{z}}}{\partial z} = 0; \tag{91.3}$$

$\boxed{\text{Eq. (41)} \Rightarrow}$

$$d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, d\rho + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\rho\, d\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\, dz\,; \tag{92}$$

$\boxed{\text{Eq. (42)} \Rightarrow}$

$$ds \approx ((d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2)^{1/2}\,; \tag{93}$$

$\boxed{\text{Eq. (43)} \Rightarrow}$

$$d\Omega = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz\,; \tag{94}$$

$\boxed{\text{Eq.i (44.1), (44.2), (44.3)} \Rightarrow}$

$$\begin{cases} d\boldsymbol{S}_\rho = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, h_\varphi h_z\, d\varphi\, dz = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,\rho\, d\varphi\, dz \\ d\boldsymbol{S}_\varphi = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\, h_\rho h_z\, d\rho\, dz = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\, d\rho\, dz \\ d\boldsymbol{S}_z = \hat{\boldsymbol{z}}\, h_\rho h_\varphi\, d\rho\, d\varphi = \hat{\boldsymbol{z}}\,\rho\, d\rho\, d\varphi \end{cases}; \tag{95}$$

$\boxed{\text{Eq. (45)} \Rightarrow}$

$$\nabla\psi = \left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi\,; \tag{96}$$

$\boxed{\text{Eq. (49)} \Rightarrow}$

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{K} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho K_\rho) + \frac{\partial K_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho K_z)\right) \\ &\equiv \frac{K_\rho}{\rho} + \frac{\partial K_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial K_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}\;; \end{aligned} \tag{97}$$

$\boxed{\text{Eq. (49)} \Rightarrow}$

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{K} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial K_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho K_\varphi)\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial K_\rho}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho K_\varphi) - \frac{\partial K_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \\ &\equiv \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ K_\rho & \rho K_\varphi & K_z \end{vmatrix}\;; \end{aligned} \tag{98}$$

$\boxed{\text{Eq. (49)} \Rightarrow}$

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) \\ &\equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\;. \end{aligned} \tag{99}$$

■

## Coordinate Sferiche

La trasformazione delle coordinate rettangolari in quelle *sferiche* è

$$(x;y;z) \mapsto (u;v;w) \equiv (r;\theta;\varphi), \tag{100}$$

essendo $r \in \mathbb{R}_0^+$, la distanza dall'*origine*, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$;

Eq. (1) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x \equiv x(r,\theta,\varphi) := r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi, \\ y \equiv y(r,\theta,\varphi) := r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi, \\ z \equiv z(r,\theta,\varphi) := r\,cos\,\theta; \end{cases} \tag{101}$$

Eq. (2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} J(r,\theta,\varphi) &= \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\varphi \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial\varphi \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} sin\,\theta\,cos\,\varphi & r\,cos\,\theta\,cos\,\varphi & -r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi \\ sin\,\theta\,sin\,\varphi & r\,cos\,\theta\,sin\,\varphi & r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi \\ cos\,\theta & -r\,sin\,\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 sin\,\theta; \end{aligned} \tag{102}$$

Eq. (3) $\Rightarrow$

invertendo le Eq. (101), si ottiene il sistema di equazioni scalari

$$\begin{cases} r \equiv r(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ \theta \equiv \theta(x,y,z) = tan^{-1}((x^2+y^2)^{1/2}/z) \\ \varphi \equiv \varphi(x,y,z) = tan^{-1}(y/x) \end{cases} \tag{103}$$

Eq. (4) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} J^{-1}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y & \partial r/\partial z \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y & \partial\theta/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} & \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} & \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \\ \dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{1/2}} & \dfrac{yz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{1/2}} & -\dfrac{(x^2+y^2)^{1/2}}{x^2+y^2+z^2} \\ -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &\equiv \frac{1}{r(r^2-z^2)^{1/2}} \equiv \frac{1}{r^2(1-(cos\,\theta)^2)^{1/2}} = \frac{1}{r^2 sin\,\theta}; \end{aligned} \tag{104}$$

Eq. (5) $\Rightarrow$

la terna di superfici coordinate parametriche

$$\{r(x,y,z) = c_1, \quad \theta(x,y,z) = c_2, \quad \varphi(x,y,z) = c_3\}, \tag{105}$$

è costituita, rispettivamente, da una *superficie sferica*, da una *superficie conica* avente l'asse $Z$ come asse di simmetria e da un *piano* contenente l'asse $Z$;

