Equazioni Differenziali Ordinarie Lineari del 2° ordine a coefficienti variabili -

Metodi di Integrazione

claudio magno

cldmgn47@gmail.com

revisione
24 gennaio 2024

CM Portable MATH Notebook Series™

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754)

INDICE

Introduzione

Un argomento classico come quello delle *Equazioni Differenziali Ordinarie* sembra (a me) che abbia raggiunto un livello di maturità e di completezza consentito agli strumenti analitici correnti tale da rendere abbastanza superflua (fino a prova contraria) una sua riformulazione più 'moderna' (v., e.g., [1], [2], [3] [20]), quand'anche io ne fossi capace … .
Per tale scopo, ritengo che basti (e avanzi), per le applicazioni quotidiane, quanto contenuto in testi classici consolidati come quelli elencati nella **Bibliografia** finale.
Quindi, da fisico prestato accidentalmente all'Analisi e incolpevolmente meno sensibile a svolazzi estetici più o meno brillanti che non a grigi aspetti applicativi (purché *solidamente* ancorati alla Teoria), ho inteso assemblare, qui, alcuni 'handouts' di base (richiestimi esplicitamente …) su certi modelli matematici differenziali che, poi, consentano un passo avanti verso un uso più consapevole del Calcolo Numerico e della sua programmazione.

Anche sulle applicazioni, la letteratura è sterminata e richiede *grande* rigore. Invece, le mie pagine sono decisamente poche e ridotte a cenni: tutt'al più, sono un invito – lo dico amichevolmente – all'approfondimento personale altrove.
Sia come sia, mi limito alla presentazione di espansioni in *serie di potenze*, riservando un'attenzione un po' dettagliata alla standardizzazione costruttiva di quelle, soprattutto, del tipo di *Fuchs-Frobenius* intorno a *singolarità regolari*, e di quelle rappresentabili mediante le *Funzioni Ipergeometriche*, sia *Gaussiane* che *Confluenti*, molto flessibili date le loro dipendenze, rispettivamente, da 3 e da 2 parametri. Infatti, loro utilità è nota, e.g., nella soluzione della parte *radiale* dell'*Equazione di Schrödinger* relativa al modello di *interazione coulombiana* tra un elettrone in moto stazionario e uno ione idrogenoide, come si ipotizza avvenga nella fase di innesco della *fusione nucleare* '*fredda*' nel $^{106}_{46}\mathrm{Pd}_{60}$ e in certi suoi isotopi-sorelle e composti.

Va da sé che un uso cieco o, comunque, superficiale, privo di un'analisi preventiva *locale* accurata dell'utilizzo di questi strumenti 'estremi' (specificamente, la natura della *convergenza* e il controllo attento dell'*errore* vs. il modello *concreto* in esame), è l'anticamera *garantita* di inconsistenze gravi e di catastrofi computazionali.

C M

A - Riduzioni classiche di Integrazione

La forma *normale* dell'equazione differenziale del 2º ordine, *ordinaria*, *lineare*, *omogenea* e a coefficienti *variabili*, ordinata vs. le derivate decrescenti della funzione incognita $x \mapsto y(x)$, è

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

dove p e q rappresentano funzioni note, *continue* in uno stesso intervallo $\Im \subseteq \mathbb{R}$.
Si dimostra che, per la determinazione dell'integrale generale dell'Eq. (1), quando ne sia già *noto* un integrale particolare $y_1(x) \not\equiv 0$, un *secondo* integrale particolare *linearmente indipendente* da $y_1(x)$ è *propagato* da qualsiasi $x_0 \in \overline{\Im}$, con la formula di *Lagrange-Picard* ([1], [2], [9], [11], [16]),

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} (y_1(t))^{-2} e^{-\int_{x_0}^{t} p(u)du} dt. \tag{2}$$

□

Procedimenti particolari alternativi all'Eq. (2):

1. se $p(x) \equiv (ax+b)/\psi(x)$ $\wedge$ $q(x) \equiv -a/\psi(x)$, i.e., generalmente in $\Im$, sia $\psi \not\equiv 0$, allora, un integrale *particolare* dell'Eq. (1) è $y_1(x) = ax+b$;

2. se $\exists\, \eta \in \mathbb{R}$ tale che $\eta^2 + \eta p(x) + q(x) \equiv 0$ in $\Im$, allora, un integrale *particolare* dell'Eq. (1) è dato da $y_1(x) = e^{\eta x}$;

3. se $p(x) \equiv \lambda/(ax+b)$ $\wedge$ $q(x) \equiv \mu/(ax+b)^2$, essendo $\{a, \mu\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$, l'Eq. (1) corrisponde alla cosiddetta *Equazione di Euler* (del 2º ordine). Qui, con la sostituzione $e^t := |ax+b|$, si introduce la variabile intermedia $t := \ln|ax+b| \equiv t(x)$ di *composizione* da x a y, dalla quale, si calcolano le trasformazioni valide, rispettivamente, per $ax+b \gtrless 0$,

   - $p(x) \equiv \pm\lambda e^{-t}, \qquad q(x) \equiv \mu e^{-2t}, \qquad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{a}{ax+b} \equiv \pm a e^{-t},$
   - $y'(x) \equiv \dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt} = \pm a e^{-t} y'(t) \equiv y'(x(t)),$
   - $y''(x) \equiv \dfrac{dy'}{dx} \equiv \dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy'}{dt} = (\pm a e^{-t})\dfrac{d}{dt}(\pm a e^{-t} y'(t)) = a^2 e^{-2t}(y''(t) - y'(t)) \equiv y''(x(t)).$

   Pertanto, sostituendo a $p(x)$, $q(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ le espressioni trasformate corrispondenti, l'Eq. (1) muta nella t-rappresentazione *omogenea lineare a coefficienti costanti*

   $$y''(t) - (1-\lambda/a)\,y'(t) + (\mu/a^2)\,y(t) = 0, \tag{3}$$

   la cui equazione *caratteristica*,

   $$s^2 - (1-\lambda/a)\,s + \mu/a^2 = 0, \tag{3.1}$$

   ha, in $\mathbb{C}$, le radici *formali* $s = (a-\lambda)/(2a) + (\Delta/4)^{1/2}$, dove $\Delta/4 := ((a-\lambda)/(2a))^2 - \mu/a^2$.

   La rappresentazione dell'*integrale generale* dell'*Equazione di Euler* del 2º ordine dipende dal *segno* di Δ. Ripristinando la variabile x, risulta, rispettivamente,

$$y(x;c_1,c_2) = \left\{ \begin{array}{ll} c_1 |ax+b|^{(a-\lambda)/(2a)+(\Delta/4)^{1/2}} + c_2 |ax+b|^{(a-\lambda)/(2a)-(\Delta/4)^{1/2}}, & \text{se } \Delta > 0, \\ |ax+b|^{(a-\lambda)/(2a)}(c_1 + c_2 \ln|ax+b|), & \text{se } \Delta = 0, \\ |ax+b|^{(a-\lambda)/(2a)}(c_1 \cos(|\Delta/4|^{1/2} \ln|ax+b|) + \hookleftarrow & \\ \qquad \hookrightarrow + c_2 \sin(|\Delta/4|^{1/2} \ln|ax+b|)), & \text{se } \Delta < 0. \end{array} \right\}. \tag{4}$$

4. Se $p(x) \equiv (a_1 x + b_1)/(a_0 x + b_0) \wedge q(x) \equiv (a_2 x + b_2)/(a_0 x + b_0)$, dove $\{a_j, b_j\}_{j=0,1,2} \subset \mathbb{R}$, con $a_0 \in \mathbb{R}^+$ (senza perdita di generalità), si determina l'*Equazione differenziale ordinaria lineare di Laplace* (del 2° ordine). Di questa, quando sussistono certe condizioni tra i vari parametri, si *può* determinare un integrale *particolare reale* della *forma di Laplace*

$$y_1(x) := \int_\alpha^\beta e^{\eta x t} \phi(t)\, dt. \tag{5}$$

Qui, per definitezza, si assumano $\alpha < \beta$ e ϕ una funzione opportuna mentre i valori 1 o i sono assegnati al parametro η nei modi prescritti seguenti:

4.1 sia $\Delta := a_1^2 - 4 a_0 a_2 > 0$:

assunto $\eta \equiv 1$, **sse** i numeri $\lambda := (a_0 b_1 - a_1 b_0)/a_0$, con $\lambda > 0$, e $\mu := (a_0 b_2 - a_2 b_0)/a_0$ verificano la disuguaglianza $|2a_0\mu - a_1\lambda| < \Delta^{1/2}\lambda$, allora, $\exists$ un integrale *particolare* della forma (5) dato da

$$y_1(x) = \int_\alpha^\beta e^{(x + b_0/a_0)t} (\beta - t)^{\frac{\lambda\beta+\mu}{\Delta^{1/2}} - 1} (t - \alpha)^{-\frac{\lambda\alpha+\mu}{\Delta^{1/2}} - 1} dt, \tag{6}$$

dove α e β sono le radici *distinte* del polinomio quadratico $A(t) \equiv a_0 t^2 + a_1 t + a_2$;

4.2 sia $\Delta = 0$.

$\nexists$ alcun integrale particolare del tipo (5). Eccetto che in casi particolari, è presumibile che l'unico procedimento analitico applicabile sia quello locale dell'*espansione in serie di potenze*, tenendo presente che $x = -b_0/a_0$ è un punto di *singolarità regolare* per l'Eq. (1). A questa, è associata l'*equazione indiciale* (v. P. 11-12)

$$\lambda^2 + (b_1/a_0 - a_1 b_0/a_0^2 - 1)\lambda = 0, \tag{7}$$

le cui radici sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1 - b_1/a_0 + a_1 b_0/a_0^2$ (cf/c *Esempio*, P. 15);

4.3 sia $\Delta < 0$.

Preso $\eta \equiv i$, *si può* trovare, in $\mathbb{R}$, un integrale particolare della forma (5) **sse** *coesistono* tre condizioni ulteriori: $a_1 \equiv 0$ $(\Rightarrow a_2 > 0)$, $b_1 > 0$, $\mu \equiv 0$.
In tale circostanza, un integrale *particolare* è dato da

$$y_1(x) = \int_\alpha^\beta e^{i\left(x + \frac{b_0}{a_0}\right)t} (a_2 - a_0 t^2)^{\frac{b_1}{2a_0} - 1} dt, \tag{8}$$

nel quale, gli estremi *opposti* di integrazione, $\beta \equiv (a_2/a_0)^{1/2} \equiv -\alpha$, sono le radici del polinomio quadratico $A(t) \equiv -a_0 t^2 + a_2$. Assumendo $a_0 > 0$ (quindi, anche $a_2 > 0$, senza alcuna perdita di generalità), risulta $A(t) > 0 \;\forall\, t \in (\alpha, \beta)$ (†);

5. se $p(x) \equiv (2\kappa+1)/x \wedge q(x) \equiv (\alpha^2 x^{2\eta} + \beta^2)/x^2$, $\forall \{\alpha, \eta, \beta, \kappa\} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, ne segue che $y \in \mathbb{R}$ sse $x \in \mathbb{R}^+$. Qui, conviene porre l'Eq. (1) in forma canonica,

$$x^2 y'' + (2\kappa+1) x y' + (\alpha^2 x^{2\eta} + \beta^2) y = 0 \tag{9}$$

e considerarne i due casi risultanti.

5.1 Sia $\alpha\eta = 0$:

l'Eq. (1) si riduce a un'*Equazione di Euler*, della quale, l'integrale generale può essere espresso variamente secondo le Eq.i (4) precedenti, con $\Delta/4 \equiv \kappa^2 - \alpha^2 - \beta^2$;

5.2 sia $\{\alpha, \eta\} \subset \mathbb{R}^+$:

si esegue la trasformazione classica

$$y(x) := u(x)/x^\kappa, \tag{10}$$

dalla quale, si calcolano, vs. la nuova funzione *incognita* $u = u(x)$,

- $y' = u'/x^\kappa - \kappa u/x^{\kappa+1}$, (10.1)
- $y'' = u''/x^\kappa - 2\kappa u'/x^{\kappa+1} + \kappa(\kappa+1) u/x^{\kappa+2}$. (10.2)

Sostituendo le Eq.i (10), (10.1) e (10.2) nell'Eq. (9), semplificando e, poi, moltiplicando per $x^\kappa \neq 0$ i termini nei membri dell'espressione ottenuta, si arriva all'equazione

$$x^2 u'' + x u' + ((\alpha x^\eta)^2 - \eta^2 \nu^2) u = 0, \tag{11}$$

nella quale, è stata definita

$$\nu := (\kappa^2 - \beta^2)^{1/2}/\eta. \tag{11.1}$$

Ora, dal cambiamento di variabile *indipendente*

$$t := \alpha x^\eta/\eta, \tag{12}$$

si scrivono le espressioni trasformate

- $x = (\eta t/\alpha)^{1/\eta} \equiv x(t)$, (12.1)
- $u(x) \equiv u(x(t)) := \phi(t)$, (12.2)
- $\dfrac{dt}{dx} = \alpha^{1/\eta} (\eta t)^{1-1/\eta}$, (12.3)
- $u'(x) \equiv \dfrac{d}{dx} u(x) = \dfrac{dt}{dx} \dfrac{d}{dt} u(x(t)) \equiv (\alpha^{1/\eta} (\eta t)^{1-1/\eta}) \phi'(t)$, (12.4)
- $u''(x) \equiv \dfrac{d}{dx} u'(x) = \dfrac{dt}{dx} \dfrac{d}{dt} u'(x(t)) = (\alpha^{1/\eta} (\eta t)^{1-1/\eta}) \dfrac{d}{dt} (\alpha^{1/\eta} (\eta t)^{1-1/\eta}) \phi'(t) = \ldots$

(†) Per i dettagli di calcolo delle soluzioni (6) e (8) relative all'*Equazione Differenziale Ordinaria Lineare di Laplace del 2º ordine*, ci si può riferire, e.g., al math-notebook [14.1].

$$\ldots = \alpha^{2/\eta}(\eta t)^{1-2/\eta}(\eta t\phi''(t)+(\eta-1)\phi'(t)) \equiv w''(t)\,, \tag{12.5}$$

che, sostituite nell'Eq. (11), ne forniscono la rappresentazione trasformata

$$\eta^2 t^2\phi''(t)+\eta^2 t\phi'(t)+\eta^2(t^2-\nu^2)\phi(t) = 0\,.$$

Questa, divisa totalmente per η^2, fornisce l'*Equazione di Bessel* in forma canonica,

$$t^2\phi''(t)+t\phi'(t)+(t^2-\nu^2)\phi(t) = 0\,. \tag{13}$$

L'integrale generale dell'Eq. (13) è esprimibile, e.g., mediante le *Funzioni di Bessel Ordinarie* di *1º* e di *2º tipo* di *ordine* ν, indicate con i simboli rispettivi J_ν e N_ν (il simbolo N_ν è alternativo, in Fisica, all' Y_ν standard). Si ha, quindi,

$$\phi(t) = c_1 J_\nu(t)+c_2 N_\nu(t)\,, \tag{14}$$

essendo $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{C}$, costanti arbitrarie.

Infine, con le sostituzioni (12) e (10), si scrive l'*integrale generale* dell'Eq. (9),

$$y(x) = x^{-\kappa}(c_1 J_\nu(\alpha x^\eta/\eta)+c_2 N_\nu(\alpha x^\eta/\eta))\,. \tag{15}$$

Dall'Eq. (11.1), si osserva che, per $|\kappa| < |\beta|$, le *Funzioni di Bessel* presenti nell'Eq. (15) sono di ordine *immaginario*, significativo unicamente in ambito teorico.

Esempi particolarmente frequenti dell'Eq. (15), soprattutto in molte applicazioni di Fisica, sono quelli che corrispondono

- all'assegnazione parametrica $\{\kappa, \eta, \beta\} \equiv \{0, 1, i\nu\}$, da cui, si determina l'integrale generale

$$y(x) = c_1 J_\nu(\alpha x)+c_2 N_\nu(\alpha x) \tag{15.1}$$

dell'equazione differenziale

$$y''+(1/x)y'+(\alpha^2-\nu^2/x^2)y = 0\,, \tag{15.2}$$

- e all'assegnazione parametrica $\{\kappa, \eta, \beta\} \equiv \{1/2, 1, i(m(m+1))^{1/2}\}$, con $m \in \mathbb{Z}$.
Tale circostanza riguarda, e.g., la soluzione, per separazione delle variabili *sferiche*, della parte *radiale* delle *Equazioni* (*differenziali*) dei tipi *di Helmholtz* o *di diffusione* o *di Schrödinger* (e.g., relativamente al moto di una particella confinata in un volume avente simmetria sferica). Poiché, qui, risulta $\nu^2 \equiv (\kappa^2-\beta^2)/\eta^2 = (m+1/2)^2 \notin \mathbb{Z}$, l'equazione specifica dedotta dall'Eq. generale (15) come combinazione lineare delle *Funzioni di Bessel* di ordine semi-dispari, $J_{m+1/2}$ e $N_{m+1/2}$, si trova che è equivalente alla combinazione lineare

$$y(x) = x^{-1/2}(c_1 J_{m+1/2}(\alpha x)+c_2 J_{-(m+1/2)}(\alpha x))\,, \tag{15.3}$$

avendo sfruttato l'identità $N_{m+1/2}(\alpha x) \equiv (-1)^{m+1} J_{-(m+1/2)}(\alpha x)$ [14.2].
Pertanto, l'Eq. (15.3) rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''+(2/x)y'+(\alpha^2-n(n+1)/x^2)y = 0\,. \tag{15.4}$$

L'associazione *moltiplicativa* di $x^{-1/2}$ con $J_{m+1/2}$ e $J_{-(m+1/2)}$ fornisce la definizione delle cosiddette *Funzioni di Bessel Sferiche Ordinarie* di *1º* e di *2º tipo* che, a meno di fattori costanti provenienti dalla separazione delle variabili sferiche $(r \rightleftarrows x)$, sono date dalle espressioni convenzionali rispettive

$$j_m(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2\alpha x}\right)^{1/2} J_{m+1/2}(\alpha x)\,, \tag{15.5}$$

$$n_m(\alpha x) := (-1)^{m+1}\left(\frac{\pi}{2\alpha x}\right)^{1/2} J_{-(m+1/2)}(\alpha x)\,. \tag{15.6}$$

In tal modo, l'Eq. (15.3) può essere scritta nella forma alternativa equivalente

$$y(x) = c_1 j_m(\alpha x) + c_2 n_m(\alpha x)\,; \tag{15.7}$$

6. se $p(x) \equiv 2\kappa + 1/x \wedge q(x) \equiv \eta + \kappa/x - \nu^2/x^2$, $\forall\{\eta, \kappa, \nu\} \subset \mathbb{R}$, allora, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Con la posizione

$$y(x) := u(x)e^{-\kappa x}\,, \tag{16}$$

si determinano le espressioni trasformate

- $$y' \equiv (u' - \kappa u)e^{-\kappa x}\,, \tag{16.1}$$
- $$y'' \equiv (u'' - 2\kappa u' + \kappa^2 u)e^{-\kappa x}\,. \tag{16.2}$$

Queste, sostituite nell'Eq. (1), ne mutano la forma in

$$u'' + (1/x)u' + (\eta - \kappa^2 - \nu^2/x^2)u = 0\,. \tag{17}$$

L'Eq. (17) è riconducibile all'Eq. (15.2) quando si assuma $\eta - \kappa^2 \equiv \alpha^2$. Pertanto, se si tiene presente la sostituzione (16), allora, le rappresentazioni possibili dell'integrale *generale*, $y(x)$, dell'Eq. (1) si diversificano secondo le condizioni seguenti:

6.1 sia $\eta - \kappa^2 > 0$.

Risulta l'integrale generale *di Bessel Ordinario*

$$y(x) = e^{-\kappa x}(c_1 J_\nu((\eta - \kappa^2)^{1/2}x) + c_2 N_\nu((\eta - \kappa^2)^{1/2}x))\,; \tag{17.1}$$

6.2 sia $\eta - \kappa^2 = 0$.

L'Eq. (17) si riduce all'*Equazione di Euler*

$$x^2 u'' + x u' - \nu^2 u = 0\,, \tag{17.2}$$

di integrazione elementare (v. le Eq.i (4) precedenti), ottenendo,

per $\nu \neq 0$,

$$y(x) = (c_1 x^\nu + c_2 x^{-\nu})e^{-\kappa x}\,, \tag{17.2.1}$$

per $\nu = 0$,

$$y(x) = (c_1 ln|x| + c_2)e^{-\kappa x}\,; \tag{17.2.2}$$

6.3 sia $\eta - \kappa^2 < 0$.

Poiché, qui, risulta $(\eta - \kappa^2)^{1/2} \equiv i(\kappa^2 - \eta)^{1/2}$, ricorrendo alle formule di connessione tra le *Funzioni di Bessel Ordinarie di 1º* e *di 2º tipo* e quelle *Iperboliche* (o *Modificate*) (i.e., di argomento *immaginario*) *di 1º* e *di 2º tipo*, I_ν e K_ν, rispettivamente, (†)

$$J_\nu(iw) := i^\nu I_\nu(w), \tag{17.3.1}$$

$$N_\nu(iw) := i^{\nu+1} I_\nu(w) - (2/\pi) i^{-\nu} K_\nu(w) \tag{17.3.2}$$

$$\equiv (i^{\nu+1} + i^{-\nu} csc\,\nu\pi) I_\nu(w) - i^{-\nu} csc\,\nu\pi\, I_{-\nu}(w) \tag{17.3.2.1}$$

se $\nu \notin \mathbb{Z}$, l'integrale *generale* dell'Eq. (1) si scrive, con $w \equiv (\kappa^2 - \eta)^{1/2} x \wedge \forall \nu$,

$$y(x) = (c_1 I_\nu((\kappa^2 - \eta)^{1/2} x) + c_2 K_\nu((\kappa^2 - \eta)^{1/2} x)) e^{-\kappa x}. \tag{17.3.3}$$

Osservazione 1

Presentazioni essenziali delle funzioni I_ν e K_ν sono contenute, e.g., in [3], [4], [15], [16], [17]. In particolare, si consulti l'ottimo [16], CAP. **V** e **VII**. Una discussione rapida e pragmatica è data, e.g., nel math-notebook [14.2].
Analoghe, inoltre, alle Eq.i (15.5) e (15.6) ma con i fattori numerici espliciti iniziali presi *reciproci*, i.e., $(\pi/2)^{1/2}$ invece che $(2/\pi)^{1/2}$, si definiscono, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, le *Funzioni di Bessel Sferiche Modificate* (cf/c Eq. (17.3.3)),

$$x \mapsto i_m(\alpha x) := \left(\frac{\pi}{2\alpha x}\right)^{1/2} I_{m+1/2}(\alpha x), \tag{17.4}$$

$$x \mapsto k_m(\alpha x) := \left(\frac{2}{\pi\alpha x}\right)^{1/2} K_{m+1/2}(\alpha x), \tag{17.5}$$

integrali particolari, linearmente indipendenti tra loro, dell'equazione differenziale

$$y'' + (2/x)y' - (\alpha^2 + m(m+1)/x^2)y = 0, \tag{17.6}$$

nella quale, $m \in \mathbb{Z}$.

■

B - Analiticità in senso reale vs. Singolarità

Definizione

Sia $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo *aperto*. Una funzione $f: x \mapsto f(x)$, con $x \in \mathfrak{I}$, si dice *analitica in senso reale* in x_0 se $f \in \mathcal{C}^\infty$ in $\mathfrak{I}$ e, pertanto, è espandibile definitivamente in T- serie ($\therefore$ Taylor) in un intorno $\mathcal{U}_\delta(x_0) \subseteq \mathfrak{I}$ di x_0:

$$f(x)\big|_{x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \blacktriangle \tag{18}$$

Quando $\mathcal{U}_\delta(x_0) \equiv \mathfrak{I}$, si dice che f è *analitica* (*in senso reale*) *in* $\mathfrak{I}$.

□

L'ascissa $x = x_0$ costituisce un punto *ordinario* per l'Eq. (1) se le funzioni $p: x \mapsto p(x)$ e $q: x \mapsto q(x)$ sono *entrambe* analitiche in senso reale in x_0. Se *solo una* di esse non è analitica in x_0, allora, x_0 è un punto *singolare* per l'Eq. (1). In tale caso, il controllo della natura della singolarità di x_0 porta alla classificazione seguente:

- **s.1** se *entrambe* le funzioni $x \mapsto P(x) := (x - x_0)\,p(x)$ $\wedge$ $x \mapsto Q(x) := (x - x_0)^2 q(x)$ sono analitiche in senso reale nel punto *singolare* x_0 dell'Eq. (1), allora, $x = x_0$ è un punto di *singolarità regolare* (o *fuchsiana*) dell'Eq. (1);

- **s.2** se la condizione **s.1** non è verificata, allora $x = x_0$ è un punto singolare *irregolare* (o *essenziale*) per l'Eq. (1).