Eq. (7) $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}}\, r \sin\theta \cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\, r \sin\theta \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\, r \cos\theta\,; \tag{106}$$

Eq. (9.1) $\Rightarrow$

Tenendo conto che la base ortonormale rettangolare è invariante sia nelle direzioni che nei versi dei suoi elementi, si calcolano, a partire dall'Eq. (106),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{x}}\, r \cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\, r \cos\theta \sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\, r \sin\theta, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{x}}\, r \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\, r \sin\theta \cos\varphi \end{cases} \tag{107.1}$$

e, quindi, i fattori di scala *sferici* sono

$$h_r \equiv \|\partial \boldsymbol{r}/\partial r\| = 1, \qquad h_\theta \equiv \|\partial \boldsymbol{r}/\partial \theta\| = r, \qquad h_\varphi \equiv \|\partial \boldsymbol{r}/\partial \varphi\| = r \sin\theta. \tag{107.2}$$

Segue che

Eq. (9) $\Rightarrow$

$$\{\hat{\boldsymbol{t}}_r, \hat{\boldsymbol{t}}_\theta, \hat{\boldsymbol{t}}_\varphi\} := \{\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\} \equiv \left\{ \frac{1}{h_r}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}, \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}, \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right\}, \tag{108}$$

i.e., dalle Eq.i (107.1), (107.2) e (39), si ottengono le identità

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta \equiv (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta \equiv (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\varphi \equiv (\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}} + (\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})\hat{\boldsymbol{y}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}}, \end{cases} \tag{109}$$

le quali possono essere poste sinteticamente nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}. \tag{110}$$

Poiché la matrice (quadrata) nell'Eq. (110) ha i termini *reali* e il suo determinante è generalmente *non-nullo*, essa risulta invertibile per *trasposizione* righe $\rightleftarrows$ colonne, i.e.,

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix} . \tag{111}$$

La forma matriciale (111) corrisponde al sistema lineare di identità *inverse* vs. le Eq. (109)

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\varphi - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\varphi \equiv (\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} + (\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}})\hat{\boldsymbol{\theta}} + (\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi \equiv (\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} + (\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}})\hat{\boldsymbol{\theta}} + (\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta \equiv (\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} + (\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cancel{(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\hat{\boldsymbol{\varphi}}}. \end{cases} \tag{112}$$

È opportuno disporre anche delle derivate dei versori cilindrici vs. le coordinate cilindriche. Mediante le Eq. (109), si calcolano

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \qquad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\theta; \tag{113.1}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} = -\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\theta; \tag{113.2}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\varphi} = -\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta; \tag{113.3}$$

Eq. (41) $\Rightarrow$

$$d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{r}}\,dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,r\,d\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,r\sin\theta\,d\varphi; \tag{114}$$

Eq. (42) $\Rightarrow$

$$ds \approx ((dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2)^{1/2}; \tag{115}$$

Eq. (43) $\Rightarrow$

$$d\Omega = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi; \tag{116}$$

Eq.i (44.1), (44.2), (44.3) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} d\boldsymbol{S}_r = \hat{\boldsymbol{r}}\,h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi = \hat{\boldsymbol{r}}\,r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi, \\ d\boldsymbol{S}_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,h_r h_\varphi dr d\varphi = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,r\sin\theta\,dr\,d\varphi, \\ d\boldsymbol{S}_\varphi = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,h_r h_\theta dr d\theta = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,r\,dr\,d\theta; \end{cases} \tag{117}$$

Eq. (45) $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi; \tag{118}$$

Eq. (49) $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{K} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 K_r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r K_\theta\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r K_\varphi)\right)$$

$$\equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 K_r) + \frac{1}{r\,sin\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(K_\theta sin\,\theta) + \frac{\partial K_\varphi}{\partial\varphi}\right). \tag{119}$$

$\boxed{\text{Eq. (49)} \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{K} = \frac{1}{r^2 sin\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(rK_\varphi\, sin\,\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rK_\theta)\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \lrcorner$$

$$\llcorner + \frac{1}{r\,sin\,\theta}\left(\frac{\partial K_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rK_\varphi\, sin\,\theta)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rK_\theta) - \frac{\partial K_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\equiv \frac{1}{r^2 sin\,\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\,sin\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ K_r & rK_\theta & r\,sin\,\theta\, K_\varphi \end{vmatrix}; \tag{120}$$