■

C - Metodi di integrazione in Serie di Potenze

La rappresentazione *in termini finiti* (i.e., mediante un numero *finito* di funzioni elementari) dell'integrale *generale* di un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti *variabili* è ottenibile solo in un numero *molto limitato* di casi, tutti riconducibili a un'equazione lineare a coefficienti *costanti* mediante cambiamenti *ad-hoc* di variabile.
Va osservato che tale problema ha cessato da molto tempo di costituire una priorità di indagine, probabilmente, anche (o soprattutto) per la sua difficoltà formidabile. Esso resta, a tutt'oggi, irrisolto e accantonato dall'interesse prevalente nella ricerca di soluzioni particolari specifiche, i.e., soggette a condizioni di frontiera o iniziali assegnate.

La rappresentazione della soluzione generale in serie di potenze costituisce la via analitica ultima per 'forzare' quantitativamente proposizioni altrimenti puramente esistenziali e, dove sia possibile, favorire un uso più efficace degli strumenti dell'Analisi Numerica.
I metodi di espansione in serie di potenze sono di interesse notevole sia teorico che applicativo ma una loro trattazione esauriente richiede un inquadramento contestuale alle *funzioni di una variabile complessa*. Qui, ci si limiterà a riportarne alcuni dei risultati principali *ristretti* a un dominio in $\mathbb{R}$, incominciando dall'espansione intorno a un punto *ordinario* per l'Eq. differenziale (1).

Teorema

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto *ordinario* per l'Eq. differenziale (1). Allora, in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, il suo integrale generale è *sempre* esprimibile come serie di potenze binomiali (*non* necessariamente una T - serie)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \tag{19}$$

nella quale, i primi due coefficienti, a_0 e a_1, che restano *indeterminati*, generano tutti gli altri a_n e costituiscono le *costanti arbitrarie* moltiplicative per le due soluzioni particolari $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Queste risultano *linearmente indipendenti* ed espresse in forma di serie di potenze. ▲

I coefficienti a_n nell'integrale generale (19) sono calcolabili secondo la sequenza descritta sotto:

I. se $x_0 \neq 0$, si esegue la traslazione $x - x_0 \mapsto w$, trasformando la serie di potenze binomiali (19) in una serie di potenze di w (questa, in generale, *non* è una M - serie ($\therefore$ Maclaurin)). Il più delle volte, la traslazione produce un alleggerimento sostanziale dei calcoli.

   Si incomincia dalla sostituzione $x \equiv w + x_0$, scrivendo

$$y(x) \mapsto y(w) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n \tag{20}$$

   e, dall'Eq. (20), si calcolano

- $$y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} \equiv \frac{dy}{dw}\cdot 1 = y'(w)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n w^{n-1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} w^n, \tag{20.1}$$

- $$y''(x) \equiv \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{dy'}{dw}\frac{dw}{dx} \equiv \frac{d^2y}{dw^2}\cdot 1 = y''(w)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n w^{n-2} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} w^n; \tag{20.2}$$

II. si sostituiscono le espansioni (20), (20.1), (20.2) e quelle delle espressioni trasformate $p(w)$ e $q(w)$ nell'Eq. differenziale (1), ricorrendo all'algoritmo $\mathfrak{P}$ del *prodotto à-la Cauchy* di due serie di potenze se $p(w)$ e\o $q(w)$ *non* sono polinomi (†). Comunque, se $p(w)$ e\o $q(w)$ rappresentano funzioni *razionali fratte*, è preferibile moltiplicare l'Eq. (1) per il loro *minimo comune denominatore* prima di procedere;

III. si eseguono i raccoglimenti vs. le potenze crescenti di w; quindi, si uguaglia a 0 *ciascun* coefficiente raccolto;

IV. le equazioni risultanti nel passo III si risolvono vs. ogni a_k, con $k \geq 2$, in termini di a_0 e di a_1. In particolare, imponendo l'annullamento del coefficiente formale della potenza generale w^n, si ricava un'espressione del coefficiente a_{n+2} generico in termini dei coefficienti a_k precedenti, i.e., con $k < n+2$. Questa costituisce la cosiddetta *formula iterativa* generatrice dei coefficienti dell'espansione (19), formula valida $\forall\, n \geq 2$;

V. si ricavano le rappresentazioni in serie sia di $y_1(w)$ che di $y_2(w)$ raccogliendo tutti i termini moltiplicati per a_0 (ottenendo $a_0 y_1(w) \equiv a_0 \Sigma_1(w)$, per $n \to +\infty$) e tutti i termini moltiplicati per a_1 (ottenendo $a_1 y_2(w) \equiv a_1 \Sigma_2(w)$, per $n \to +\infty$);

VI. si esegue la traslazione *inversa*, $w \mapsto x - x_0$ negli integrali $y_1(w)$ e $y_2(w)$, esplicitando l'Eq. (19) al grado di approssimazione desiderata. Il risultato importante è quello di disporre, ora, della struttura e della *formula iterativa* dei termini di espansione necessari.
In definitiva, l'integrale generale ha la rappresentazione seriale prevedibile in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$

$$y(w)\Big|_{w=x-x_0} \equiv a_0 \Sigma_1(w)\Big|_{w=x-x_0} + a_1 \Sigma_2(w)\Big|_{w=x-x_0}.$$

■

(†) L'algoritmo moltiplicativo $\mathfrak{P}$ di Cauchy è descritto, e.g., nel math-notebook: DETERMINAZIONE DI SERIE DI POTENZE REALI DALLE FUNZIONI DI BERNOULLI E DI EULER, Eq. (2).

D - I Teoremi di Fuchs e di Frobenius

Lazarus Immanuel Fuchs

Il problema fondamentale della rappresentabilità della soluzione generale dell'Eq. differenziale (1) in *serie di potenze* in un intorno di un suo punto *singolare* dipende, in maniera determinante, dal celebre *teorema esistenziale di* FUCHS (L. I., 1826-1902):

Teorema (di Fuchs)

Se $x = x_0$ è un punto *singolare regolare* per l'Eq. differenziale (1), allora, esiste *almeno un* integrale particolare dell'equazione, il quale, in un intervallo aperto $|x - x_0| < r$ – *simmetrico* vs. x_0 – può essere rappresentato dalla *forma* (*fuchsiana*, in $\mathbb{R}$)

$$y(x, \lambda) = |x - x_0|^{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda)(x - x_0)^n. \tag{21}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ è il *parametro fuchsiano*, da cui dipendono i coefficienti $a_n(\lambda)$ (v. [9], [10], [27], [28]). ▲

□

Se $x = x_0$ è un punto *singolare irregolare* per l'Eq. differenziale (1), allora, in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, *non esiste* alcuna espansione in serie di potenze convergente all'integrale generale $y(x)$. Un apprezzamento completo del problema richiede una conoscenza operativa della teoria delle *funzioni analitiche di una variabile complessa*.

□

Ritornando alla singolarità *regolare* in x_0, restano da determinare λ, i coefficienti $a_n(\lambda)$ e una seconda soluzione particolare dell'Eq. (1) che sia *linearmente indipendente* da quella costruita con l'Eq. (21).
Il problema trova (~ 1873) sia una risposta completa che un algoritmo costruttivo nel *Teorema di* FROBENIUS (F. G., 1849-1917), altrettanto celebre, basato sulla natura delle *radici* dell'equazione quadratica

$$\lambda^2 + (P_0 - 1)\lambda + Q_0 = 0. \tag{22}$$

L'Eq. (22), nella variabile parametrica fuchsiana λ, è associata all'Eq. differenziale (1) come *equazione indiciale*; P_0 e Q_0 sono le costanti

Ferdinand Georg Frobenius

$$\begin{cases} P_0 := P(x_0), \\ Q_0 := Q(x_0). \end{cases} \tag{22.1}$$

È inteso che le funzioni $x \mapsto P(x) \equiv (x - x_0)p(x)$ e $x \mapsto Q(x) \equiv (x - x_0)^2 q(x)$ (cf/c s.1, P. 7) sono entrambe *analitiche* (qui, in senso reale) in un certo intervallo aperto $|x - x_0| < r$, simmetrico vs. x_0. Quindi, P_0 e Q_0 sono, rispettivamente, i termini di ordine 0 delle T-espansioni di $P(x)$ e di $Q(x)$ in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$.

Teorema (di Frobenius) (†)

Siano $x = x_0 \in \mathbb{R}$ un punto *singolare regolare* per l'Eq. differenziale (1) e λ_1, λ_2 le radici della sua *equazione indiciale* associata (22), i.e., i *parametri fuchsiani* specifici.

f.1 Se $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$,

allora, l'Eq. differenziale (1) possiede, nell'insieme $0 < |x - x_0| < r$ (simmetrico vs. x_0) *privato* di x_0, due integrali particolari *linearmente indipendenti*, rappresentabili entrambi in *forma fuchsiana*:

- $y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda_1)(x - x_0)^n$, (23.1)
- $y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda_2)(x - x_0)^n$; (23.2)

f.2 se $\lambda_1 = \lambda_2$,

allora, l'Eq. differenziale (1) possiede, nell'insieme $0 < |x - x_0| < r$ (simmetrico vs. x_0) *privato* di x_0, due integrali particolari *linearmente indipendenti* rappresentabili, uno in *forma fuchsiana*,

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda_1)(x - x_0)^n, \tag{23.3}$$

l'altro come la combinazione additiva *logaritmico-fuchsiana* (brevemente: *log-fuchsiana*)

$$y_2(x) = \eta\, y_1(x) ln|x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\lambda_1)(x - x_0)^n, \tag{23.4}$$

con $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *costante arbitraria*;

f.3 se $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}^+$ (avendo assunto, per definitezza, $\lambda_1 > \lambda_2$),

allora, l'Eq. differenziale (1) possiede, nell'insieme $0 < |x - x_0| < r$ (simmetrico vs. x_0) *privato* di x_0, due integrali particolari *linearmente indipendenti* rappresentabili uno, corrispondente al valore parametrico $\lambda_1 \;(> \lambda_2)$, in *forma fuchsiana*,

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda_1)(x - x_0)^n, \tag{23.5}$$

l'altro come la combinazione additiva *log-fuchsiana*

$$y_2(x) = \eta\, y_1(x) ln|x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\lambda_2)(x - x_0)^n, \tag{23.6}$$

$\forall\, \eta \in \mathbb{C}$, con η *costante arbitraria*. ▲

■

(†) Per dimostrazioni (in $\mathbb{C}$) dei Teoremi *di Fuchs* e *di Frobenius*, si vedano, e.g., [7], [8], [9], [10], [19], [27], [28]. Le Eq.i (23.1), …, (23.6) sono riformulazioni in $\mathbb{R}$ delle rappresentazioni più generali in $\mathbb{C}$.

Come per il caso dell'espansione (19) relativa un punto *ordinario*, risulta conveniente sviluppare un *procedimento sequenziale* analogo a quello per il calcolo dei vari coefficienti delle espansioni intorno al punto *singolare regolare* (*fuchsiano*) x_0.