$\boxed{\text{Eq. (49)} \Rightarrow}$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2 sin\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 sin\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)$$

$$\equiv \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2(sin\,\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\psi(\boldsymbol{r}). \tag{121}$$

Si noti l'identità formale (valida **sse** $\boldsymbol{r} \mapsto \psi(\boldsymbol{r}) \in \mathcal{C}^2$ almeno, è una funzione *scalare* di *vettore*),

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\psi(\boldsymbol{r})), \tag{122}$$

confrontandola con il caso scalare *radiale puro* $r \mapsto \psi(r)$ (funzione *scalare* di variabile *scalare*) dell'**Esercizio 8**, 8.6.

■

# Esercizi

## Esercizio 1

Un caso particolare delle Eq.i (1) è quello in cui $w = c$, con $c$ costante, i.e.,

$$\begin{cases} x \equiv x(u,v,c) \equiv x(u,v) \\ y \equiv y(u,v,c) \equiv y(u,v) \\ z \equiv z(u,v,c) \equiv z(u,v) \end{cases} .$$

Qui, il vettore-spostamento $\boldsymbol{r} \equiv x(u,v)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y(u,v)\,\hat{\boldsymbol{y}} + z(u,v)\,\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \boldsymbol{r}(u,v)$ traccia la superficie 3-dim $\Sigma$: $w(x,y,z) = c$, sulla quale, sono definite le coordinate curvilinee $u$ e $v$.

1.1 Si dimostri che le linee coordinate di equazioni rispettive $u = c_1$ e $v = c_2$ sono localmente ortogonali sse

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0; \tag{123}$$

1.2 si dimostri che l'elemento differenziale infinitesimo di lunghezza d'arco lungo una linea generalmente regolare, giacente su $\Sigma$ e rappresentata dalle equazioni $t$-parametriche

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} ,$$

è dato da (cfr/c Eq. (42))

$$ds \approx (E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)^{1/2}, \tag{124}$$

in cui, sono definiti, come *norme* hilbertiane, i parametri di 2º ordine

$E := \|\partial\boldsymbol{r}/\partial u\|^2$, $F := (\partial\boldsymbol{r}/\partial u)\cdot(\partial\boldsymbol{r}/\partial v)$, $G := \|\partial\boldsymbol{r}/\partial v\|^2$, $du^2 \equiv (du)^2$, $dv^2 \equiv (dv)^2$;

1.3 si dimostri che se $F \equiv 0$, allora le coordinate $u, v$ su $\Sigma$ sono mutuamente ortogonali;

1.4 si dimostri che l'area $\mathbb{A}$ di $\Sigma$ vale

$$\mathbb{A} = \iint_\Sigma (EG - F^2)^{1/2} du\,dv \equiv \iint_\Sigma \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\,dv \equiv \iint_\Sigma (det(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T))^{1/2} du\,dv, \tag{125}$$

dove la $2\times 3$-matrice $\mathbf{A}$ – che deve avere caratteristica 2 affinché sia garantita la *regolarità* di $\Sigma$ – è definita (cfr/c [10], VOL. **2**, P. 439, Eq. (1.3)) come

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} . \tag{125.1}$$

## Esercizio 2

In coordinate ortogonali curvilinee generiche $\{u, v, w\}$, si determini la rappresentazione esplicita del *laplaciano vettoriale* (v., e.g., [9], Eq. (34.1))

$$\nabla^2 \boldsymbol{K} \equiv (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{K} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{K}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{K}) .$$

**Esercizio 3**

Dal confronto tra le *scomposizioni ortogonali* rettangolare vs. cilindrica del campo vettoriale $\boldsymbol{K}$ generico,

$$\boldsymbol{K} \equiv \begin{cases} K_x \hat{\boldsymbol{x}} + K_y \hat{\boldsymbol{y}} + K_z \hat{\boldsymbol{z}} \\ K_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + K_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + K_z \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases},$$

mediante le Eq. (87) e (90), si verifichino le identità matriciali (e, da queste, le relazioni lineari scalari ordinatamente corrispondenti)

$$\begin{pmatrix} K_\rho \\ K_\varphi \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix}, \qquad (126.1)$$

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_\rho \\ K_\varphi \\ K_z \end{pmatrix}, \qquad (126.2)$$

portando alla conclusione che *le rappresentazioni rettangolare e cilindrica di* $\boldsymbol{K}$ *si trasformano l'una nell'altra come le basi vettoriali-unitarie* (*ortonormali*) *rispettive* (ciò vale, peraltro, per una coppia *qualsiasi* di scomposizioni ortogonali di $\boldsymbol{K}$).