I. se $x_0 \neq 0$, si esegue la traslazione $x - x_0 \mapsto w$, trasformando le varie espansioni binomiali nelle Eq.i (23.1), …, (23.6) in espansioni in serie di potenze di w, generalmente più agevoli nei calcoli, tenendo conto che, in queste equazioni – definite formalmente dal Teorema – i coefficienti a_n e b_n, essendo parametri *invarianti*, sono validi per $w \gtrless 0$ in $\mathcal{U}_\delta(0)$. Quindi, per comodità, si può assumere $w > 0$ ed eseguire la determinazione *generale* dei coefficienti ponendo, con $w \equiv w(x)$ e limitandosi alla sola parte *positiva* della *forma fuchsiana* (21),

- $$y(x,\lambda) \mapsto y(w,\lambda) := w^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda) w^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda) w^{\lambda+n}. \tag{24}$$

Dall'Eq. (24), si calcolano, come per le derivazioni composte (20), (20.1) e (20.2),

- $$\begin{aligned} y'(x,\lambda) \equiv y'(w,\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda+n) a_n(\lambda) w^{\lambda+n-1} \\ &\equiv w^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda+n) a_n(\lambda) w^{n-1}, \end{aligned} \tag{24.1}$$

- $$\begin{aligned} y''(x,\lambda) \equiv y''(w,\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) a_n(\lambda) w^{\lambda+n-2} \\ &\equiv w^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) a_n(\lambda) w^{n-2}; \end{aligned} \tag{24.2}$$

II. si determina l'*equazione indiciale* associata all'Eq. differenziale (1) e se ne calcolano le radici, λ_1 e λ_2, *distinte* (reali o complesse coniugate) o *coincidenti* (solo reali). In ogni caso, si ha $w^\lambda \equiv e^{\lambda Ln w} \neq 0$ ($\therefore$ *Ln* $\equiv$ prolungamento analitico in $\mathbb{C}$ del logaritmo naturale in $\mathbb{R}$);

III. scritta la rappresentazione w - trasformata dell'Eq. (1),

$$y''(w,\lambda) + p(w) y'(w,\lambda) + q(w) y(w,\lambda) = 0, \tag{25}$$

e divise le espressioni (24), (24.1) e (24.2) per w^λ $(\neq 0)$, si sostituiscono, nell'Eq. (25), le espansioni rimanenti e le $\mathfrak{L}$ - espansioni [$\therefore$ LAURENT (P. A., 1813-1854)] di $p(w)$ e di $q(w)$ in $\mathcal{U}_\delta(0)\backslash\{0\}$. Poiché l'Eq. (1) è *del 2º ordine*, è evidente che le *parti principali* delle $\mathfrak{L}$-espansioni di $p(w)$ e di $q(w)$ (i.e., quelle formate dalle *sole* potenze *negative* di w) non contengono più di *uno* e *due* termini, rispettivamente (*poli* del 1º e del 2º ordine). D'altra parte, l'assenza della *parte principale* riduce una $\mathfrak{L}$ - espansione a una T - o M - espansione.
Quando $p(w)$ e/o $q(w)$ le loro $\mathfrak{L}$ - espansioni generano espressioni *razionali fratte*, conviene moltiplicare l'Eq. (25) ulteriormente per il *minimo comune denominatore* di queste prima di procedere. Infine, può essere necessario ricorrere all'algoritmo del prodotto $\mathfrak{P}$ *à-la Cauchy* di due serie di potenze, per $p(w) y'(w,\lambda)$ e/o $q(w) y(w,\lambda)$;

IV. si eseguono i raccoglimenti vs. le potenze crescenti di w e si uguaglia a 0 *ciascun* termine raccolto;

V. le equazioni ottenute nel passo IV si risolvono vs. ogni $a_k(\lambda)$, con $k \geq 1$, in termini di a_0. In particolare, imponendo l'annullamento del coefficiente $a_n(\lambda)$, se ne ricava l'espressione generale in termini di tutti i coefficienti $a_k(\lambda)$ *precedenti*, i.e., con $k < n$. Questa costituisce la cosiddetta *formula iterativa* generatrice dei coefficienti $a_n(\lambda)$ dell'espansione (24), valida $\forall\, n \geq 1$.

A questo punto, il procedimento prosegue con modalità distinte secondo le tipologie delle radici dell'*equazione indiciale* specificate nel *Teorema di Frobenius*:

VI.1 se $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$,

$\exists$ due integrali particolari dell'Eq. (1), $y_1(w)$ e $y_2(w)$, di *forma fuchsiana* e linearmente indipendenti, costruibili sostituendo, rispettivamente, λ_1 e λ_2 nella stessa *formula iterativa* $(a_n(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} \equiv a_n(\lambda_j),\ j = 1, 2)$. In entrambe le espansioni, il coefficiente indeterminato a_0 può essere raccolto da *tutti* i termini delle due serie rappresentative risultanti;

VI.2 se $\lambda_1 = \lambda_2$,

$\exists$ un integrale particolare di *forma fuchsiana* dell'Eq. (1), indicato genericamente $y_1(w)$, costruibile nel modo descritto nel passo V. e avente $a_n(\lambda_1)$ come coefficienti di espansione. Ora, mantenendo λ *indeterminato* nella stessa *formula iterativa* generatrice, per $\lambda = \lambda_1$, della serie rappresentativa di $y_1(w)$, si determina la serie di potenze risultante, $\Sigma(w, \lambda)$. Segue che un secondo integrale particolare, $y_2(w)$, linearmente indipendente da $y_1(w)$, si ottiene *derivando* $\Sigma(w, \lambda)$ vs. λ termine-a termine, sostituendo $\lambda = \lambda_1$ nel risultato finale (nei calcoli, si tenga presente che $\partial(x^{\lambda+k})/\partial\lambda = x^{\lambda+k} \ln x$). La λ-derivazione è *sufficiente* a garantire l'*indipendenza lineare* tra le due soluzioni particolari cercate (v. [9], [20], [27], [28]). Pertanto,

$$y_2(w) := \left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\Sigma(w, \lambda)\right|_{\lambda=\lambda_1}; \tag{26}$$

VI.3 se $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}^+$, (quindi, $\lambda_1 > \lambda_2$),

come nel passo VI.2 precedente, $\exists$ un integrale particolare di *forma fuchsiana* dell'Eq. (1), indicato genericamente $y_1(w)$, costruibile come descritto nel passo V e i cui coefficienti di espansione, $a_n(\lambda_1)$, si calcolano nel modo solito.

Cercando di un *secondo* integrale particolare, $y_2(w)$, linearmente indipendente da $y_1(w)$, si *tenta*, prima, di ricavare $y_2(w)$ in forma *fuchsiana*, come nel passo VI.1, mediante la stessa *formula iterativa* generatrice di $y_1(w)$. Se ciò *riesce*, segue che $\eta \equiv 0$ nell'Eq. (23.6); invece, se tale procedimento *è inapplicabile* (e.g., perché la *formula iterativa* diventa indeterminata in corrispondenza di $n = \bar{n}$), allora, dalla serie di potenze $\Sigma(w, \lambda)$, analoga a quella del passo VI.2, si determina il *secondo* integrale particolare come

$$y_2(w) = \left.\frac{\partial}{\partial\lambda}((\lambda - \lambda_2)\,\Sigma(w, \lambda))\right|_{\lambda=\lambda_2}. \tag{27}$$

Anche qui, la derivazione vs. λ *basta* a garantire l'*indipendenza lineare* tra $y_1(w)$ e $y_2(w)$;

VII. si esegue la traslazione inversa $w \mapsto x - x_0$ nelle espressioni degli integrali $y_1(w)$ e $y_2(w)$, approssimati con il numero di termini desiderato, conoscendo le strutture e le *formule iterative* dei coefficienti di espansione.

In ciascun caso, l'*integrale generale* dell'Eq. (1), si esprime con la combinazione lineare solita,

$$y(x) = \kappa_1 y_1(x) + \kappa_2 y_2(x),$$

$\forall \{\kappa_1, \kappa_2\} \subset \mathbb{C}$, nella quale, $\{\kappa_1, \kappa_2\}$ è una coppia di costanti arbitrarie.

■

D.1 L'Equazione Differenziale Ipergeometrica Gaussiana (o Ordinaria)

L'*Equazione Differenziale Ipergeometrica* di GAUSS (J. C. F., 1777-1855) si scrive

$$x(1-x)y'' + (\mu - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \tag{28}$$

in forma *canonica*, $\forall \{\alpha, \beta, \mu\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$. La forma (28) è *simmetrica* nello scambio dei parametri α e β. Nella forma *normale* corrispondente,

$$y'' + \frac{\mu - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\, y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}\, y = 0, \tag{28.1}$$

l'equazione evidenzia due singolarità *regolari* al finito, in $x = 0$ e in $x = 1$, e due *irregolari* (*reali*), per $x \to \pm\infty$ (in $\mathbb{C}$, $z = \infty$ costituisce l'unico punto (*improprio*) di singolarità *irregolare*).
Se si vuole determinare una rappresentazione dell'integrale generale dell'Eq. (28) in $\mathcal{U}_{\delta^+}(0) \subset$ $\subset (0,1)$, si può applicare il *Teorema di Frobenius*.
Si incomincia riconoscendo

$$P(x) \equiv \frac{\mu - (\alpha+\beta+1)x}{1-x}, \qquad Q(x) \equiv -\frac{\alpha\beta x}{1-x},$$

così che, dalle Eq.i (22.1) e (22.2), risultano

$$\bar{P}_0 \equiv P(0) \equiv \mu, \qquad \bar{Q}_0 \equiv Q(0) = 0.$$

Pertanto, l'*equazione indiciale*,

$$\lambda^2 + (\mu - 1)\lambda = 0, \tag{29}$$

ha due radici *distinte* reali, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1 - \mu$, e, poiché $(1-\mu) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, l'integrale generale dell'*equazione Ipergeometrica* è ottenibile, in $\mathcal{U}_{\delta^+}(0) \subset (0,1)$, dalla combinazione delle due *forme fuchsiane* linearmente indipendenti originate dalle Eq.i (22.1) e (22.2),

- $$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda_1)x^n, \tag{30.1}$$
- $$y_2(x) = x^{1-\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda_2)x^n. \tag{30.2}$$

Si procede sostituendo le Eq.i (24), (24.1) e (24.2), divise per $w^\lambda \neq 0$, nell'Eq. (28), osservando che, in questo caso, $x \equiv w$. Pertanto,

$$\begin{aligned}
0 &= x(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n(\lambda)x^{n-2} + \hookleftarrow \\
&\qquad \hookrightarrow + (\mu - (\alpha+\beta+1)x)\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda+n)a_n(\lambda)x^{n-1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\lambda)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda+n)(\lambda+n-1+\mu)a_n(\lambda)x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}((\lambda+n)(\lambda+n+\alpha+\beta)+\alpha\beta)a_n(\lambda)x^n \\
&\equiv \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda+n+1)(\lambda+n+\mu)a_{n+1}(\lambda)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}((\lambda+n)(\lambda+n+\alpha+\beta)+\alpha\beta)a_n(\lambda)x^n
\end{aligned}$$

$$\equiv (\lambda - 1 + \mu)\lambda a_0(\lambda) x^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda + n + 1)(\lambda + n + \mu) a_{n+1}(\lambda) x^n - \hookleftarrow$$
$$\Lsh - \sum_{n=0}^{+\infty} ((\lambda + n)(\lambda + n + \alpha + \beta) + \alpha\beta) a_n(\lambda) x^n . \qquad (31)$$

Per il *Principio di Identità* delle serie di potenze, deve risultare $(\lambda - 1 + \mu)\lambda a_0(\lambda) \equiv 0$. Poiché λ e μ sono parametri *liberi* mentre, in generale, è $a_0(\lambda) \neq 0$, allora, se ne deduce che o è $\lambda \equiv 0$ o è $\lambda \equiv 1 - \mu$, le radici dell'*equazione indiciale* (29). Quindi, nella ricerca dell'integrale generale dell'*equazione Ipergeometrica*, espresso come combinazione lineare di due *forme fuchsiane*, al coefficiente $a_0(\lambda)$, altrimenti *indeterminato*, si assegna 1 come valore costante *convenzionale*.
Poi, dall'Eq. (31), si ha necessariamente che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((\lambda + n + 1)(\lambda + n + \mu) a_{n+1}(\lambda) x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((\lambda + n)(\lambda + n + \alpha + \beta) + \alpha\beta) a_n(\lambda) x^n ,$$

così che, continuando nell'applicazione del *Principio di Identità* delle serie di potenze, si deduce la *formula iterativa* dei coefficienti, $\forall\, n \geq 1$,

$$a_{n+1}(\lambda) = \frac{(\lambda + n)(\lambda + n + \alpha + \beta) + \alpha\beta}{(\lambda + n + 1)(\lambda + n + \mu)} a_n(\lambda) . \qquad (32)$$

Sostituendo la *prima* radice indiciale, $\lambda_1 = 0$, nell'Eq. (32), si ottiene

$$a_{n+1}(0) = \frac{n(n + \alpha + \beta) + \alpha\beta}{(n + 1)(n + \mu)} a_n(0) \equiv \frac{(n + \alpha)(n + \beta)}{(n + 1)(n + \mu)} a_n(0) \qquad (33)$$

e, quindi, applicando la *definizione* $a_0(\lambda) := 1\ \forall\, \lambda$, risultano i coefficienti

$$a_1(0) = \frac{\alpha\beta}{\mu} a_0(0) \equiv \frac{\alpha\beta}{1!\mu} ,$$
$$a_2(0) = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{2(\mu + 1)} a_1(0) \equiv \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{2!\mu(\mu + 1)} ,$$
$$a_3(0) = \frac{(\alpha + 2)(\beta + 2)}{3(\mu + 2)} a_2(0) \equiv \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{3!\mu(\mu + 1)(\mu + 2)} ,$$
$$\vdots$$
$$a_n(0) = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\mu)_n} ,$$ in termini di *Simboli di Pochhammer* ($\mu \notin \mathbb{Z}^-$) (†),
$$\vdots$$

Riguardo all'Eq. (28.1), segue, allora, che

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\mu)_n} x^n := {}_2F_1(\alpha, \beta; \mu; x) , \qquad (34)$$

la celeberrima *Serie* (e *Funzione*) *Ipergeometrica Gaussiana*. Tale serie deve il nome al fatto che, per $\alpha = 1 \wedge \beta \equiv \mu$, essa si riduce alla *Serie Geometrica* ben nota ($(1)_n = 1, \forall\, n$):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((1)_n / n!) x^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} x^n .$$

Che la serie (34) rappresenti legittimamente una funzione, $x \mapsto {}_2F_1(\alpha, \beta, \mu; x)$, i.e., la *Funzione Ipergeometrica Gaussiana*, dipende, chiaramente, dall'esistenza di un suo dominio (cerchio) non-nullo di convergenza. Sfruttando l'Eq. (33), la determinazione del raggio ρ di convergenza dà

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n(0)}{a_{n+1}(0)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+\mu)}{(n+\alpha)(n+\beta)} = 1\,. \tag{35}$$

Dunque, la *Serie Ipergeometrica* converge nel cerchio *aperto* $|x| < 1$ e diverge per $|x| > 1$. In particolare, essa converge *uniformemente* alla funzione *continua* ${}_2F_1$ in ogni cerchio (o intervallo simmetrico, se $x \in \mathbb{R}$) compatto $|x| \le |\bar{x}| < 1$. Il suo andamento alla frontiera di convergenza, i.e., per $x = \pm 1$, va indagato separatamente.

1. Per $x = 1$,

   la serie di potenze (34) si riduce alla Serie numerica *Ipergeometrica*,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\mu)_n}\,, \tag{36}$$

   che, in ogni caso, è di segno *definitivamente uniforme*.
   Quindi, senza alcun pregiudizio riguardo alla generalità della discussione, si può assumere, per convenienza, che $\{\alpha, \beta, \mu\} \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times (\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}^+)$.
   Nel controllo della convergenza, si rivela risolutivo il *Criterio di Gauss*, che, storicamente, fu scoperto e introdotto in occasione dello studio della serie (36). Si ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n(0)}{a_{n+1}(0)}\right| &= \frac{(n+1)(n+\mu)}{(n+\alpha)(n+\beta)} \equiv \frac{n^2+n(\mu+1)+\mu}{n^2+n(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\\ &\equiv \frac{n^2+n(\alpha+\beta)+\alpha\beta+n(\mu+1)+\mu-n(\alpha+\beta)-\alpha\beta}{n^2+n(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\\ &= 1+\frac{(\mu+1-\alpha-\beta)n+\mu-\alpha\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta} \sim 1+\frac{\mu+1-\alpha-\beta}{n}+\frac{\mu-\alpha\beta}{n^2}\,.\end{aligned} \tag{37}$$

   Il *primo* addendo della somma asintotica (37) vale 1 mentre il *terzo* è *limitato* definitivamente.
   Ciò è *sufficiente* per concludere – secondo il *Criterio di Gauss* – che la serie (36)

   - *converge* se $\mu+1-\alpha-\beta > 1$, i.e., se $\alpha+\beta < \mu$, (37.1)
   - *diverge* se $\mu+1-\alpha-\beta \le 1$, i.e., se $\alpha+\beta \ge \mu$; (37.2)

2. per $x = -1$,

   poiché la serie (34) si riduce a

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\mu;-1) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\mu)_n n!} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\mu)_n\Gamma(n+1)}\,,$$

   questa converge solo *semplicemente* (*Criterio di Leibniz*), $\forall\{\alpha,\beta,\mu\}$ ammissibile.

Si osservi che il *Criterio di Gauss* riesce completamente risolutivo. Non è così per il pur potente *Criterio di Raabe*, il quale si rivela inefficace per $\mu \equiv \alpha+\beta$.

□

Un *secondo* integrale particolare, di forma *fuchsiana*, dell'*Equazione Ipergeometrica* (28) si trova assegnando $\lambda_2 = 1-\mu$, l'altra radice indiciale, nella formula iterativa (32),

---

(†) Per una rappresentazione del *Simbolo di Pochhammer* in termini di *Funzione* Γ, si veda, e.g.: **Proprietà e applicazioni in** $\mathbb{R}$ **della Funzione Gamma**, CAP. 1, EQ. (31).

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}(\lambda_2) &= \frac{(\lambda_2+n)(\lambda_2+n+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(\lambda_2+n+1)(\lambda_2+n+\mu)}\, a_n(\lambda_2) \\
&\equiv \frac{(n+1-\mu)(n+\alpha+\beta+1-\mu)+\alpha\beta}{(n+2-\mu)(n+1)}\, a_n(\lambda_2) && (38) \\
&\equiv \frac{(n+\bar{\alpha})(n+\bar{\beta})}{(n+1)(n+\bar{\mu})}\, a_n(\lambda_2), && (38.1)
\end{aligned}
$$

avendo definito sinteticamente i nuovi parametri

$$
\begin{cases}
\bar{\alpha} := 1-\mu, \\
\bar{\beta} := \alpha+\beta+1-\mu, \\
\bar{\mu} := 2-\mu.
\end{cases} \tag{39}
$$

Dal confronto tra la seconda forma (33) e l'Eq. di struttura (30.1), è immediato dedurre che *anche* l'Eq. (30.2) è rappresentabile con una *serie ipergeometrica gaussiana* di argomento appropriato,

$$
y_2(x) = x^{1-\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\bar{\alpha})_n (\bar{\beta})_n}{n!(\bar{\mu})_n} x^n \equiv x^{1-\mu}\, {}_2F_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}; \bar{\mu}; x), \tag{40}
$$

per la quale, le condizioni di convergenza\divergenza, v. Dsq. (37.1) e (37.2) precedenti,

$$
\bar{\alpha}+\bar{\beta} \gtrless \bar{\mu} \iff (1-\mu)+(\alpha+\beta+1-\mu) \gtrless 2-\mu \iff \alpha+\beta \gtrless \mu,
$$

risultano formalmente *congruenti* a quelle ottenibili per $y_1(x)$.

Pertanto, l'integrale *generale* dell'*Equazione Ipergeometrica Gaussiana* è scrivibile come

$$
y(x) = \kappa_1\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \mu; x) + \kappa_2 x^{1-\mu}\, {}_2F_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}; \bar{\mu}; x). \tag{41}
$$

$\forall \{\kappa_1, \kappa_2\} \subset \mathbb{C}$, essendo $\{\kappa_1, \kappa_2\}$ una coppia di costanti arbitrarie.

■

D.2 **L'Equazione Differenziale Ipergeometrica Confluente** (o di Kummer-Macdonald)

Oltre al grande numero di funzioni rappresentabili per mezzo della *Serie Ipergeometrica Gaussiana*, grazie ai suoi tre 'gradi di libertà' parametrici, un'importantissima classe di *funzioni-limite* emerge dalla stessa serie (34) nel caso in cui l'uno o l'altro dei parametri *simmetrici* reali, α o β, tende a $\pm\infty$ *con continuità*, come una variabile *indipendente*. Come esemplificazione, sia esso β.

Si consideri, dunque, la *Funzione Ipergeometrica Gaussiana*

$$
{}_2F_1(\alpha, \beta; \mu; x/\beta) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\mu)_n} \frac{x^n}{\beta^n} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n x^n}{n!(\mu)_n} \frac{(\beta)_n}{\beta^n} \tag{42}
$$

come funzione *anche* del parametro *variabile continuo* $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e per $\mu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0^-$.
Qui, la definizione della funzione

$$
{}_1F_1(\alpha, \mu; x) := \lim_{\beta \to \pm\infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \mu; x/\beta) \tag{43}
$$

costituisce un limite *uniforme* per $\beta \to \pm\infty$.
Infatti, poiché $\exists M \in (1, +\infty)$ tale da avere, definitivamente,

- $\left|\frac{(\alpha)_n x^n}{n!(\mu)_n}\frac{(\beta)_n}{\beta^n}\right| \sim \left|\frac{\alpha^n x^n}{\mu^n}\frac{1}{n!}\cdot 1\right| \equiv \left|\frac{(\alpha/\mu)^n x^n}{n!}\right| < \frac{M}{n!} := c_n \quad (x \in \mathbb{R},\, x\ \textit{fissato}),$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty,$ per il *Criterio del Rapporto*,

allora, la serie (42) converge a β *uniformemente*, per il *Criterio di Weierstrass*.
Ciò implica che vale la proprietà di scambio tra le operazioni *indipendenti* di *somma di una serie* e quella di *tendenza al limite*, i.e.,

$$\lim_{\beta\to\pm\infty} {}_2F_1(\alpha,\beta;\mu;x/\beta) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_n x^n}{n!(\mu)_n}\left(\lim_{\beta\to\pm\infty}(\beta)_n/\beta^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(\alpha)_n x^n}{n!(\mu)_n}\cdot 1\right).$$

La *serie-limite* risultante costituisce una rappresentazione della *Serie* (e *Funzione*) *Ipergeometrica Confluente* cosiddetta. Esplicitamente, si scrive

$${}_1F_1(\alpha,\mu;x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!(\mu)_n}x^n. \tag{44}$$

È prevedibile che, dall'Eq. generale (28), si possa indurre l'equazione differenziale-limite, della quale, ${}_1F_1(\alpha,\mu;x)$ è un integrale *particolare*. Infatti, dall'omotetìa $w := \beta x$, seguono

- $$\frac{dw}{dx} = \beta\,, \tag{45.1}$$
- $$y'(x) = \frac{dw}{dx}\frac{dy}{dw} = \beta y'(w)\,, \tag{45.2}$$
- $$y''(x) \equiv \frac{d}{dx}y'(x) = \left(\frac{dw}{dx}\frac{d}{dw}\right)(\beta y'(w)) = \beta^2 y''(w)\,. \tag{45.3}$$

Mediante le trasformazioni (45.1), (45.2) e (45.3), l'Eq. (28) diventa

$$\frac{w}{\beta}\left(1-\frac{w}{\beta}\right)\beta^2 y''(w) + \left(\mu-(\alpha+\beta+1)\frac{w}{\beta}\right)\beta y'(w) - \alpha\beta y(w) = 0\,, \tag{45.4}$$

esibendo due punti di singolarità *fuchsiana* al *finito*, $w = 0$ e $w = \beta$. Nel limite $\beta \to \pm\infty$, l'Eq. (45.4) assume l'espressione *asintotica*

$$\frac{w}{\cancel{\beta}}\beta^{\cancel{2}} y'' + \left(\mu - \cancel{\beta}\frac{w}{\cancel{\beta}}\right)\beta y' - \alpha\beta y = 0\,, \tag{45.5}$$

che, dalla divisione completa per β e dall'isomorfismo di scambio $w \rightleftarrows x$ della variabile (muta!) di integrazione, si riduce alla forma ipergeometrica, detta di *Kummer* (*-Macdonald*) o *Confluente*,

$$xy'' + (\mu - x)y' - \alpha y = 0. \tag{46}$$

Il termine '*Confluente*' si riferisce al fatto che, nel processo di limite in $\mathbb{C}$, $w \to \infty$, la singolarità *regolare* in $w = \beta$ dell'Eq. (46) 'confluisce' nella singolarità *irregolare* all'∞.
Dall'Eq. (44), è evidente che la *Serie Ipergeometrica Confluente* converge in tutto $\mathbb{R}$, poiché il suo raggio ρ di convergenza vale, appunto,

$$\rho := \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \equiv \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(\mu+n)}{\alpha+n} = +\infty\,. \tag{47}$$

Come per la *Funzione Ipergeometrica Gaussiana*, esiste necessariamente una *seconda* soluzione dell'Eq. (46), linearmente indipendente dalla (44), anch'essa di forma *ipergeometrica confluente* e analoga a quella dell'Eq. (40).
Pertanto, una rappresentazione dell'integrale generale dell'Eq. (46) è data da

$$y(x) = \kappa_1\, {}_1F_1(\alpha, \mu; x) + \kappa_2 x^{1-\mu}\, {}_1F_1(\bar{\alpha}, \bar{\mu}; x), \tag{48}$$

per la quale, analogamente all'Eq. (39), valgono le definizioni parametriche

$$\begin{cases} \bar{\alpha} := \alpha - \mu + 1, \\ \bar{\mu} := 2 - \mu. \end{cases} \tag{48.1}$$

□

Dell'*Equazione Ipergeometrica Confluente*, è nota anche una soluzione linearmente indipendente sia da ${}_1F_1(\alpha, \mu; x)$ sia da $x^{1-\mu}\, {}_1F_1(\bar{\alpha}, \bar{\mu}; x)$. Essa vale, però, *solo* per $0 < \alpha < \mu$; è data, in termini della *Funzione* B di Euler o delle sue *Funzioni* Γ componenti, dalla *Funzione di* KUMMER (ERNST EDUARD, 1810-1893):

$$\bar{y}(x) = B(\alpha, \mu + \alpha)\, {}_1F_1(\alpha, \mu + 2\alpha; x) \equiv \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\mu + \alpha)}{\Gamma(\mu + 2\alpha)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\mu + 2\alpha)_n\, n!} x^n \tag{48.2}$$

(si veda, e.g., il math-notebook [14.1], P. 8, **Esempio 1**.).