**Esercizio 4**

Dal confronto tra le *scomposizioni ortogonali* rettangolare vs. sferica del campo vettoriale $\boldsymbol{K}$ generico,

$$\boldsymbol{K} \equiv \begin{cases} K_x \hat{\boldsymbol{x}} + K_y \hat{\boldsymbol{y}} + K_z \hat{\boldsymbol{z}} \\ K_r \hat{\boldsymbol{r}} + K_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + K_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{cases},$$

mediante le Eq. (109) e (112), si verifichino le identità matriciali (e, da queste, le relazioni lineari scalari ordinatamente corrispondenti)

$$\begin{pmatrix} K_r \\ K_\theta \\ K_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix}, \qquad (127.1)$$

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_r \\ K_\theta \\ K_\varphi \end{pmatrix}, \qquad (127.2)$$

concludendo che *le rappresentazioni rettangolare e sferica di* $\boldsymbol{K}$ *si trasformano l'una nell'altra come le basi vettoriali-unitarie* (*ortonormali*) *rispettive* (ciò si verifica, peraltro, nel caso di una coppia *qualsiasi* di scomposizioni ortogonali di $\boldsymbol{K}$).

**Esercizio 5**

Mediante prodotto matriciale (composizione di trasformazioni lineari) tra i termini delle Eq. (110) e (89) e, poi, tra i termini delle Eq. (88) e (111), si verifichi che le trasformazioni diretta e inversa tra le basi vettoriali ortonormali *cilindrica* e *sferica* sono rappresentabili mediante le equazioni

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}, \tag{128.1}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix}. \tag{128.2}$$

Si scrivano le equazioni lineari a cui ciascuna di queste corrisponde, ottenendo le rappresentazioni dei versori sferici in termini di quelli cilindrici, e viceversa.

**Esercizio 6**

Si verifichino le espressioni trasformate *sferiche* degli operatori scalari rettangolari di derivazione,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{129.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{129.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{129.3}$$

**Esercizio 7**

Si verifichino le identità di trasformazione seguenti, la prima *cilindrico-rettangolare*, la seconda *sferico-rettangolare*:

7.1 $(\hat{\boldsymbol{\rho}}\cot\varphi - \hat{\boldsymbol{\varphi}})\cos\varphi \equiv (x/y)\,\hat{\boldsymbol{x}}$; 7.2 $\dfrac{1}{r\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \equiv -\dfrac{y\hat{\boldsymbol{x}} - x\hat{\boldsymbol{y}}}{x^2+y^2}$.

**Esercizio 8**

Rispetto al sistema consueto di coordinate *sferiche* $\{r, \theta, \varphi\}$, si determinino i risultati seguenti:

8.1 $\nabla(1/r) = \nabla\times(\cos\theta)\nabla\varphi$; 8.2 $\nabla\varphi = \dfrac{r}{\sin\theta}\nabla\theta$;

8.3 $\nabla f(r) = \hat{\boldsymbol{r}}f'(r)$; 8.4 $\nabla\cdot(f(r)\boldsymbol{r}) = 3f(r) + rf'(r)$;

8.5 $\nabla\times(f(r)\boldsymbol{r}) = 0$; 8.6 $\nabla^2 f(r) = \dfrac{2}{r}f'(r) + f''(r)$.

**Esercizio 9**

Rispetto al sistema consueto di coordinate *cilindriche* $\{\rho, \varphi, z\}$, si provi che

$$\nabla \ln\rho = \nabla\times(\hat{\boldsymbol{z}}\varphi).$$

**Esercizio 10**

Assegnati il campo scalare *armonico* $\boldsymbol{r} \mapsto \psi(\boldsymbol{r})$ (i.e., tale che $\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) = 0$) e il campo vettoriale derivabile $\boldsymbol{K} := \nabla \times (\psi \boldsymbol{r})$, si verifichi, in coordinate sferiche, che

$$\boldsymbol{K} \cdot \nabla \times \boldsymbol{K} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\,\partial r}\right).$$

Inoltre, se $\psi(\boldsymbol{r})$ è *separabile* totalmente vs. le tre variabili scalari (i.e., $\psi(\boldsymbol{r}) \equiv R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$), allora, si provi che $\boldsymbol{K} \cdot \nabla \times \boldsymbol{K} = 0$, i.e., che $\boldsymbol{K} \perp (\nabla \times \boldsymbol{K})$.

[cf/c: [9], Esercizio 12]

**Esercizio 11**

Per il sistema di coordinate *ellittico-cilindriche*, la trasformazione delle coordinate rettangolari, $(x; y; z) \mapsto (u; v; w) \equiv (u; \varphi; z)$, è tale che $u \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$.

Assegnata la *costante* $a \in \mathbb{R}^+$, le equazioni di trasformazione delle coordinate rettangolari sono

$$\begin{cases} x \equiv x(u, \varphi, z) := a \cosh u \cos\varphi \\ y \equiv y(u, \varphi, z) := a \sinh u \sin\varphi \\ z \equiv z(u, \varphi, z) := z \end{cases}. \tag{130}$$

11.1 Si verifichi che le famiglie di superfici coordinate sono

- *cilindri ellittici* confocali in $(\pm a; 0; z)$: $u = c_1$,
- *cilindri iperbolici*: $\varphi = c_2$,
- *piani* paralleli al piano $X \times Y$: $z = c_3$;

11.2 si verifichi che tale sistema di coordinate è ortogonale;

11.3 si verifichi che i fattori di scala *ellittico-cilindrici* sono dati da

$$h_u = h_\varphi = a((\sinh u)^2 + (\sin\varphi)^2)^{1/2}, \qquad h_z = 1. \tag{131}$$

**Esercizio 12**

Per il sistema di coordinate *parabolico-cilindriche*, la trasformazione delle coordinate rettangolari, $(x; y; z) \mapsto (u; v; w) \equiv (u; v; z)$, è tale che $\{u, z\} \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}_0^+$.

Le equazioni di trasformazione delle coordinate rettangolari sono

$$\begin{cases} x \equiv x(u, v, z) := (u^2 - v^2)/2 \\ y \equiv y(u, v, z) := uv \\ z \equiv z(u, v, z) := z \end{cases}. \tag{132}$$

12.1 Si verifichi che le famiglie di superfici coordinate sono

- *cilindri parabolici* confocali sull'asse $Z$: $u = c_1$,
- *cilindri parabolici* confocali sull'asse $Z$: $v = c_2$,
- *piani* paralleli al piano $X \times Y$: $z = c_3$;

12.2 si verifichi che tale sistema di coordinate è ortogonale;

12.3 si verifichi che i fattori di scala *parabolico-cilindrici* sono dati da

$$h_u = h_v = (u^2 + v^2)^{1/2}, \qquad h_z = 1\,. \tag{133}$$

**Esercizio 13**

Per il sistema di coordinate *prolato-sferoidali*, la trasformazione delle coordinate rettangolari, $(x; y; z) \mapsto (u; v; w) \equiv (u; \theta; \varphi)$, è tale che $u \in \mathbb{R}_0^+$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Assegnata la *costante* $a \in \mathbb{R}^+$, le equazioni di trasformazione delle coordinate rettangolari sono

$$\begin{cases} x \equiv x(u, \theta, \varphi) := a \sinh u \sin\theta \cos\varphi \\ y \equiv y(u, \theta, \varphi) := a \sinh u \sin\theta \sin\varphi \\ z \equiv z(u, \theta, \varphi) := a \cosh u \cos\theta \end{cases}. \tag{134}$$

13.1 Si verifichi che le famiglie di superfici coordinate sono

- *sferoidi prolati*: $u = c_1$,
- *iperboloidi a due falde*: $\theta = c_2$,
- *semi-piani* originanti dall'asse $Z$: $\varphi = c_3$;

13.2 si verifichi che tale sistema di coordinate è ortogonale;

13.3 si verifichi che i fattori di scala *prolato-sferoidali* sono dati da

$$h_u = h_\theta = a((\sinh u)^2 + (\sin\theta)^2)^{1/2}, \qquad h_\varphi = a \sinh u \sin\theta\,. \tag{135}$$