□

Osservazione 2

Oltre a numerose funzioni – non ultime quelle *di Legendre*, *di Bessel*, *di Whittaker*, la *Funzione Gamma Incompleta*, i *Polinomi ortogonali di Hermite*, *di Laguerre* e *di Čebyšëv*, *gli Integrali di Fresnel* – che ${}_1F_1$ è in grado di rappresentare con assegnazioni specifiche di valori ai parametri α e μ e con trasformazioni opportune della variabile indipendente x (o z), anche la Teoria delle Probabilità (*Funzione degli Errori*) e la Fisica Quantistica teorica si avvalgono della *Funzione Ipergeometrica Confluente* in svariate circostanze. In Fisica Quantistica non-Relativistica, ad esempio, dove il simbolo di Macdonald $M(\alpha, \mu, x)$ è spesso usato al posto del classico ${}_1F_1(\alpha, \mu; x)$, le cosiddette *Funzioni d'onda Coulombiane*, sia regolare che irregolare, soluzioni della parte radiale *dell'Equazione di Schrödinger* nel caso della diffusione in un campo centrale prodotto da distribuzioni di cariche elettriche (tipicamente, quelle nucleari), sono espresse mediante *Funzioni Ipergeometriche Confluenti*.

■

Nel paragrafo **H** di questo math-notebook, PP. 27-28, sono elencate alcune *rappresentazioni ipergeometriche*, *Gaussiane* e *Confluenti* di funzioni.

Per una raccolta estesa di problemi di integrazione di equazioni differenziali ordinarie del 2º ordine lineari mediante espansioni in serie di potenze, si vedano, e.g., [27] e [28].

D.3 Un modello generatore di soluzioni polinomiali

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme *aperto* e *simmetrico* vs. x_0, punto di *singolarità regolare* di un'equazione differenziale lineare ordinaria, omogenea a coefficienti variabili, appartenente a una classe di equazioni specializzate opportunamente.
Dopo la traslazione $x_0 \mapsto 0$ nell'origine del riferimento, si assuma che la forma generale di tale classe sia

$$x^2(1+R_M x^M)y''(x)+x(P_0+P_M x^M)y'(x)+(Q_0+Q_M x^M)y(x)=0, \tag{1}$$

nella quale, $M \in \mathbb{Z}_0^+ \; (\equiv \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \;\wedge\; \{R_M, P_0, P_M, Q_0, Q_M\} \subset \mathbb{R}$.
Scelta in $(\mathbb{A}\backslash\{0\}) \supseteq \{\mathcal{U}_\delta(0)\backslash\{0\}\}$ l'espansione-test solita

$$y(x):=x^\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{\lambda+k}, \tag{2}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad (\lambda = a+ib \Rightarrow x^\lambda = x^a e^{ib\ln x} \equiv x^a(\cos(b\ln x)+i\sin(b\ln x)))$, si calcolano

- $$y'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\lambda+k)x^{\lambda+k-1}, \tag{2.1}$$
- $$y''(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\lambda+k)(\lambda+k-1)x^{\lambda+k-2}. \tag{2.2}$$

Quindi, sostituite le Eq.i (2.1) e (2.2) nell'Eq. (1), si ricavano progressivamente le rappresentazioni in serie

- $$(1+R_M x^M)\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda+k)(\lambda+k-1)a_k x^{\lambda+k}+(P_0+P_M x^M)\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda+k)a_k x^{\lambda+k}+ \\ +(Q_0+Q_M x^M)\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^{\lambda+k}=0,$$
- $$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big[(1+R_M x^M)(\lambda+k)(\lambda+k-1)+(P_0+P_M x^M)(\lambda+k)+Q_0+Q_M x^M\Big]a_k x^{\lambda+k}=0,$$
- $$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big[(\lambda+k)^2+(P_0-1)(\lambda+k)+Q_0+(R_M(\lambda+k)^2+(P_M-R_M)(\lambda+k)+Q_M)x^M\Big]a_k x^{\lambda+k}=0,$$
- $$(\lambda^2+(P_0-1)\lambda+Q_0+(R_M\lambda^2+(P_M-R_M)\lambda+Q_M)x^M)\,a_0 x^{\lambda-2}+\sum_{k=1}^{+\infty}[\ldots]\,a_k x^{\lambda+k}=0. \tag{2.3}$$

Nell'Eq. (2.3), è stato evidenziato l'addendo iniziale $(k=0)$ della serie (2): i primi tre termini formano l'espressione dell'*equazione indiciale* mentre, nel fattore-somma $R_M\lambda^2+(P_M-R_M)\lambda+Q_M$ immediatamente seguente, la parte costituita dai primi due termini, $R_M\lambda^2+(P_M-R_M)\lambda$, è espandibile, $\forall\{\lambda, M\}$, nell'*identità*

$$R_M\lambda^2+(P_M-R_M)\lambda \equiv \\ \equiv (R_M(\lambda-M)^2+(P_M-R_M)(\lambda-M))+R_M(2\lambda-M)M+(P_M-R_M)M, \tag{3}$$

Ora, se $\bar{\lambda}$ è una delle radici dell'equazione indiciale e, inoltre, si ha che $\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}_0^+$, allora, $M=\bar{\lambda}$ (vincolo di *cut-off*) genera l'*identità nulla equivalente*,

$$\cancel{(R_M\bar{\lambda}^2+(P_M-R_M)\bar{\lambda})} \equiv \cancel{(R_M(\bar{\lambda}-M)^2+(P_M-R_M)(\bar{\lambda}-M))}+\cancel{R_M\bar{\lambda}^2+(P_M-R_M)\bar{\lambda}}, \tag{4}$$

che riduce l'Eq. omogenea generale (1) a una forma vincolata a una *potenza intera* $M \geq 0$:

$$(\lambda^2+(P_0-1)\lambda+Q_0+(R_M(\lambda-M)^2+(P_M-R_M)(\lambda-M)+Q_M)x^M)a_0 x^{\lambda-2}+ \\ +\sum_{k=1}^{M-1}[\ldots]a_k x^{\lambda+k}+\sum_{k=M}^{+\infty}[\ldots]a_k x^{\lambda+k}=0. \tag{5}$$

Con i vincoli ulteriori $a_k := 0 \;\forall k$ nella somma (finita) $\sum_{k=1}^{M-1}[\ldots]\,a_k x^{\lambda+k}$, M corrisponde al *grado di un polinomio*.

Riguardo alla serie-resto nell'Eq. (5), $\sum_{k=M}^{+\infty}[\ldots]a_k x^{\lambda+k}$, si può porre, $\forall\, k \neq \kappa M$ ($\kappa \in \mathbb{Z}^+$, i.e., con tutti i termini di indice k *non-multiplo* di M),

$$((\lambda+k)^2+(P_0-1)(\lambda+k)+Q_0)a_k := -(R_M(\lambda+k-M)^2+(P_M-R_M)(\lambda+k-M)+Q_M)a_{k-M}.$$

Per tutto quanto osservato, la soluzione (2) in serie di potenze si riduce alla rappresentazione *minimale*

$$y(x) := x^{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{Mk}x^{Mk} \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} a_{Mk}x^{\lambda+Mk}. \tag{6}$$

Infine, ritornando alla famiglia generale (1), si trova che la *convergenza* delle soluzioni in serie di potenze è determinata da quella di $1/(1+R_M x^M)$, i.e., dal vincolo $0<|x|<|R_M|^{-1/M}$. Così, restano specificati sia l'intervallo *compatto* $\bar{\mathcal{U}}_\delta(0)$ sia il *cut-off polinomiale* o, al più, *seriale* ($R_M = 0$) ammissibili. Nel caso seriale, la soluzione (6) converge (uniformemente) in $\mathcal{K} \subset \bar{\mathcal{U}}_\delta(0)$, $\forall\, x$, i.e., il suo *raggio di convergenza* ρ si estende a tutto $\mathbb{R}^+$ ($\rho = +\infty$).

Esempî notevoli

Alcune specializzazioni del sestetto parametrico *ordinato* $\{M, R_M, P_0, P_M, Q_0, Q_M\}$ per equazioni differenziali che abbiano una soluzione *polinomiale* o, al più, *seriale*, a-là Frobenius in $\mathcal{U}_\delta(0)\backslash\{0\}$, sono:

- l'*Equazione di Legendre*

  $(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\nu(\nu+1)y(x)=0 \iff \{2,\,-1,\,0,\,-2,\,0,\,\nu(\nu+1)\}$,

- l'*Equazione Ipergeometrica* (di Gauss)

  $x(1-x)y''(x)+(\mu-(\alpha+\beta+1)x)y'(x)-\alpha\beta y(x)=0 \iff \{1,\,-1,\,\mu,\,-(\alpha+\beta+1),\,0,\,-\alpha\beta\}$,

- l'*Equazione Ipergeometrica Confluente* (di Kummer-Macdonald)

  $xy''(x)+(\mu-x)y'(x)-\alpha y(x)=0 \iff \{1,0,\mu,\,-1,0,\,-\alpha\}$,

- l'*Equazione di Bessel* ($\rho = +\infty$)

  $x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0 \iff \{2,0,1,0,\,-\nu^2,1\}$,

- l'*Equazione di Laguerre*

  $xy''(x)+(1-x)y'(x)+\nu y(x)=0 \iff \{1,0,1,\,-1,0,\,\nu\}$,

- l'*Equazione di Hermite*

  $y''(x)-2xy'(x)+2\nu y(x)=0 \iff \{2,0,\,-2,0,2\nu,0\}$,

- l'*Equazione di Čebyšëv* di 1° tipo

  $(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+\nu^2y(x)=0 \iff \{2,\,-1,0,\,-1,0,\,\nu^2\}$,

- l'*Equazione di Jacobi*

  $x(1-x)y''(x)+(\eta-(\sigma+1)x)y'(x)+\nu(\sigma+\nu)y(x)=0 \iff \{1,\,-1,\,\eta,\,-(\sigma+1),0,\,\nu(\sigma+\nu)\}$.

La proprietà di *ortonormalità* delle soluzioni polinomiali (e.g., in svariati problemi agli autovalori in Elettrodinamica e in Fisica Quantistica) presuppone l'assegnazione $\nu \equiv k \in \mathbb{Z}_0^+$, ovunque ν sia presente nelle equazioni sopraindicate. Entrambi i tipi di equazione *Ipergeometrica* (Gaussiana e Confluente), le equazioni di *Laguerre*, di *Čebyšëv* e di *Jacobi* compaiono *ridotte ai minimi termini*, ciascuna vs. il proprio sestetto parametrico, i.e., divise per x (o per x^2) $\neq 0$.
Infine, il metodo più efficace e diretto per la generazione di soluzioni polinomiali (*ortogonali*) rimane, probabilmente, $\forall\, M \equiv n$, quello delle *Formule differenziali di Rodrigues* (v. [15], [16], [17], [19] e, soprattutto, [20]). Alcune applicazioni sono proposte come esercizi (di un certo impegno) nel math-notebook: **Funzioni Ortogonali in $\mathbb{R}$ - Metodi, risultati e un'Introduzione alla Teoria di Sturm-Liouville** [16].