**Esercizio 14**

Per il sistema di coordinate *oblato-sferoidali*, la trasformazione delle coordinate rettangolari, $(x; y; z) \mapsto (u; v; w) \equiv (u; \alpha; \varphi)$, è tale che $u \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Assegnata la *costante* $a \in \mathbb{R}^+$, le equazioni di trasformazione delle coordinate rettangolari sono

$$\begin{cases} x \equiv x(u, \alpha, \varphi) := a \cosh u \cos\alpha \cos\varphi \\ y \equiv y(u, \alpha, \varphi) := a \cosh u \cos\alpha \sin\varphi \\ z \equiv z(u, \alpha, \varphi) := a \sinh u \sin\alpha \end{cases}. \tag{136}$$

14.1 Si verifichi che le famiglie di superfici coordinate sono

- *sferoidi oblati*: $u = c_1$,
- *iperboloidi a una falda*: $\alpha = c_2$,
- *semi-piani* originanti dall'asse $Z$: $\varphi = c_3$;

14.2 si verifichi che tale sistema di coordinate è ortogonale;

14.3 si verifichi che i fattori di scala *oblato-sferoidali* sono dati da

$$h_u = h_\alpha = a((\sinh u)^2 + (\sin\alpha)^2)^{1/2}, \qquad h_\varphi = a \cosh u \cos\alpha\,. \tag{137}$$

## Esercizio 15

Per quanto riguarda il sistema di coordinate *paraboloidali*, dedotte da quelle *parabolico-cilindriche*, Eq.i (132), la trasformazione delle coordinate rettangolari, $(x;y;z) \mapsto (u;v;w) \equiv (u;v;\varphi)$, è tale che $\{u,v\} \subset \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in [0,2\pi)$. Le equazioni di trasformazione dalle coordinate rettangolari sono date dal sistema

$$\begin{cases} x \equiv x(u,v,\varphi) := uv\cos\varphi \\ y \equiv y(u,v,\varphi) := uv\sin\varphi \\ z \equiv z(u,v,\varphi) := (u^2-v^2)/2 \end{cases} . \tag{138}$$

15.1 Si verifichi che le famiglie di superfici coordinate sono

- *paraboloidi simmetrici vs. semi-asse* $Z^+$: $u = c_1$,
- *paraboloidi simmetrici vs. semi-asse* $Z^+$: $\theta = c_2$,
- *semi-piani* originanti dall'asse $Z$: $\varphi = c_3$;

15.2 si verifichi che tale sistema di coordinate è ortogonale;

15.3 si verifichi che i fattori di scala *paraboloidali* sono dati da

$$h_u = h_v = (u^2+v^2)^{1/2}, \qquad h_\varphi = uv; \tag{139}$$

15.4 si verifichi che vale il prodotto vettoriale $\hat{\boldsymbol{u}} \times \hat{\boldsymbol{v}} = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ tra i versori di linea *tangenti*.

## Esercizio 15.1

Un controllo immediato delle Eq.i di trasformazione (138) e dei dominî delle coordinate rispettive (indipendenti!) suggerisce una rappresentazione alternativa un po' più 'snella' per la trasformazione *paraboloidale* stessa. Alla base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$, viene, in questo caso, associato il sistema scalare *diretto*

$$\begin{cases} x \equiv x(u,v,\varphi) := (uv)^{1/2}\cos\varphi \\ y \equiv y(u,v,\varphi) := (uv)^{1/2}\sin\varphi \\ z \equiv z(u,v,\varphi) := (u-v)/2 \end{cases} , \tag{140.1}$$

cui corrisponde il sistema *inverso*

$$\begin{cases} u \equiv u(r,z) := r+x \\ v \equiv v(r,z) := r-z \\ \varphi \equiv \varphi(x,y,z) := \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \tag{140.2}$$

vs. la base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\}$. Nel sistema (140.2), si ha $r \equiv r(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

Si verifichino le espressioni trasformate seguenti, di impiego frequente in Fisica Quantistica:

- $$h_u = \left(\frac{u+v}{4u}\right)^{1/2}, \quad h_v = \left(\frac{u+v}{4v}\right)^{1/2}, \quad h_\varphi = (uv)^{1/2}; \tag{141}$$
- $$ds(u,v,\varphi) = \left(\frac{u+v}{4u}(du)^2 + \frac{u+v}{4v}(dv)^2 + uv(d\varphi)^2\right)^{1/2}; \tag{142}$$
- $$\boldsymbol{\nabla}_{u,v,\varphi} = \hat{\boldsymbol{u}}\left(\frac{4u}{u+v}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{\boldsymbol{v}}\left(\frac{4v}{u+v}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{(uv)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}; \tag{143}$$
- $$\nabla^2_{u,v,\varphi} = \frac{4}{u+v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial}{\partial v}\right)\right) + \frac{1}{uv}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{144}$$

**Esercizio 16**

Per il sistema di coordinate *bipolari*, la trasformazione delle coordinate rettangolari, $(x;y;z) \mapsto$ $\mapsto (u;v;w) \equiv (\varphi;\kappa;z)$, è tale che $\varphi \in [0,2\pi)$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.
Assegnata la *costante* $a \in \mathbb{R}^+$, le equazioni di trasformazione delle coordinate rettangolari sono

$$\begin{cases} x \equiv x(\varphi,\kappa,z) := \dfrac{a\, sinh\,\kappa}{cosh\,\kappa - cos\,\varphi}\,, \\ y \equiv y(\varphi,\kappa,z) := \dfrac{a\, sin\,\varphi}{cosh\,\kappa - cos\,\varphi}\,, \\ z \equiv z(\varphi,\kappa,z) := z\,. \end{cases} \tag{145}$$

16.1 Si verifichi che le famiglie di superfici coordinate sono

- *piani* contenenti l'asse $Z$: $\varphi = c_1$,
- coppie di *cilindri circolari* con gli assi di simmetria ortogonali, rispettivamente, all'asse $X$ e all'asse $Y$: $\kappa = c_2$,
- *piani* paralleli al piano $X \times Y$: $z = c_3$;

16.2 si verifichi che tale sistema di coordinate è ortogonale;

16.3 si verifichi che i fattori di scala *bipolari* sono dati da

$$h_\varphi = h_\kappa = \frac{a}{cosh\,\kappa - cos\,\varphi}\,, \qquad h_z = 1\,. \tag{146}$$

**Esercizio 17**

Si consideri una superficie *torica* di sezione *circolare*, avente l'asse $Z$ (cartesiano) come asse *concentrico* di simmetria, *non-interno* al volume del toro. La sezione torica sia ortogonale al piano $X \times Y$ e sia tagliata da questo in due semicerchi contenuti, rispettivamente, nei semi-spazi $Z^-$ e $Z^+$. Inoltre, sia $\rho = \rho_0$ la distanza radiale, sul piano $X \times Y$, tra l'origine e il centro della sezione circolare del toro.
Circa la trasformazione dalle coordinate rettangolari al sistema di coordinate *toriche*, $(x;y;z) \mapsto$ $\mapsto (u;v;w) \equiv (\xi;\varphi;\beta)$, è tale che $\xi \in [0,\rho_0]$, $\varphi \in [0,2\pi)$, $\beta \in [0,2\pi)$.
Le equazioni di trasformazione delle coordinate rettangolari sono

$$\begin{cases} x \equiv x(\xi,\varphi,\beta) := (\rho_0 + \xi\, cos\,\beta)\, cos\,\varphi \\ y \equiv y(\xi,\varphi,\beta) := (\rho_0 + \xi\, cos\,\beta)\, sin\,\varphi \\ z \equiv z(\xi,\varphi,\beta) := \xi\, sin\,\beta \end{cases}. \tag{147}$$

17.1 Si verifichi che le famiglie di superfici coordinate sono

- *sezioni toriche circolari* ortogonali al piano $X \times Y$ e centrate sulla circonferenza $\rho = \rho_0$ sul piano $X \times Y$: $\xi = c_1$,
- *piani* contenenti l'asse $Z$ e le sezioni toriche: $\varphi = c_2$,
- *piani* passanti localmente per i centri delle sezioni toriche e ortogonali ad esse: $\beta = c_3$;

17.3 si verifichi che il sistema *inverso* di equazioni vs. la trasformazione (147) è dato da

$$\begin{cases} \xi \equiv \xi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+\rho_0^2-2\rho_0(x^2+y^2)^{1/2})^{1/2} \\ \varphi \equiv \varphi(x,y,z) = tan^{-1}(y/x) \\ \beta \equiv \beta(x,y,z) = tan^{-1}\left(\dfrac{z}{(x^2+y^2)^{1/2}-\rho_0}\right) \end{cases} ; \tag{148}$$

17.3 si verifichi che tale sistema di coordinate è ortogonale;

17.4 si verifichi che i fattori di scala *torici* sono dati da

$$h_\xi = 1, \qquad h_\varphi = \rho_0 + \xi\cos\beta, \qquad h_\beta = \xi. \tag{149}$$