■

D.3.1 La Funzione Generatrice dei Polinomî di Legendre (applicazione fondamentale di studio)

Da quanto discusso nel paragrafo **D.3**, il sestetto $\{2,\ -1,\ 0,\ -2,\ 0,\ k(k+1)\}$ specializza la famiglia parametrica (1) in quell'equazione di Legendre avente una soluzione particolare *polinomiale* di grado $k\ (\equiv M)$ in $\overline{\mathcal{U}}_\delta(0)$. Ad esempio, la teoria delle *funzioni-potenziale* fornisce una motivazione fisica significativa di quanto segue mediante la *Funzione di Green* di *spazio-libero*, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mapsto G(\boldsymbol{r}\,|\,\boldsymbol{r}') \equiv \|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^{-1}$, i.e., valida in $\overline{\mathcal{U}}_\delta(0)$. Si scrive:

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} \equiv \frac{1}{R} := \frac{1}{(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{1/2}}\,,$$ scegliendo $(0 \le)\ r' < r$ e $\varphi := \widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}$, *convesso*, (i.e., $0 \le \varphi < \pi$),

da cui, definiti i parametri $x := \cos\varphi\ \ (\in [-1,1])$ e $t := r'/r\ \ (\ge 0)$, seguono le uguaglianze

$$\frac{r}{R} = \left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\varphi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \equiv (1-(2xt-t^2))^{-1/2}\,.$$

Ora, tenendo conto che $t \in \mathbb{R}_0^+$, vale *definitivamente* la condizione $|\xi| := |2xt - t^2| < 1\ \forall\, x$ *fissato*, così che l'$\mathcal{M}$-espansione (uniformemente convergente) di $(1-\xi)^{-1/2}$ è ammissibile:

$$\begin{aligned}(1-\xi)^{-1/2} &\equiv (1-(2xt-t^2))^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{k}(2xt+(-t^2))^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{-1/2}{k}t^k(2x-t)^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^2(2x-t)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^3(2x-t)^3 + \ldots + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^k(2x-t)^k + \ldots\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Il termine generale della serie (7) può essere espanso come somma di $k+1$ addendi (formula di Tartaglia-Newton). Ricordando l'identità $(2k)!! \equiv 2^k k!$, si può scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}t^k(2x-t)^k &= \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{j}(2x)^{k-j}t^j\right]t^k \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left[(2x)^k - \binom{k}{1}(2x)^{k-1}t + \binom{k}{2}(2x)^{k-2}t^2 - \binom{k}{3}(2x)^{k-3}t^3 + \ldots + (-1)^k t^k\right]t^k \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left[(2x)^k - \frac{k}{1!}(2x)^{k-1}t + \frac{k(k-1)}{2!}(2x)^{k-2}t^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}(2x)^{k-3}t^3 + \ldots\right]t^k\,. \end{aligned} \tag{8}$$

La simmetricità\anti-simmetricità *definita* della soluzione polinomiale nel cerchio *unitario* di convergenza $\overline{\mathcal{C}}_{(1)}(0)$, centrato in $x = 0$, *esclude* direttamente gli addendi a potenza *dispari* in t dalla somma finita $[\ldots]$ nell'Eq. (8), non rimanendo, tale somma, *formalmente invariante* nello scambio $t \rightleftharpoons -t$. Infine, l'assegnazione $t = \pm 1$ in $[\ldots]$, lascia $[\ldots]$ *dipendente solo da* x, così da ridurre *selettivamente* l'espansione (8) a

$$\begin{aligned}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}t^k(2x-t)^k &\mapsto \\ &\mapsto \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left[(2x)^k + \frac{k(k-1)}{2!}(2x)^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}(2x)^{k-4} + \ldots\right]t^k \\ &= \frac{(2k-1)!!}{k!}\left[x^k + \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}x^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{8(2k-1)(2k-3)}x^{k-4} + \ldots\right]t^k\,, \\ &\equiv P_k(x)\,t^k\,, \end{aligned} \tag{9}$$

dove, $P_k(x)$ è il k-esimo *Polinomio di Legendre*, come si verifica con il *metodo di Frobenius* (dall'Eq. (22), P. 10, l'*equazione indiciale* è data da $\lambda^2 - \lambda = 0$; si applichi l'algoritmo scegliendo la radice conveniente $\lambda = 0$). Per tale ragione, l'espressione $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$ è nota come la *funzione generatrice* dei *Polinomi di Legendre*:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty}P_k(x)\,t^k\,. \tag{10}$$

■■■

E - Il legame con l'Equazione di Riccati

A **ogni** equazione differenziale ordinaria *lineare* e *omogenea* del 2° ordine, i.e., del tipo Eq. (1), si può **sempre** associare un'equazione differenziale del tipo *di Riccati*, del 1° ordine, mediante la trasformazione (ovunque *non-nulla*)

$$y(x) := \pm e^{\int u(x)dx}, \tag{49}$$

vs. la nuova variabile *dipendente incognita* $u \equiv u(x)$ (e.g., v. [4], [20]).
Infatti, sostituendo le espressioni derivate (a meno di costanti di integrazione superflue)

- $y'(x) = \pm u(x) e^{\int u(x)dx} \equiv u(x) y(x)$, (50.1)
- $y''(x) = \pm (u'(x) + (u(x))^2) e^{\int u(x)dx} \equiv (u'(x) + (u(x))^2) y(x)$, (50.2)

nell'Eq. (1) e dividendo per $y(x) \neq 0$, si ottiene l'equazione del 1° ordine, del tipo *di Riccati*,

$$u' + u^2 + p(x) u + q(x) = 0. \tag{51}$$

□

Inversamente, considerata l'*Equazione di Riccati* nella sua forma normale *più generale*,

$$u' + r(x) u^2 + s(x) u + t(x) = 0, \tag{52}$$

nella quale r, s e t sono funzioni *note* di x definite in uno *stesso* intervallo $\mathfrak{I}$ e tali, almeno, da soddisfare le condizioni simultanee

$$\begin{cases} s \wedge t \in \mathcal{C}^0(\mathfrak{I}), \\ r \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{I}), \\ r(x) t(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathfrak{I}, \end{cases} \tag{53}$$

la trasformazione inversa della definizione (49),

$$u(x) \equiv \frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} ln|y(x)| \equiv \frac{1}{r(x)} \frac{y'(x)}{y(x)}, \tag{54}$$

nella nuova variabile dipendente incognita $y \equiv y(x)$, riconduce l'Eq. (52) alla forma (1) del 2° ordine, normale, lineare e omogenea.
Infatti, sostituite l'espressione (54) di $u(x)$ e quella della sua funzione derivata 1ª,

$$u'(x) \equiv \frac{y''(x)}{r(x) y(x)} - \frac{r'(x) y'(x)}{(r(x))^2 y(x)} - \frac{(y'(x))^2}{r(x)(y(x))^2}, \tag{54.1}$$

nell'Eq. (52) e, poi, moltiplicando l'uguaglianza risultante per $r(x) y(x) \neq 0$, si arriva all'Eq. (1),

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0, \tag{55}$$

dove, sono state definite sinteticamente le espressioni

$$\begin{cases} p(x) := s(x) - r'(x)/r(x), \\ q(x) := r(x) t(x). \end{cases} \tag{55.1}$$

Pertanto, il problema – a tutt'oggi irrisolto – della determinazione analitica dell'integrale generale dell'*Equazione di Riccati* (52) per il caso in cui *non* se ne conosca *alcun* integrale particolare è *sempre* in co-implicazione (i.e., condizione *necessaria e sufficiente*) con il problema irrisolto della disponibilità di un criterio *generale* di soluzione dell'equazione differenziale *lineare omogenea* del 2º ordine associata, avente forma *normale* e coefficienti $p(x)$ e $q(x)$ *qualsiasi*, benché, di questi, si sappia che sono esprimibili formalmente secondo le Eq.i (55.1)!

□

Invece, l'*Equazione di Riccati* è sempre risolvibile in termini finiti quando se ne conosca *almeno* un integrale particolare, lo si indichi $\bar{u}(x)$. In tale circostanza, la sostituzione

$$u(x) := \bar{u}(x) + \frac{1}{\phi(x)}, \tag{56}$$

con ϕ funzione *incognita*, trasforma l'Eq. (52) nell'equazione lineare non-omogenea

$$\phi' - (2r(x)\bar{u}(x) + s(x))\phi = r(x), \tag{57}$$

della quale si ottiene l'integrale generale immediatamente,

$$\phi(x) = e^{\int (2r(x)\bar{u}(x) + s(x))dx} \left(c + \int r(x) e^{-\int (2r(x)\bar{u}(x) + s(x))dx} dx \right)$$

e, quindi, dalla sostituzione (56), l'integrale generale dell'*Equazione di Riccati* (52),

$$u(x) := \bar{u}(x) + \frac{e^{-\int (2r(x)\bar{u}(x) + s(x))dx}}{c + \int r(x) e^{-\int (2r(x)\bar{u}(x) + s(x))dx} dx}. \tag{58}$$

La conoscenza-chiave di $\bar{u}(x)$ equivale, rispetto all'Eq. (1) lineare omogenea del 2º ordine, alla conoscenza di un suo integrale particolare, $y_1(x)$, dal quale poter generare il secondo integrale linearmente indipendente mediante l'Eq. (2).

Extrema ratione, se non si conosce alcun integrale particolare dell'*Equazione di Riccati*, questa può essere sempre trasformata nella sua associata lineare omogenea del 2º ordine (55), che si tenta di risolvere con i metodi discussi in precedenza, o riconoscendola di una qualche forma particolare maneggevole o 'forzandola' mediante sviluppi in serie di potenze. (‡)

■

(‡) La questione dell'integrazione dell'*Equazione di Riccati* nel contesto della Teoria delle Superfici e delle Linee, aventi torsione e curvatura assegnate, è affrontata, e.g., in [12].

F - Risultati relativi alle equazioni non-omogenee

Il *Teorema di Liouville-Jacobi* (v. [1], [2]) fornisce un'espressione del determinante *wronskiano* di due soluzioni *linearmente indipendenti* dell'equazione *omogenea* (1),

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du}, \tag{59}$$

$\forall\, x_0 \in \Im \wedge W(x_0) \neq 0$ (si faccia *grande* attenzione al *segno* '$-$' nell'esponente integrale).

□

Circa l'equazione differenziale ordinaria lineare *non-omogenea* del 2º ordine,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{60}$$

$(g(x) \not\equiv 0)$, la ricerca di un suo integrale *particolare*, $\overline{y}(x)$, con il metodo di *variazione delle costanti arbitrarie* (Lagrange), si conclude con il calcolo

$$\overline{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{S(t,x)}{W(t)}\, g(t)\,dt\,, \tag{61}$$

nella quale, compare il determinante t-parametrico

$$S(t,x) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}. \tag{61.1}$$

L'esplicitazione di $S(t,x)$ e l'Eq. (61) dànno

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{W(x_0)}\left(y_2(x)\int_{x_0}^{x} y_1(t)\,g(t)\,e^{-\int_{x_0}^{t} p(u)du}\,dt - y_1(x)\int_{x_0}^{x} y_2(t)\,g(t)\,e^{-\int_{x_0}^{t} p(u)du}\,dt \right). \tag{62}$$

Osservazione 3

Se le funzioni p, q e g sono *analitiche* in x_0, si può determinare, in $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ opportuno, l'integrale generale dell'Eq. (60) applicando le T-espansioni pertinenti in entrambi i membri di questa e uguagliando, termine-a-termine, i coefficienti delle potenze binomiali $(x - x_0)^n$ che compaiono nei membri dell'equazione. Prevedibilmente, la traslazione $w = x - x_0$, corrispondendo a M-espansioni, produce, in generale, un alleggerimento dei calcoli.

Ottenuta la *formula iterativa*, i termini addendi si raccolgono in *tre* serie, una delle quali, *non dipende* da parametri indeterminati: questa è la rappresentazione dell'*integrale particolare* $\overline{y}(x)$.

I dettagli del procedimento complessivo sono gli *stessi* descritti alle P. 8-9.

Se *solo* g è analitica in x_0, dove, invece, p e q presentano, rispettivamente, un polo del 1º ordine e del 2º ordine, allora, ottenuti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ con il *Teorema di Frobenius*, si calcola, previo ricorso al prodotto *à-la Cauchy* tra serie di potenze, $W(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0} (y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x))$.

Infine, si costruisce $\overline{y}(x)$ dall'Eq. (62), integrando termine-a-termine vs. le serie rappresentative di $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Il lavoro è noioso e richiede attenzione (e, molto opportunamente, un buon CAS per il controllo)!