17.5 si verifichi che il *volume* $\Omega$ e l'*area* $\mathrm{A}$ della superficie *torica*, la cui sezione circolare abbia raggio $\xi = a$, valgono, rispettivamente,

$$\Omega = 2\pi^2 a^2 \rho_0, \tag{150.1}$$

$$\mathrm{A} = 4\pi^2 a\rho_0 \equiv \frac{2\Omega}{a}. \tag{150.2}$$

### Osservazione 3

La geometria delle coordinate *toriche* è, indubbiamente, quella più conveniente per la rappresentazione delle proprietà dinamiche del plasma in un *tokamak*, il modello di reattore di sviluppo e di interesse applicativo maggiore nello studio del plasma di fusione nucleare.

### Esercizio 18

Sia $\Sigma := \boldsymbol{r} \mapsto f(\boldsymbol{r}(u,v))$, con $\boldsymbol{r} \equiv (x(u,v); y(u,v); z(u,v))$ una superficie *regolare* e almeno di classe $\mathcal{C}^1(\overline{T})$, definita nell'insieme *chiuso* e *connesso* $\overline{T}$ della *coppia* parametrica variabile $\{u,v\}$ (e.g., v. [10], VOL. **2**, CAP. 6). Inoltre, sia $\mathfrak{F}(\boldsymbol{r})$ un campo vettoriale su $\Sigma$.
Dalla scomposizione $\mathfrak{F}(\boldsymbol{r}) \equiv \mathfrak{F}_\perp(\boldsymbol{r}) + \mathfrak{F}_\parallel(\boldsymbol{r})$ in $\boldsymbol{r} \in \Sigma$, si verifichino le rappresentazioni *locali*

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_\perp(\boldsymbol{r}) = \dfrac{(\nabla f(\boldsymbol{r}) \cdot \mathfrak{F}(\boldsymbol{r}))\nabla f(\boldsymbol{r})}{\|\nabla f(\boldsymbol{r})\|^2} \\ \mathfrak{F}_\parallel(\boldsymbol{r}) = \dfrac{(\nabla f(\boldsymbol{r}) \times \mathfrak{F}(\boldsymbol{r}))\times\nabla f(\boldsymbol{r})}{\|\nabla f(\boldsymbol{r})\|^2} \end{cases} \tag{151}$$

dei vettori componenti *normale* e *tangente* in *qualsiasi* parametrizzazione ortogonale (cilindrica, sferica, etc.) del campo $\mathfrak{F}(\boldsymbol{r}) \equiv \mathfrak{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

### Osservazione 4

La comprensione delle formule (151) è importante nella rappresentazione *parametrica* delle superfici in programmi di grafica come GnuPlot ™.

■■■

## Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .


[1] LASS, H., *Vector and Tensor Analysis*, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1950);

[2] BORISENKO, A. I. - TARAPOV, I. E., *Vector and Tensor Analysis*, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1968);

[3] SPIEGEL, M. R. - LIPSCHUTZ, S. - SPELLMAN, D., *Vector Analysis*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 2ND ED., MCGRAW-HILL EDU. (2009);

[4] HSU, H. P., *Applied Vector Analysis*, CH. 8, BOOKS FOR PROFESSIONALS, HBJ PUBNS. (1984);

[5] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2ND ED., CH.S 6, 7, PRENTICE-HALL, INC. (1976);

[6] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7TH ED., CH.S 3, 5, ACADEMIC PRESS (2013).

[7] MORSE, P. M., - FESHBACH, H., *Methods of Theoretical Physics*, **I**, CH. 5, MCGRAW-HILL BOOK CO. (1953);

[8] TEMME, N. M., *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, CH. 10, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);

[9] ZWILLINGER, D., *Standard Mathematical Tables and Formulas*, P. 388, § 5.10, 33RD ED., CRC PRESS (2018).

Riguardo ad argomenti preliminari e\o correlati da rivisitare, si vedano, e.g.:

[10] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *ANALISI MATEMATICA*, VOL. **2**, ED. ZANICHELLI (-MASSON) (RIST. 1998);

[11] LIPSCHUTZ, S., *Differential Geometry*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1969);

[12] L'AUTORE (CM) [math-notebook PDF],
*Operazioni Vettoriali avanzate in* $\mathbb{R}^3$.


■■■