■

G - La riduzione esponenziale di scala

La *riduzione esponenziale di scala* della variabile incognita y è una trasformazione spesso utile (generalizzabile alle equazioni differenziali lineari non-omogenee di ordine $n > 2$) con la quale l'Eq. (60) muta in un'equazione ancora del 2º ordine non-omogenea, però *priva* del termine di derivata (incognita) di ordine *immediatamente inferiore*, i.e., del 1º ordine.
Introdotta la nuova funzione *incognita* $u \equiv u(x)$,

$$y(x) := u(x)\, e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} \tag{63}$$

(cf/c il fattore esponenziale nell'Eq. (59)), se ne calcolano le due derivate successive,

- $$y'(x) = (u'(x) - (1/2)u(x)\,p(x))\,e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}, \tag{63.1}$$
- $$y''(x) = (u''(x) - p(x)u'(x) - (1/2)(p'(x) - (1/2)(p(x))^2)u(x))\,e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}. \tag{63.2}$$

Sostituendo le espressioni trasformate (63), (63.1) e (63.2) nell'Eq. non-omogenea (60) e dividendo per il fattore esponenziale (sempre $\neq 0$) presente nella definizione (63), risulta

$$u'' + \phi(x)u = G(x), \tag{64}$$

dove, insieme con la *sparizione* di $u'(x)$ e la definizione $G(x) := g(x)\,e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$, si determina che

$$\phi(x) := q(x) - (1/4)(p(x))^2 - (1/2)p'(x). \tag{64.1}$$

Può accadere che sia più agevole integrare l'Eq. (64) che non l'Eq. (60) originaria, e.g., quando $\phi(x) \equiv \kappa$ o $\phi(x) \equiv \kappa/(ax+b)^2$, dove, κ è una costante $\in \mathbb{R}$.
Infatti, nel caso $\phi(x) = \kappa$, l'equazione *omogenea* associata all'Eq. (64) diventa di tipo *armonico*; quindi, si può sempre calcolare l'*integrale generale* dell'Eq. (64), distinto secondo il *segno* di κ:

- se $\kappa > 0$, risulta
$$u(x) = c_1 \cos(\kappa^{1/2}x) + c_2 \sin(\kappa^{1/2}x) + \frac{1}{\kappa^{1/2}}\int_0^x G(t)\sin(\kappa^{1/2}(x-t))\,dt; \tag{65.1}$$
- se $\kappa = 0$, risulta
$$u(x) = c_1 + c_2 x + \int_0^x G(t)(x-t)\,dt; \tag{65.2}$$
- se $\kappa < 0$, risulta
$$u(x) = c_1 e^{|\kappa|^{1/2}x} + c_2 e^{-|\kappa|^{1/2}x} + \frac{1}{|\kappa|^{1/2}}\int_0^x G(t)\sinh(|\kappa|^{1/2}(x-t))\,dt. \tag{65.3}$$

Invece, nel caso in cui $\phi(x) = \kappa/(ax+b)^2$, l'Eq. (64) corrisponde all'*Equazione di Euler* priva del termine lineare e non-omogenea

$$(ax+b)^2 u'' + \kappa u = (ax+b)^2 G(x), \tag{66}$$

(con $\Delta/4 \equiv 1/4 - \kappa/a^2$, cf/c Eq.i (4)), la cui integrazione, da eseguire, alla peggio, con un metodo di espansione in serie di potenze (v. **Osservazione 3**, P. 25) non presenta, difficoltà particolari. Comunque, l'integrale generale dell'Eq. (64) genera quello dell'Eq. (60) con la definizione (63).

■

H – Esempi di rappresentazioni ipergeometriche di funzioni-soluzione

H.1 Rappresentazioni ipergeometriche gaussiane:

$$\boxed{{}_2F_1(\alpha,\beta;\mu;x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\mu)_n}\,x^n;}$$

Funzioni elementari:

$$(1\pm x)^{-\alpha} = {}_2F_1(\alpha,\beta;\beta;\mp x)\,,$$

$$\frac{(1+x)^k+(1-x)^k}{(1-x^2)^k} = {}_2F_1\left(\frac{k}{2},\frac{k+1}{2};\frac{1}{2};x\right), \qquad k\in\mathbb{Z}^+,$$

$$\frac{2^k}{(1+(1-x)^{1/2})^k} = {}_2F_1\left(\frac{k}{2},\frac{k+1}{2};k+1;x\right), \qquad k\in\mathbb{Z}^+,$$

$$cos(\alpha x) = {}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha}{2};\frac{1}{2};(sin\,x)^2\right), \qquad sin(\alpha x) = {}_2F_1\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2};\frac{3}{2};(sin\,x)^2\right),$$

$$cosh(\alpha x) = {}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha}{2};\frac{1}{2};-(sinh\,x)^2\right), \qquad sinh(\alpha x) = {}_2F_1\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2};\frac{3}{2};-(sinh\,x)^2\right),$$

$$\frac{1}{x}\,ln(1\pm x) = {}_2F_1(1,1;2;\mp x)\,,$$

$$\frac{1}{2x}\,ln\frac{1+x}{1-x} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};x^2\right),$$

$$\frac{1}{x}\,sin^{-1}x = {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right),$$

$$\frac{1}{x}\,tan^{-1}x = {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right),$$

$$\frac{ln(1+(1-x^2)^{1/2})}{x(1+x^2)^{1/2}} = {}_2F_1\left(1,1;\frac{3}{2};-x^2\right);$$

Funzioni di Legendre Associate, di 1º e di 2º tipo, di ordine $\nu\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ e rango $m\in\mathbb{Z}_0^+$:

$$P_\nu^m(x) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2^m\,\Gamma(\nu-m+1)\,\Gamma(m+1)}\,(x^2-1)^{m/2}\,{}_2F_1\left(m-\nu,m+\nu+1;m+1;\frac{1-x}{2}\right),$$

$$Q_\nu^m(x) = \frac{(-1)^m\,\pi^{1/2}\,\Gamma(\nu+m+1)}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu+3/2)}\,\frac{1}{x^{\nu+m+1}}\,{}_2F_1\left(\frac{m+\nu+2}{2},\frac{m+\nu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{x^2}\right), \qquad |x|>1\,;$$

Integrali Legendriani completi, di 1º e di 2º tipo:

$$F(\pi/2,k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right), \qquad E(\pi/2,k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right);$$

Polinomî di Čebyšëv ($T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ e $W_n(x)$ sono i *Polinomî di Čebyšëv* di 1º, di 2º, di 3º e di 4º tipo):

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right), \qquad U_n(x) = (n+1)\,{}_2F_1\left(-n,n+2;\frac{3}{2};\frac{1-x}{2}\right), \qquad (\ddagger)$$

$$V_n(x) = {}_2F_1\left(-n,n+1;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right), \qquad W_n(x) = (2n+1)\,{}_2F_1\left(-n,n+1;\frac{3}{2};\frac{1-x}{2}\right).$$

(‡) Dove sia necessario, si osservi che, essendo $(-n)_n$ un prodotto a n fattori, risulta: $(-n)_n\equiv(-1)^n n! = (-1)^n\,\Gamma(n+1)$.

H.2 Rappresentazioni ipergeometriche confluenti

di 1° tipo: $${}_1F_1(\alpha, \mu; x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\mu)_n} x^n \equiv M(\alpha, \mu; x);$$

di 2° tipo: $$\Psi(\alpha, \mu; x) := \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\alpha-\mu)}\, {}_1F_1(\alpha, \mu; x) + \frac{\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\mu}\, {}_1F_1(1+\alpha-\mu, 2-\mu; x);$$

Funzioni elementari:

$$e^x = {}_1F_1(\alpha, \alpha; x), \qquad \frac{e^x - 1}{x} = {}_1F_1(1, 2; x), \qquad \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = {}_1F_1(-2, 1; x);$$

Funzioni degli Errori:

$$Erf\, x = x\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right), \qquad Erfc\, x = \frac{1}{2} e^{-x^2} \Psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right) \equiv \frac{\pi^{1/2}}{2} e^{-x^2} \left({}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x\right) - \pi^{1/2}\, {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; x\right)\right);$$

Integrali di Fresnel:

$$C(x) = \frac{x}{2}\left({}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; i\frac{\pi}{2}x^2\right) + {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -i\frac{\pi}{2}x^2\right)\right),$$

$$S(x) = -i\frac{x}{2}\left({}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; i\frac{\pi}{2}x^2\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -i\frac{\pi}{2}x^2\right)\right);$$

Integral-coseno e *Integral-seno* (per la soluzione del caso patologico $\mu \to 1^{\pm}$, v. [15], § 9.7; inoltre, cf/c Eq. (48.2)):

$$Ci(x) = -\frac{1}{2} e^{-ix} \Psi(1, 1, ix) - \frac{1}{2} e^{ix} \Psi(1, 1, -ix),$$

$$Si(x) = \frac{\pi}{2} - i\frac{e^{-ix}}{2} \Psi(1, 1, ix) + i\frac{e^{ix}}{2} \Psi(1, 1, -ix);$$

Funzioni Integro-esponenziale e *Log-integrale* (ancora, circa il caso patologico $\mu \to 1^{\pm}$, v. *Integral-coseno\seno*):

$$Ei(-x) = -e^{-x} \Psi(1, 1; x), \qquad li(x) = -x \Psi(1; 1; -\ln x);$$

Funzione di Bateman (di *Bessel Sferico-Iperbolica* (*Modificata*) di 2° tipo):

$$k_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(1+\nu/2)} \Psi(-\nu/2, 0, 2x);$$

Polinomî di Hermite, di ordini *pari* e *dispari*:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\, {}_1F_1(-n, 1/2; x^2), \qquad H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!}\, x\, {}_1F_1(-n, 3/2; x^2);$$

Polinomî (*associati*) *di Laguerre*:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_1F_1(-n, \alpha+1; x);$$

Funzioni di Bessel di 1° tipo (da queste, si possono ricavare le espressioni ipergeometriche di N_ν, $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, I_ν e K_ν (si consultino: [3], [4], [15], [17], [19] e [20]). Inoltre, e.g., v. anche il math-notebook [14.2]:

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_1F_1(\nu + 1/2, 2\nu + 1; 2ix).$$

■■■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [2], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html .

Riferimenti generali

[1] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2ND ED., CH.S 1, 2, 4, 5, PRENTICE-HALL, INC. (1976);

[2] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7TH ED., CH.S 1, 7, ACADEMIC PR. (2013);

[3] WATSON, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2ND ED., P.S 85-94, 125, CAMBRIDGE UN. PRESS (1944; REPR. 1996);

[4] PAGANI, C. D. - SALSA, S., *Analisi Matematica*, VOL. **2**, CAP. 4, ZANICHELLI (-MASSON) (RIST. 1998);

[5] GIUSTI, E., *Analisi Matematica*, VOL. **2**, CAP. 3, BOLLATI-BORINGHIERI (1989);

[6] INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations*, 7TH ED., DOVER PUBNS., INC. (REV. 1985);

[7] INCE, E. L., *Integration of Ordinary Differential Equations*, 2ND ED., OLIVER & BOYD, LTD. (1952; REPR. 1969);

[8] CODDINGTON, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, PRENTICE-HALL (1961);

[9] YOSIDA, K., *Lectures on Differential and Integral Equations*, WILEY-INTERSCIENCE PUBL. INC., (1960);

[10] HILLE, E., *Analysis*, VOL. **II**, BLAISDELL PUBL. CO. (1966);

[11] APOSTOL, T. M., *Calculus*, 2ND ED., VOL. **II**, CH. 6, JOHN WILEY & SONS, INC. (1969);

[12] BENDER, C. M. - ORSZAG, S. A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, CH. 3, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1978);

[13] EISENHART, L. P., *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, GINN & CO. (1909);

[14] ZWILLINGER, D., *Handbook of Differential Equations*, 3RD ED., W/ERR., ACADEMIC PRESS (1997);

[15] L'AUTORE (CM) [math-notebooks PDF],
- [15.1] *Esistenza di soluzioni particolari integro-esponenziali dell'equazione* **DOL** *di Laplace del 2º ordine*;
- [15.2] *Rappresentazioni in serie di potenze delle Funzioni di Bessel in* $\mathbb{R}$.

Rappresentazioni ipergeometriche di funzioni-soluzione

[16] LEBEDEV, N. N., *Special Functions and Their Applications*, CH. 9, DOVER PUBNS. (1965; RIST. 1972);

[17] GATTESCHI, L., *Funzioni Speciali*, CAP. II, U.T.E.T. (1973);

[18] TEMME, N. M., *Special Functions*: *An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, CH.S 6, 7, 8, 9, JOHN WILEY & SONS, INC. (1996);

[19] SEABORN, J. B., *Hypergeometric Functions and Their Applications*, SPRINGER-VERLAG (1991);

[20] WHITTAKER, E. T. - WATSON, G. N., *A Course of Modern Analysis*, 4TH ED., CH.S XIV & XVI, CAMBRIDGE UN. PRESS (1927; 10TH REPR., 1973).

Esercizi e Applicazioni

[21] BONONCINI, V. E., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. **2**, 10A ED., P. 513-625, C. E. D. A. M. (1974);

[22] SPIEGEL, M. R., *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL (1971);

[23] SALSA, S. - SQUELLATI, A., *Esercizi di Analisi Matematica 2*, VOL. **3**, ZANICHELLI (-MASSON) (1994);

[24] GIUSTI, E., *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica*, VOL. **2**, BOLLATI-BORINGHIERI (1994);

[25] PICONE, M. - MIRANDA, C., *Esercizi di Analisi Matematica*, 3A ED., TUMMINELLI (1957);

[26] FINZI, B. - MORRA, F., *Esercizi di Analisi Matematica*, VOL. **II**, 2A ED., TAMBURINI (1970);

[27] WREDE, R. C. - SPIEGEL, M. R., *Advanced Calculus*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, 3RD ED., MCGRAW-HILL (2010);

[28] BRONSON, R. - Costa, G. B., *Differential Equations*, CH. 19, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (2006);

[29] BRONSON, R., *2500 Solved Problems in Differential Equations*, SCHAUM'S SOLVED PROBLEMS SERIES, MCGRAW-HILL PUBL. CO. (1988), CH. 15.

■■■